L'ENSEIGNEMENT
MATHÉMATIQUE

L'ENSEIGNEMENT
MATHÉMATIQUE

MÉTHODOLOGIE ET ORGANISATION DE L'ENSEIGNEMENT
PHILOSOPHIE ET HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES
CHRONIQUE SCIENTIFIQUE — MÉLANGES — BIBLIOGRAPHIE

REVUE INTERNATIONALE

PARAISSANT TOUS LES DEUX MOIS

Fondée en 1899 par C.-A. LAISANT et H. FEHR

DIRIGÉE PAR

H. FEHR
Docteur ès sciences
Professeur à l'Université
de Genève.

A. BUHL
Docteur ès sciences
Professeur à l'Université
de Toulouse.

VINGT-DEUXIÈME ANNÉE

1921 et 1922

PARIS
GAUTHIER-VILLARS & Cie, ÉDITEURS

GENÈVE
GEORG & Cie, ÉDITEURS

1921-1922

GENÈVE

IMPRIMERIE ALBERT KUNDIG

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES
DE LA
CRISTALLOGRAPHIE

PAR

Marcel WINANTS (Liége).

INTRODUCTION.

On sait que la cristallographie fut créée, il y a plus d'un siècle, par Haüy. Tout d'abord, on ne la considéra que comme un chapitre préliminaire de la minéralogie. Mais son importance ne cessa de grandir; on peut aujourd'hui l'envisager comme une science indépendante : elle a d'ailleurs pour objet l'étude générale des cristaux, que ceux-ci soient naturels ou bien artificiels.

La cristallographie ainsi conçue est une branche de la physico-chimie mathématique. Elle se divise en deux grandes parties: la cristallographie géométrique et la cristallographie physique.

Entre les propriétés physico-chimiques et la forme géométrique d'un cristal il existe une dépendance telle que, de la forme seule, on peut déduire plusieurs propriétés. Réciproquement, les propriétés optiques, électriques ou calorifiques permettent de prévoir la forme.

La conclusion de la cristallographie est la nécessité de concevoir un cristal comme formé de certaines molécules ou de certaines associations de molécules, rangées dans un certain ordre.

La forme géométrique ou la symétrie cristalline n'est que l'expression symbolique de la symétrie intérieure que révèlent les propriétés physico-chimiques.

A la suite de plusieurs recherches de Gauss, on a fondé une géométrie des surfaces.

Sur une surface donnée, on considère des points et des lignes remarquables. Citons les ombilics, les points paraboliques, les points singuliers, les lignes de courbure, les lignes de courbure totale constante, les géodésiques. Ces lignes et ces points ne sont pas distribués d'une façon quelconque.

Nous nous proposons d'appliquer la symétrie cristallographique à l'étude de certaines surfaces. Cette symétrie nous donnera d'utiles renseignements sur la répartition des propriétés géométriques.

Nous poursuivons un double but:

1º montrer les avantages qui peuvent résulter de cette méthode pour la description d'une surface particulière;

2º faire voir que cette méthode pourrait servir de base à une classification rationnelle des surfaces.

Nous nous adressons à la fois à des géomètres et à des cristallographes. Nous rappellerons le plus brièvement possible les définitions fondamentales de la géométrie et de la cristallographie.

Dans le premier chapitre nous ferons une étude détaillée d'une surface du troisième ordre; dans le chapitre II nous ferons une étude succincte de deux surfaces du quatrième ordre.

Dans ces deux premiers chapitres, nous aurons eu l'occasion de rencontrer plusieurs principes généraux que nous résumerons et que nous généraliserons dans le chapitre III.

L'application de ces principes nous permettra d'aborder quelques courbes et surfaces plus compliquées. Ce sera l'objet du chapitre IV.

Enfin, dans un cinquième et dernier chapitre, nous esquisserons une classification des surfaces au point de vue de la symétrie.

Chapitre premier.

Etude détaillée d'une surface tétraédrique.

§ 1. — Etude sommaire de quelques cubiques planes.

1. — Nous ferons précéder l'étude de chaque surface de celle des principales courbes que l'on peut obtenir en la coupant par des plans.

Dans la description des courbes algébriques planes du troisième ordre, nous adopterons la classification de ces courbes en cinq grandes familles:

Cubiques	non singulières (VI)	bipartites		1°
		unipartites		2°
	unicursales	nodales (IV)	acnodales	3°
			crunodales	4°
		cuspidales (III)		5°

Les cubiques non singulières sont de la VIe classe; les cubiques nodales de la IVe; et les cubiques cuspidales de la IIIe.

Les cubiques non singulières sont du premier genre, et les cubiques unicursales du genre zéro.

Nous subdiviserons chaque famille en quatre groupes. Une cubique peut rencontrer la droite de l'infini en:

a) trois points réels et distincts;

b) un point réel et deux points imaginaires:

c) un point simple et deux points coïncidents;

d) trois points coïncidents.

Les courbes algébriques planes du troisième ordre se trouvent ainsi distribuées en vingt grandes espèces. Par exemple, le folium de Descartes $[x^3 - 3axy + y^3 = 0]$ est une cubique [4°, *b*]; la cissoïde de Dioclès $[x(x^2 + y^2) = ay^2]$, une cubique [5°, *b*]; la courbe $xy(x + y) = a^2(x - y)$, une cubique [1°, *a*]; enfin la parabole semi-cubique $(my^2 = x^3)$ est une courbe [5°, *d*].

Chaque espèce se divise encore en plusieurs variétés ou sous-variétés. Mais les vingt espèces nous suffiront pour ce qui va suivre.

2. — Commençons par étudier le lieu géométrique des points dont les distances aux trois côtés d'un triangle équilatéral ont un produit constant.

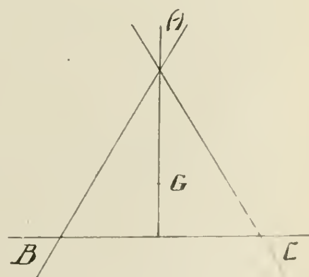


Fig. 1.

Nous prendrons ce triangle comme triangle fondamental, et nous emploierons les coordonnées trilinéaires absolues.

L'équation du lieu pourra s'écrire:

$$\alpha\beta\gamma = m^3.$$

La courbe est une cubique ne rencontrant aucun côté du triangle à distance finie.

Si la cubique passe par le point: $\alpha = a$, $\beta = b$, $\gamma = c$, elle passe également par le point: $\alpha = b$, $\beta = c$, $\gamma = a$, et par le point: $\alpha = c$, $\beta = a$, $\gamma = b$. On ne doit pas perdre de vue que l'on a:

$$\alpha + \beta + \gamma = h = \text{hauteur} .$$

Si donc on fait tourner la cubique d'un angle de 120° autour d'une droite passant par le centre de gravité du triangle fondamental, et perpendiculaire à son plan, la courbe viendra prendre une position d'apparence identique à sa position première. Nous dirons que la cubique possède un axe ternaire normal à son plan.

En cristallographie, on appelle axe d'ordre n, et l'on représente par Λ^n une droite qui jouit de la propriété suivante: quand on fait tourner une certaine figure autour de cette droite, de la n^e partie d'un tour, elle vient occuper une position nouvelle, complètement indiscernable de la position primitive. La figure est alors dite restituée.

Les trois hauteurs du triangle de référence sont des Λ^2, c'est-à-dire des axes de symétrie ordinaire. Si la courbe passe par le point (a, b, c), elle passe par le point (a, c, b). Une rotation de 180° autour d'une hauteur amène donc la restitution.

La courbe que nous étudions, admet alors quatre axes de symétrie: Λ^3, $3\Lambda^2$.

3. — Cette cubique ne peut avoir aucun point d'inflexion.

D'abord un pareil point ne peut se trouver en G.car l'axe ternaire exigerait la présence d'au moins trois tangentes inflexionnelles (trois ou bien un multiple de trois), ce qui ne peut pas être.

La courbe ne peut pas avoir d'inflexion, en dehors du point G, car les quatre axes entraîneraient deux ou cinq autres inflexions, suivant que la première appartiendrait ou non à l'une des hauteurs du triangle ABC. Toutes ces inflexions se trouveraient sur une même circonférence de centre G.

Mais une courbe algébrique plane du troisième ordre n'admet jamais plus de trois inflexions réelles, et, quand elle en admet trois, elles sont collinéaires. Or l'existence d'une droite d'inflexions n'est pas compatible avec la symétrie autour du Λ^3.

4. — La courbe n'a certainement pas de centre, car le centre d'une courbe d'ordre impair est toujours une inflexion.

Des raisonnements analogues prouvent que la cubique ne peut avoir de nœud ni de rebroussement. On se rappellera qu'une courbe non dégénérée du troisième ordre ne peut avoir qu'un seul point double.

5. — Des deux numéros qui précèdent, on peut conclure à la proposition suivante:

Théorème: *Quand une courbe algébrique plane du troisième ordre, non dégénérée, possède un axe de symétrie ternaire, normal à son plan, elle n'admet ni inflexion, ni centre, ni nœud, ni rebroussement.*

6. — D'après ce que nous avons rappelé plus haut (1), toute cubique rencontre la droite de l'infini en trois points dont, au moins, un réel. Ce point réel, à l'infini, est le sommet d'un faisceau de cordes parallèles, asymptotiques à la courbe. Il détermine donc une direction asymptotique.

La symétrie ternaire associe, à cette direction, deux autres directions asymptotiques. Toute cubique à Λ^3 appartient donc au groupe *a* (1).

La courbe ne rencontre aucune de ses trois asymptotes. Car, si elle en rencontrait une, elle devrait les rencontrer toutes les trois, en vertu de la symétrie ternaire. Mais on sait que les trois intersections d'une cubique avec ses asymptotes, sont collinéaires. La droite, qu'elles déterminent, s'appelle la *satellite* de la droite de l'infini. La symétrie exigerait que cette dernière eût trois satellites, ce qui est absurde. Donc:

7. — Théorème: *Quand une courbe algébrique plane du troisième ordre, non dégénérée, possède un axe de symétrie ternaire, normal à son plan, elle admet toujours trois asymptotes, et n'en rencontre aucune.*

8. — La cubique $\alpha\beta\gamma = m^3$, que nous avons définie plus haut (2), ne rencontre aucun côté du triangle fondamental, à distance finie. Par conséquent, elle les rencontre tous trois à distance infinie. Elle admet donc ces trois côtés comme asymptotes.

9. — Le triangle fondamental ABC (2) partage le plan en sept régions. L'une de ces régions est intérieure au triangle; trois autres sont adjacentes à des côtés; et trois autres opposées à des angles.

Si la constante m est négative, la courbe ne pénètre pas à l'intérieur du triangle; elle se compose de trois branches, situées dans les régions adjacentes aux côtés. Elle est donc unipartite [2°, a].

Si la constante m est positive, la courbe comprend toujours trois branches, situées dans les régions opposées aux angles. Mais il peut y avoir un ovale intérieur au triangle. Suivant les valeurs positives de m, la courbe sera donc unipartite ou bipartite.

Comme transition, nous aurons une courbe unicursale, nécessairement acnodale (4).

Nous nous proposons d'étudier séparément chacun de ces cas.

10. — Voyons d'abord comment la cubique rencontre les médianes du triangle de référence. Entre les trois coordonnées trilinéaires absolues d'un point quelconque, on a la relation fondamentale. :

$$\alpha + \beta + \gamma = h \ ;$$

h désigne une hauteur-médiane (2).

Nous devons résoudre les trois équations suivantes, considérées comme simultanées :

$$\alpha\beta\gamma = m^3 \ , \qquad \alpha + \beta + \gamma = h \ , \qquad \beta = \gamma \ .$$

En vertu de la troisième, les deux autres peuvent s'écrire :

$$\alpha\beta^2 = m^3 \ , \qquad \alpha + 2\beta = h \ .$$

L'avant-dernière montre que α et m ont toujours le même signe. Eliminons α ; il vient :

$$m^3 = \beta^2(h - 2\beta) = h\beta^2 - 2\beta^3 \ ;$$

si nous divisons par $m^3\beta^3$, nous obtiendrons :

$$\frac{1}{\beta^3} - \frac{h}{m^3}\frac{1}{\beta} + \frac{2}{m^3} = 0 \ .$$

Le discriminant de cette équation cubique est :

$$\delta = \frac{1}{m^6} - \frac{1}{27}\frac{h^3}{m^9} = \frac{1}{27m^9}(27m^3 - h^3) \ .$$

Il en résulte immédiatement le tableau suivant :

$m < 0$ cubique unipartite non singulière [2°, a] ;

$m = 0$ cubique dégénérée en trois droites ;

$0 < m < \frac{h}{3}$ cubique bipartite [1°, a] ;

$m = \frac{h}{3}$ cubique acnodale [3°, a] ;

$m > \frac{h}{3}$ cubique unipartite non singulière [2°, a].

11. — *Cubique acnodale.* Le point double isolé ne peut être que G, en vertu de la symétrie. La courbe est unicursale. Nous allons chercher son intersection mobile avec une droite variable passant par G. Nous devons résoudre les équations:

$$u\alpha + v\beta + w\gamma = \frac{h}{3}(u + v + w) , \quad \alpha + \beta + \gamma = h , \quad \alpha\beta\gamma = \frac{h^3}{27} .$$

Nous avons proposé ce système, sous le n° 9214, dans le *Journal de mathématiques élémentaires* (Paris, Vuibert, 15 juillet 1920). La nature géométrique du problème suggère la solution: des deux premières équations, on tire la valeur de β et de γ en fonction de α ; on substitue dans la troisième; on obtient une équation qui DOIT admettre la racine double: $\alpha = \frac{h}{3}$. On divise par:

$$(3\alpha - h)^2 = 9\alpha^2 - 6h\alpha + h^2 ,$$

et l'on conserve une équation linéaire, de résolution facile. On trouve ainsi:

$$\alpha = - \frac{h(v - w)^2}{3(u - v)(u - w)} ;$$

β et γ s'obtiennent par permutation tournante.

12. — *Cubique bipartite.* $0 < m < \frac{h}{3}$. Plus haut (10), nous avons cherché les points communs à la bissectrice $\beta = \gamma$ et à la courbe. Nous avons obtenu l'équation:

$$2\beta^3 - h\beta^2 + m^3 = 0 .$$

Puisque la cubique est bipartite, cette équation a ses trois racines réelles. On applique le théorème de Descartes, et l'on trouve une racine négative, et deux positives. La bissectrice envisagée rencontre donc la courbe en trois points réels et différents, deux à l'intérieur du triangle, le troisième dans la ré-

gion A (2). On a vu (10) que les trois valeurs de z ont le signe de m.

On fera le même raisonnement pour les deux autres bissectrices. Ainsi la cubique possède un ovale, intérieur au triangle asymptotique (8). Cet ovale est très différent d'une ellipse: il admet la symétrie du triangle équilatéral, Λ^3, $3\Lambda^2$.

La cubique bipartite a neuf sommets. Nous appellerons sommet tout point où la courbe est rencontrée par l'un de ses axes de symétrie.

13. — Nous proposons d'appeler *tricentre* le point où le plan d'une courbe est rencontré par un axe de symétrie ternaire.

Quand une courbe plane possède un tricentre, elle est représentable, en coordonnées trilinéaires absolues, par une équation symétrique. On doit prendre, comme figure de référence, un triangle équilatéral dont les médianes concourent au tricentre.

Nous croyons pouvoir affirmer que l'étude de la courbe sera beaucoup plus simple en coordonnées trilinéaires qu'en coordonnées cartésiennes. A propos de chaque problème particulier, la symétrie cristallographique d'une figure suggérera les coordonnées dont on doit se servir.

§ 2. — Symétrie du tétraèdre régulier.

14. — Soit ABCD un tétraèdre régulier. Ce polyèdre n'admet aucun centre. La perpendiculaire AH, abaissée d'un sommet sur la face opposée, est un axe ternaire, car, si l'on fait tourner le solide, autour de cette droite, d'un tiers de tour, il y a restitution (2). Par chaque sommet, passe un Λ^3; il y a donc $4\Lambda^3$.

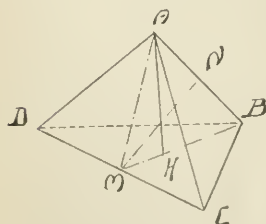


Fig. 2.

La droite MN, qui joint les milieux de deux arêtes opposées, est un axe de symétrie binaire. Donc $3\Lambda^2$.

Les sept axes de symétrie se coupent au centre de gravité du tétraèdre.

Le plan ABM, qui contient une arête et le milieu de l'arête opposée, est un plan de symétrie. Chaque arête détermine un pareil plan P. Donc 6 P.

15. — On appelle *symbole de symétrie* d'un polyèdre, un tableau comprenant l'indication de tous ses éléments de symétrie.

16. — Le symbole de symétrie du tétraèdre régulier est donc:

$$4A^3 , \quad 3A^2 , \quad 6P .$$

§ 3. — Forme générale de la surface. — Ombilics.

17. — Nous allons étudier le lieu géométrique des points dont les distances à trois plans fixes rectangulaires ont un produit constant. C'est une surface ayant pour équation:

$$xyz = p^3 .$$

Nous pouvons supposer $p > 0$, car, si p était < 0, on changerait le sens de l'un des axes.

La surface ne rencontre ni les axes ni les plans coordonnés, à distance finie. Elle ne pénètre dans aucun des trièdres suivants: $x'yz$, $xy'z$, xyz', $x'y'z'$, dans chacun desquels le produit des coordonnées est négatif.

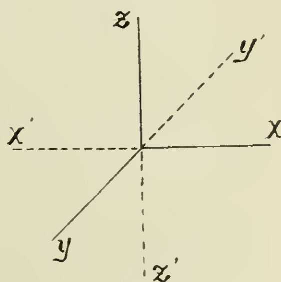


Fig. 3.

On peut immédiatement trouver quatre points de la surface: $(+p, +p, +p)$; $(+p, -p, -p)$; $(-p, +p, -p)$; $(-p, -p, +p)$. Ce sont les quatre points A, B, C, D, sommets d'un tétraèdre régulier, dont le centre de gravité se trouve à l'origine des coordonnées.

La surface $x y z = p^3$ se compose donc de quatre nappes indéfinies, asymptotes aux plans coordonnés.

Son équation ne change pas quand on remplace $x\, y\, z$ par $y\, x\, z$, $z\, y\, x$, $x\, z\, y$, $\overline{x}\, \overline{y}\, z$, $\overline{x}\, y\, \overline{z}$, etc. La surface admet six plans de symétrie, qui sont les mêmes que ceux du tétraèdre ABCD.

On démontre, en cristallographie, que l'intersection de n plans de symétrie est un A^n. Il en résulte que la surface, dont nous

nous occupons, possède exactement la même symétrie cristallographique qu'un tétraèdre régulier. Les axes ternaires ont pour équations :

$$x = \pm y = \pm z \ ;$$

les doubles signes sont indépendants.

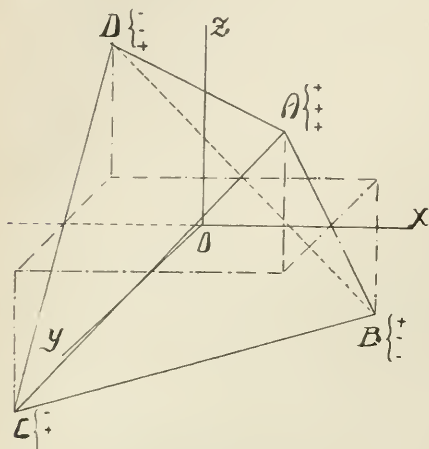


Fig. 4.

18. — Dans la suite, le tétraèdre ABCD va jouer un rôle important. On peut aisément trouver les équations de ses quatre faces :

BCD : $x + y + z = -p$;

CDA : $-x + y + z = p$;

DAB : $x - y + z = p$,

ABC : $x + y - z = p$.

19. — Sur une surface, considérons un point ordinaire, c'est-à-dire un point pour lequel le plan tangent est parfaitement déterminé. La perpendiculaire menée au plan tangent, par le point de contact, s'appelle normale.

Par cette normale faisons passer un plan quelconque ; il va déterminer, dans la surface, une « section plane normale » laquelle possède, au point considéré, une courbure bien déterminée.

Faisons tourner le plan sécant : la courbure variera d'une manière continue. Euler a démontré que la courbure restait comprise entre un maximum et un minimum, et que les sections normales, correspondant au maximum et au minimum, étaient perpendiculaires l'une sur l'autre. Ces deux sections sont dites principales.

Depuis Monge, on appelle « ombilic » un point autour duquel la courbure est la même dans toutes les directions.

Si, en un point d'une surface, le plan tangent n'est pas bien déterminé, ce point est dit singulier. Le sommet d'un cône quelconque est toujours un point singulier.

20. — Pour la surface que nous considérons, les points A, B, C, D sont des ombilics. Il est facile de s'assurer que les

plans tangents y ont pour équations respectives:

$$x + y + z = 3p\ ;$$
$$x - y - z = 3p\ ;$$
$$-x + y - z = 3p\ ;$$
$$-x - y + z = 3p\ .$$

Ces quatre points ne sont donc pas singuliers.

D'autre part, la présence d'un Λ^3 est incompatible avec l'existence de deux sections principales perpendiculaires entre elles. Ces points sont donc des ombilics.

Au polyèdre ABCD, nous donnerons le nom de tétraèdre ombilical.

21. — D'une manière plus générale, nous énoncerons la proposition suivante:

Théorème: *Quand une surface est rencontrée par un axe de symétrie d'ordre supérieur à deux, chaque point d'intersection est un point singulier, ou bien un ombilic.*

22. — Nous pouvons, d'ailleurs, chercher les ombilics par l'analyse. On démontre que les coordonnées d'un tel point vérifient les équations:

$$\frac{\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}}{1 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2} = \frac{\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}}{\dfrac{\partial z}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial z}{\partial y}} = \frac{\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}}{1 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2}.$$

Dans le cas actuel, nous avons:

$$xyz = p^3\ ;$$

$$z = \frac{p^3}{xy}\ ; \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{p^3}{x^2 y}\ ; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{p^3}{xy^2}\ ;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2p^3}{x^3 y}\ ; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{p^3}{x^2 y^2}\ ; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2p^3}{xy^3}\ .$$

Les équations aux coordonnées des ombilics deviennent alors:

$$\frac{\dfrac{2}{x^3 y}}{1 + \dfrac{p^6}{x^4 y^2}} = \frac{\dfrac{1}{x^2 y^2}}{\dfrac{p^6}{x^3 y^3}} = \frac{\dfrac{2}{xy^3}}{1 + \dfrac{p^6}{x^2 y^4}},$$

ou bien:

$$\frac{2xy}{x^4 y^2 + p^6} = \frac{xy}{p^6} = \frac{2xy}{x^2 y^4 + p^6}\ .$$

On peut en déduire:

$$x^4 y^2 = x^2 y^4 = p^6 \;, \qquad \text{(E)}$$

puis:

$$x^6 y^6 = p^{12} \;,$$

d'où:

$$xy = \pm p^2 \;,$$

et, par conséquent:

$$z = \pm p \;.$$

De la première équation (E), on tire encore:

$$x^2 = y^2 \;, \quad \text{c'est-à-dire :} \quad x = \pm y = \pm p \;, \qquad \text{c. q. f. d.}$$

23. — Pour mettre complètement en évidence la symétrie tétraédrique de la surface, nous allons rapporter cette dernière au tétraèdre ombilical (20) comme tétraèdre de référence.

D'un point quelconque de l'espace, nous abaisserons des perpendiculaires sur les quatre faces de ce tétraèdre; nous représenterons ces perpendiculaires par α, β, γ, δ; nous les prendrons pour coordonnées tétraédriques du point ; nous choisirons les signes de telle façon qu'un point, pris à l'intérieur du tétraèdre, ait ses quatre coordonnées positives.

Les équations des quatre faces sont connues (18) ; les distances d'un point quelconque de l'espace à ces faces, sont:

$$\alpha = (x + y + z + p) : \sqrt{3} \;,$$

$$\beta = (-x + y + z - p) : (-\sqrt{3}) \;,$$

$$\gamma = (x - y + z - p) : (-\sqrt{3}) \;,$$

$$\delta = (x + y - z - p) : (-\sqrt{3}) \;.$$

De ces quatre équations, l'on déduit:

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= \alpha\sqrt{3} - p \;, \\ -x + y + z &= -\beta\sqrt{3} + p \;, \\ x - y + z &= -\gamma\sqrt{3} + p \;, \\ x + y - z &= -\delta\sqrt{3} + p \;. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(F)}$$

De la somme des trois dernières équations (F) retranchons la première ; il vient:

$$(\alpha + \beta + \gamma + \delta)\sqrt{3} = 4p \;, \qquad \text{(G)}$$

ce qui prouve que les quatre coordonnées tétraédriques d'un même point ne sont pas indépendantes. Du reste, il est facile de montrer, *a priori*, que leur somme est égale à la hauteur du tétraèdre de référence. La hauteur de ce tétraèdre est donc:

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = \frac{4}{3} p \sqrt{3} \ .$$

Si, de la première équation (F), on retranche, successivement, chacune des trois autres, on obtient:

$$2x = (\alpha + \beta)\sqrt{3} - 2p \ ,$$

$$2y = (\alpha + \gamma)\sqrt{3} - 2p \ ,$$

$$2z = (\alpha + \delta)\sqrt{3} - 2p \ .$$

Si l'on tient compte de l'équation (G), on trouve:

$$\left.\begin{aligned} 4x &= (\alpha + \beta - \gamma - \delta)\sqrt{3} \ , \\ 4y &= (\alpha - \beta + \gamma - \delta)\sqrt{3} \ , \\ 4z &= (\alpha - \beta - \gamma + \delta)\sqrt{3} \ . \end{aligned}\right\} \qquad (\mathrm{H})$$

24. — Si le point (x, y, z) doit appartenir à la surface que nous étudions, ses coordonnées doivent vérifier l'équation : $xyz = p^3$. En multipliant les équations (H) membre à membre, on obtient:

$$\frac{64p^3}{\sqrt{27}} = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \delta^3 - \alpha\beta(\alpha + \beta) - \alpha\gamma(\alpha + \gamma)$$
$$- \alpha\delta(\alpha + \delta) - \beta\gamma(\beta + \gamma) - \beta\delta(\beta + \delta) - \gamma\delta(\gamma + \delta)$$
$$+ 2(\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta) \ .$$

Mais, d'après l'équation (G) du numéro précédent, on a:

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = \frac{4p}{\sqrt{3}} \ .$$

L'équation de la surface peut donc s'écrire:

$$\Sigma\alpha^3 + 3\Sigma\alpha^2\beta + 6\Sigma\alpha\beta\gamma = \Sigma\alpha^3 - \Sigma\alpha^2\beta + 2\Sigma\alpha\beta\gamma \ .$$

On en conclut:

$$4(\Sigma\alpha^2\beta + \Sigma\alpha\beta\gamma) = 0 \ ,$$

c'est-à-dire:

$$\alpha\beta(\alpha + \beta) + \alpha\gamma(\alpha + \gamma) + \alpha\delta(\alpha + \delta) + \beta\gamma(\beta + \gamma) + \beta\delta(\beta + \delta)$$
$$+ \gamma\delta(\gamma + \delta) + \alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta = 0 \ .$$

De cette dernière équation, il résulte:

1° que la surface admet la symétrie cristallographique du tétraèdre régulier;

2° qu'elle ne pénètre pas à l'intérieur du tétraèdre ombilical.

§ 4. — Sections planes.

25. — Tout plan, parallèle à l'un des plans coordonnés, coupe la surface suivant une hyperbole équilatère. En effet, les deux équations:

$$xyz = p^3 , \qquad z = c ,$$

entraînent:

$$xy = \frac{p^3}{c} .$$

26. — Tout plan passant par l'un des axes coordonnés, coupe la surface suivant une cubique cuspidale (1). Car les deux équations:

$$xyz = p^3 , \qquad y = tx ,$$

entraînent:

$$tx^2 z = p^3 ,$$

ou

$$x^2 z = a^3 .$$

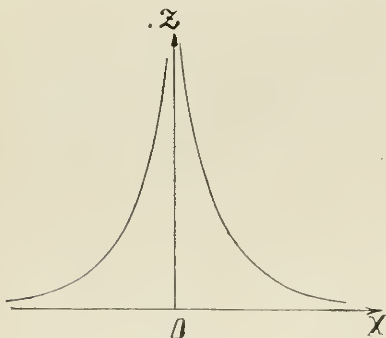


Fig. 5.

C'est une cubique [5°, c] dont le rebroussement se trouve à l'infini. Cette cubique est formée de deux branches, symétriques l'une de l'autre par rapport à l'axe des z. La constante a^3 a le même signe que t. La courbe rencontre les bissectrices des angles que font les axes coordonnés, aux points:

$$\pm x = z = a .$$

En ces points, les tangentes ont, pour coefficients angulaires:

$$\left[- \frac{2xz}{x^2} \right]_x = \mp 2 .$$

Ceci démontre que les branches, prises séparément, ne sont pas symétriques par rapport aux bissectrices.

27. — Pour étudier les sections faites par des plans perpendiculaires à un Λ^3, nous allons, tout d'abord, établir des formules de transformation des coordonnées, dont nous aurons souvent à faire usage.

Tout plan perpendiculaire à la droite $x = y = z$, coupe le trièdre coordonné trirectangle suivant un triangle équilatéral ABC, que nous prendrons comme triangle de référence.

Soient M un point quelconque du plan sécant ; x, y, z ses coordonnées rectilignes dans l'espace; α, β, γ ses coordonnées trilinéaires absolues dans le plan sécant.

La figure montre qu'on a:

$$z = \gamma \sin \theta \ ;$$

mais:

$$3 \cos^2 \theta = 1 \ ;$$

donc

$$\sin \theta = \sqrt{\frac{2}{3}} \ ;$$

et, par conséquent:

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma} = \sqrt{\frac{2}{3}} \ .$$

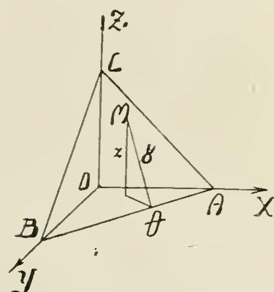


Fig. 6.

D'autre part:

$$\alpha + \beta + \gamma = (x + y + z)\sqrt{\frac{3}{2}} = \text{constante}$$

est l'équation du plan.

28. — Coupons donc la surface $xyz = p^3$ par le plan $x + y + z = l$; en coordonnées trilinéaires absolues, la section sera représentée par l'équation:

$$\alpha\beta\gamma = \left(p\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^3 = m^3 \ .$$

C'est donc la courbe que nous avons étudiée plus haut (2-12). Le triangle fondamental a pour hauteur:

$$\alpha + \beta + \gamma = l\sqrt{\frac{3}{2}} \ .$$

En faisant varier l de $-\infty$ à $+\infty$, on obtient toutes les cubiques indiquées dans le tableau de la fin du n° 10.

29. — Toutes les sections planes ont des symétries particulières, mais qui sont compatibles avec la symétrie tétraédrique de la surface. Il suffit qu'on tienne compte de la position particulière du plan sécant (25, 26, 28).

§ 5. — Propriétés du plan tangent.

30. — Nous allons établir quelques propriétés de la surface, dont on ne verra pas immédiatement les relations avec la symétrie.

Nous représenterons les coordonnées courantes d'un point de l'espace par X, Y, Z, et celles du point de contact par x, y, z. L'équation du plan tangent est :

$$(X - x)yz + (Y - y)zx + (Z - z)xy = 0 ,$$

ou

$$\frac{X}{x} + \frac{Y}{y} + \frac{Z}{z} = 3 .$$

Donc, les coordonnées à l'origine du plan tangent sont triples des coordonnées du point de contact. Soit ABC le triangle suivant lequel le plan tangent coupe le trièdre coordonné. Le point de contact est le centre de gravité du triangle ABC.

Tout plan tangent détermine, avec les plans coordonnés, un tétraèdre de volume constant :

$$V = \frac{9}{2}p^3 .$$

Tout ceci rappelle des propriétés de l'hyperbole algébrique plane du second ordre.

31. — Calculons la distance d'un plan tangent à l'origine. Cette distance est donnée par une formule bien connue de Géométrie analytique.

$$d = \frac{-3}{\pm\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}}} = \frac{3xyz}{\sqrt{y^2z^2 + z^2x^2 + x^2y^2}}$$

ou

$$d = \frac{3p^3}{\sqrt{y^2z^2 + z^2x^2 + x^2y^2}} . \qquad (1)$$

32. — Nous allons chercher l'intersection de la surface par un plan tangent. Un pareil plan coupe le trièdre coordonné suivant un triangle acutangle ABC, que nous prenons comme triangle de référence.

En représentant par θ', θ'', θ''', les angles que font les plans coordonnés avec le plan tangent, nous aurons:

$$Z = \gamma \sin \theta''' .$$

(Cf. nº 27). Mais, on a:

$$\cos \theta''' = \frac{\frac{1}{z}}{+\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}}} ;$$

donc:

$$\sin \theta''' = \frac{+\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}}}{+\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}}} = \frac{z\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{y^2z^2 + z^2x^2 + x^2y^2}} .$$

On a (30): OA $= 3\,x$; OB $= 3\,y$; OC $= 3\,z$. Appelons a, b, c les côtés du triangle ABC ; alors: $\sqrt{x^2+y^2} = \frac{c}{3}$, et

$$\sin \theta''' = \frac{z \cdot \frac{c}{3}}{\frac{3p^3}{d}} = \frac{cdz}{9p^3} ,$$

par conséquent:

$$Z = \frac{cdz\gamma}{9p^3} . \qquad (2)$$

Pour tout point de la section, nous aurons ainsi:

$$p^3 = \text{XYZ} = \frac{abc \cdot d^3 \cdot \alpha\beta\gamma}{729p^6} .$$

La cubique, suivant laquelle le plan tangent coupe la surface, a donc pour équation:

$$\alpha\beta\gamma = \frac{729p^9}{abc \cdot d^3} . \qquad (3)$$

D'autre part, on a:

$$\frac{1}{3} \times \text{triangle ABC} \times d = \frac{1}{6} \times \text{OA} \times \text{OB} \times \text{OC} ;$$

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = \frac{27p^3}{d} . \qquad (4)$$

Cherchons les coordonnées triangulaires du point de contact; dans la formule (2), supposons Z = z ; il en résulte:

$$\gamma = \frac{9p^3}{cd} ;$$

par analogie:

$$\alpha = \frac{9p^3}{ad} ; \qquad \beta = \frac{9p^3}{bd} . \qquad (5)$$

A titre d'abréviation, nous poserons:

$$m^2 = \frac{9p^3}{d} ; \qquad (6)$$

les équations (3, 4, 5) deviennent alors:

cubique : $$\alpha\beta\gamma = \frac{m^6}{abc} ; \qquad (7)$$

condition : $$a\alpha + b\beta + c\gamma = 3m^2 ; \qquad (8)$$

point de contact : $$\left.\begin{array}{l} \alpha = \frac{m^2}{a} ; \quad \beta = \frac{m^2}{b} ; \quad \gamma = \frac{m^2}{c} ; \\ a\alpha = b\beta = c\gamma = m^2 . \end{array}\right\} \qquad (9)$$

Les dernières équations prouvent que le point de contact est le centre de gravité du triangle ABC (30).

33. — On sait que tout plan, tangent à une surface, coupe cette surface suivant une courbe à point double. Dans le cas actuel, nous obtiendrons une cubique acnodale [3°, a], qui généralisera celle du n° 11. En opérant comme pour cette dernière, nous allons rechercher les coordonnées d'un point quelconque de la courbe. Une droite, passant par le point $\left(\frac{m^2}{a}, \frac{m^2}{b}, \frac{m^2}{c}\right)$, a pour équation:

$$u\alpha + v\beta + w\gamma = m^2\left(\frac{u}{a} + \frac{v}{b} + \frac{w}{c}\right) . \qquad (10).$$

En résolvant les équations (7, 8, 10), on trouve:

$$\alpha = -\frac{am^2(cv - bw)^2}{bc(av - bu)(aw - cu)} ;$$

puis β, γ par permutation tournante. Ces équations prouvent que la courbe envisagée est unicursale.

34. — Examinons enfin la section faite par un plan parallèle au plan tangent, c'est-à-dire par un plan quelconque. Cherchons si la cubique rencontre les médianes du triangle de référence. Nous aurons les équations:

cubique : $\alpha\beta\gamma = k^3$;

médiane : $b\beta = c\gamma$;

condition : $a\alpha + b\beta + c\gamma = 3m^2$.

On cherche d'abord une équation en α, en éliminant β et γ:

$$a^2\alpha^3 - 6am^2\alpha^2 + 9m^4\alpha - 4bck^3 = 0 .$$

D'après un théorème de Descartes, cette équation n'admet aucune racine négative, ou bien elle en admet une et une seule, suivant que la constante k est positive ou négative.

On cherche ensuite une équation en β, en éliminant α et γ:

$$\frac{1}{\beta^3} - \frac{3bm^2}{ack^3} \cdot \frac{1}{\beta} + \frac{2b^2}{ack^3} = 0 .$$

On forme le discriminant de cette équation, et l'on arrive aux conclusions suivantes:

$k^3 < 0$ cubique unipartite non singulière [2°, a] ;
$k^3 = 0$ cubique dégénérée en trois droites ;
$0 < k^3 < \frac{m^6}{abc}$ cubique bipartite [1°, a] ;
$k^3 = \frac{m^6}{abc}$ cubique acnodale [3°, a] ;
$k^3 > \frac{m^6}{abc}$ cubique unipartite non singulière [2°, a].

Cette discussion ressemble beaucoup à celle du n° 10. Elle reste la même, que le triangle de référence soit acutangle ou non (32).

De cette discussion, l'on peut déduire le théorème suivant:

Si l'on demande le lieu géométrique des points dont les distances aux trois côtés d'un triangle ont un produit constant, et si l'on détermine cette constante de manière que la cubique soit unicursale, elle sera toujours acnodale, et le centre de gravité du triangle sera le point double isolé.

§ 6. — Sections sphériques.

35. — Nous allons étudier rapidement la courbe d'intersection de la surface:

$$xyz = p^3 \qquad (1)$$

et de la sphère:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 . \qquad (2)$$

En éliminant z entre (1)) et (2), on trouve:

$$(x^2 + y^2 - a^2)x^2y^2 + p^6 = 0 . \qquad (3)$$

L'intersection complète des surfaces (1) et (2) est une courbe gauche algébrique du 6e ordre, composée de quatre parties, dont chacune entoure la projection d'un ombilic sur la sphère.

Cette courbe gauche possède encore la symétrie du tétraèdre régulier.

Elle se projette sur le plan des x, y suivant la sextique que représente l'équation (3). On a nécessairement:

$$x^2 + y^2 - a^2 < 0 .$$

Donc, la sextique, qui se compose évidemment de quatre ovales, est intérieure au cercle: $x^2 + y^2 = a^2$.

La courbe ne rencontre pas les axes.

36. — En résolvant l'équation (3), on obtient:

$$2xy^2 = x(a^2 - x^2) \pm \sqrt{x^6 - 2a^2x^4 + a^4x^2 - 4p^6} .$$

Examinons le cas où l'on aurait: $a = p\sqrt{3}$. La quantité subradicale deviendrait alors:

$$(x^2 - p^2)^2(x^2 - 4p^2) .$$

Or (35) x est moindre que a ; donc: $x^2 < 3p^2$. La sextique se réduit à quatre points isolés: ce sont les projections des ombilics sur le plan des x, y.

37. — L'équation polaire de la sextique est la suivante:

$$\rho^4 \sin^2\theta \cos^2\theta (a^2 - \rho^2) = p^6 , \qquad (4)$$

ou bien:

$$\sin^2 2\theta = \frac{4p^6}{\rho^4(a^2 - \rho^2)} .$$

38. — Le maximum et le minimum de θ correspondent au minimum de $\sin 2\theta$, donc au maximum de:

$$\rho^4(a^2 - \rho^2) = (\rho^2)^2 \times (a^2 - \rho^2) .$$

Les rayons vecteurs correspondants sont donnés par l'équation:

$$\frac{\rho^2}{2} = \frac{a^2 - \rho^2}{1} = \frac{a^2}{3} ;$$

donc:

$$\rho = a\sqrt{\frac{2}{3}} .$$

On trouve ensuite:

$$\sin^2 2\theta_m = \frac{4p^6}{\frac{4}{9}a^4 \times \frac{1}{3}a^2} = \frac{27p^6}{a^6} ,$$

d'où:

$$\sin 2\theta_m = \pm \frac{3p^3\sqrt{3}}{a^3} = \pm \left(\frac{p\sqrt{3}}{a}\right)^3 .$$

Cette valeur est toujours acceptable quand la sphère coupe la surface proposée, c'est-à-dire quand on a:

$$a \geqslant p\sqrt{3} .$$

Les valeurs de θ_m et les valeurs correspondantes de ρ pourront être construites à l'aide de la règle et du compas. On voit aisément qu'on obtient ainsi huit points de la sextique, et les tangentes en ces points. De l'origine, on peut donc mener huit tangentes à la courbe. Ce sont, d'ailleurs, quatre bitangentes.

39. — Recherchons le maximum et le minimum de ρ. Soit $F(\rho, \theta) = 0$ l'équation (4) du nº 37. On a:

$$\frac{\partial F}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial F}{\partial \theta} d\theta = 0 ;$$

Mais $d\rho = 0$, donc $\frac{\partial F}{\partial \theta} = 0$, c'est-à-dire:

$$\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin^2\theta \cos^2\theta) = 0 , \qquad \text{d'où} \qquad \theta = \frac{k\pi}{4} .$$

Comme la sextique ne rencontre pas les axes coordonnés (35),

on ne peut donner à k que des valeurs impaires. Il suffit d'examiner: $\theta = \frac{\pi}{4}$.

L'équation polaire de la sextique (37) donnera les valeurs correspondantes de ρ:

$$\rho^4(a^2 - \rho^2) = 4p^6 ,$$

ou bien:

$$\rho^6 - a^2\rho^4 + 4p^6 = 0 .$$

Cette équation, du troisième degré en ρ^2, admet toujours une racine négative, qui est à rejeter. Les deux autres sont positives quand on a: $a \geqq p\sqrt{3}$.

40. — La sextique admet $4 . C_4^2 = 24$ bitangentes.

De la discussion qui précède, ainsi d'ailleurs que de son équation cartésienne (35), il résulte qu'elle admet la symétrie du carré. Dans son plan, elle possède quatre axes de symétrie Λ^2 ; perpendiculairement à son plan, un Λ^4.

41. — On arriverait à la même sextique en étudiant la surface:

$$xyz = - p^3 .$$

Ce fait s'explique, de soi-même, si l'on se rappelle que la symétrie tétraédrique est une hémiédrie de la symétrie cubique.

42. — Nous allons chercher l'équation de la sextique gauche (35) en coordonnées sphériques trilinéaires absolues. Nous emploierons un système que nous a suggéré M. Louis Fouarge, chargé de cours à l'Université de Liége.

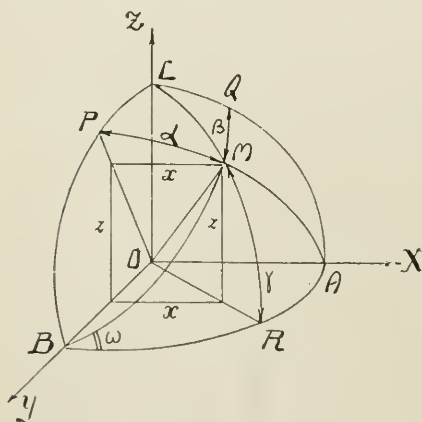


Fig. 7.

Une sphère, ayant son centre à l'origine, coupe le trièdre coordonné suivant un triangle trirectangle ABC, que nous prendrons comme figure de référence. D'un point quelconque M, nous abaisserons, sur les côtés du triangle fondamental, les perpendiculaires α, β, γ. Soit

OA = OB = OC = m le rayon de la sphère. On a encore OM = m. Les formules de transformation sont:

$$x = m \sin \alpha \ ; \qquad y = m \sin \beta \ ; \qquad z = m \sin \gamma \ .$$

De l'équation de la sphère: $x^2 + y^2 + z^2 = m^2$, on déduit:

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 1 \ . \qquad (1)$$

Un système de coordonnées sphériques n'est entièrement déterminé que si l'on connaît l'équation d'un grand cercle.

Dans le n° 1 de la 14e année (novembre 1911) du *Bulletin scientifique de l'Association des Elèves des Ecoles Spéciales*, (A.E.E.S., Université de Liége), MM. V. LEJEUNE et A. SCHLAG ont donné l'équation d'un grand cercle, en employant les coordonnées:

$$\rho = \mathrm{BM} \ ; \qquad \omega = \text{angle ABM} \ .$$

Cette équation peut s'écrire (*loc. cit.*, page 17):

$$\operatorname{tg} \rho = \frac{1}{\mathrm{V} \cos \omega + \mathrm{W} \sin \omega} \ . \qquad (2)$$

De la considération des triangles sphériques rectangles MRB, MPB, on tire:

$$\sin \gamma = \sin \rho \sin \omega \ , \qquad \sin \alpha = \sin \rho \cos \omega \ ;$$

l'équation (2) peut s'écrire:

$$\operatorname{tg} \rho = \frac{\sin \rho}{\mathrm{V} \sin \alpha + \mathrm{W} \sin \gamma} \ ,$$

ou:

$$\mathrm{V} \sin \alpha + \mathrm{W} \sin \gamma = \cos \rho \ ;$$

mais on a:

$$\rho = \frac{\pi}{2} - \beta \ ;$$

l'équation d'un grand cercle peut donc s'écrire:

$$a \sin \alpha + b \sin \beta + c \sin \gamma = 0 \ . \qquad (3)$$

On en conclurait aisément l'équation du grand cercle passant

par deux points donnés de la sphère, puis celle du grand cercle tangent à une courbe donnée en un point donné.

Si le point M doit appartenir à la surface tétraédrique que nous étudions, il faudra qu'on ait:

$$\sin \alpha \,.\, \sin \beta \,.\, \sin \gamma = \frac{p^3}{m^3} \,. \qquad (4)$$

En discutant les signes, on verra que l'équation (4) représente les quatre ovales et démontre la symétrie tétraédrique de leur ensemble.

§ 7. — Etude de la courbure.

43. — En géométrie infinitésimale, on démontre que la courbure totale, en un point ordinaire d'une surface, est l'inverse du produit des rayons de courbure principaux (19). Elle est susceptible de l'expression suivante:

$$k = \frac{\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}\right)^2}{\left\{ 1 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2 \right\}^2} \,.$$

44. — Appliquons cette formule à la surface:

$$xyz = p^3 \,.$$

Les dérivées partielles ont été données plus haut (22). On a, après un calcul facile:

$$k = \frac{3p^6 x^4 y^4 z^4}{p^{12} \left\{ y^2 z^2 + z^2 x^2 + x^2 y^2 \right\}^2} = \frac{3}{p^6 \left\{ \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} + \dfrac{1}{z^2} \right\}^2} \qquad (1)$$

$$= \frac{3p^6}{\left\{ y^2 z^2 + z^2 x^2 + x^2 y^2 \right\}^2} \,. \qquad (2)$$

Ces formules nous montrent que la courbure est constamment positive. Tous les points de la surface sont donc des points elliptiques.

45. — De la formule (1), on déduit que c'est aux ombilics que la courbure totale est maxima.

46. — Recherchons les lignes en tous les points desquelles

la surface a la même courbure totale. D'après la formule (1), on doit avoir:

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}=\frac{1}{c^2}\ .$$

Cette équation représente des surfaces algébriques du sixième ordre, à huit nappes, admettant les plans

$$x=\pm c\ ;\qquad y=\pm c\ ;\qquad z=\pm c\ ;$$

comme plans asymptotes. L'origine est un point quadruple isolé. Toute section faite dans l'une de ces surfaces par un plan parallèle à un plan coordonné, est une krenzcurve.

On obtient un résultat d'apparence plus simple en considérant l'équation (2). Une ligne de courbure totale constante est représentée par les équations:

$$y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2=a^4\ ,\qquad xyz=p^3\ .$$

On pourrait faire ici la même remarque qu'au n° 41.

47. — Au n° 31, nous avons trouvé la longueur de la perpendiculaire abaissée de l'origine sur le plan, tangent à la surface, au point (x, y, z):

$$d=\frac{3p^3}{\sqrt{y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2}}\ .$$

Il en résulte:

$$d^4=\frac{81p^{12}}{\left\{y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2\right\}^2}\ .$$

En comparant cette formule à la formule (2) du n° 44, on trouve:

$$k=\frac{d^4}{27p^6}\ .$$

Théorème: Si, en chaque point d'une ligne de courbure totale constante, on mène le plan tangent à la surface, tous ces plans enveloppent une sphère, dont le centre se trouve à l'origine.

Cette propriété est encore compatible avec la symétrie de la surface (41).

(*A suivre*.)

SUR LE RAYON DE COURBURE D'UNE COURBE

PAR

B. Niewenglowski (Paris).

---

1. — Le rayon de courbure d'une conique en un point M est donné par la formule

$$R = \frac{N^3}{p^2}, \tag{1}$$

p désignant le paramètre de la courbe et N la longueur du segment MN de la normale en M, N étant sa trace sur un axe de symétrie de la conique.

Plus généralement, s'il s'agit d'une courbe plane quelconque, en gardant les mêmes notations, on a

$$N^2 = y^2(1 + y'^2),$$

d'où il suit que

$$(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{N^3}{y^3},$$

et par conséquent

$$R = \frac{N^3}{|y^3 y''|}. \tag{2}$$

La formule (1) se déduit d'ailleurs très simplement de (2) si l'on prend pour axe des x un axe de symétrie de la conique considérée, l'origine étant l'un des sommets situés sur cet axe. En effet, l'équation de la conique étant alors

$$y^2 = 2px + qx^2,$$

on a successivement

$$yy' = p + qx, \qquad y'^2 + yy'' = q, \qquad y^2y'^2 + y^3y'' = qy^2,$$

$$y^3y'' = q(2px + qx^2) - (p + qx)^2 = -p^2,$$

$$|y^3y''| = p^2.$$

2. — *Remarque I.* L'équation (1) caractérise les coniques. En effet, si cette équation est vérifiée on a

$$y^3 y'' = a \,,$$

a désignant une constante. On en tire successivement

$$y' dy' = a \frac{dy}{y^3} \,, \qquad y'^2 = b - \frac{a}{y^2}$$

b étant une nouvelle constante, et ensuite

$$dx = \frac{y\,dy}{\sqrt{by^2 - a}}$$

et enfin

$$(x + c)^2 = by^2 - a$$

c étant encore une constante.

3. — *Remarque II.* Le cas de l'hyperbole équilatère mérite d'être signalé. En prenant pour axes de coordonnées les axes de symétrie, l'équation peut s'écrire

$$x^2 - y^2 = a^2$$

ce qui donne $yy' = x$; alors $N^2 = y^2 + x^2 = r^2$, r désignant la distance du point $M(x, y)$ au centre et dans ce cas: $R = \frac{r^3}{a^2}$.

4. — *Cas où l'on prend pour variable indépendante l'arc* s *de la courbe plane que l'on étudie.* Dans ce cas la relation entre le rayon de courbure R et la normale N prend un autre aspect.

Les axes de coordonnées étant toujours supposés rectangulaires, si α désigne l'angle de la tangente en $M(x, y)$ avec l'axe $x'x$, on sait que

$$x' = \cos \alpha \,, \qquad y' = \sin \alpha \,,$$

d'où

$$x'' = -\sin \alpha . \alpha' \,, \qquad y'' = \cos \alpha . \alpha' \,, \qquad \text{et} \qquad \alpha' = \frac{1}{R} \,,$$

les dérivées x', y', α', x'', y'' étant prises par rapport à s.

On en déduit

$$R = \frac{x'}{y''} = -\frac{y'}{x''} \,. \qquad (3)$$

D'autre part

$$N = \frac{y}{\cos\alpha} = \frac{y}{x'}, \qquad \text{donc} \qquad R = \frac{1}{y''N}$$

au signe près; ou plus correctement

$$R = \left|\frac{y}{y''}\right| \times \frac{1}{N}. \tag{4}$$

Pareillement si N′ désigne la longueur de la normale comptée jusqu'à l'axe du y, on trouvera

$$R = \left|\frac{x}{x''}\right| \times \frac{1}{N'}. \tag{4'}$$

5. — Applications. *Courbes telles que* R = ± N.

1° Posons, en premier lieu

$$\frac{x'}{y''} = \frac{y}{x'}, \qquad \text{ou} \qquad x'^2 = yy''.$$

Mais puisque s est la variable indépendante, on sait que

$$x'^2 + y'^2 = 1$$

donc

$$yy'' + y'^2 = 1\ ;$$

une première intégration donne

$$yy' = s + h,$$

h étant une constante. En changeant l'origine des arcs par la courbe, on peut supprimer h et écrire

$$yy' = s$$

d'où l'on tire

$$y^2 = s^2 + a^2$$

a désignant la valeur de y pour $s = o$.

On en tire

$$y' = \frac{s}{\sqrt{s^2 + a^2}}, \qquad \text{et par suite} \qquad \frac{x'}{a} = \frac{1}{\sqrt{s^2 + a^2}},$$

ce qui donne, en supposant $x = o$ pour $s = o$ (ce qui est permis car une translation parallèle à $x'x$ ne change ni R ni N):

$$\sqrt{s^2 + a^2} + s = ae^{\frac{x}{a}}, \qquad \sqrt{s^2 + a^2} - s = ae^{-\frac{x}{a}}.$$

On en tire

$$s = a \operatorname{Sh} \frac{x}{a}$$

et par conséquent

$$y = a \operatorname{Ch} \frac{x}{a} .$$

La courbe est une chaînette.

2° Posons maintenant

$$\frac{y'}{x''} = \frac{y}{x'} , \qquad \text{ce qui peut s'écrire} \qquad \frac{x''}{x'} = \frac{y'}{y}$$

d'où

$$x' = \frac{y}{a} ,$$

a désignant une constante arbitraire on a ainsi

$$1 - y'^2 = \frac{y^2}{a^2} .$$

Mais si l'on pose $x' = \sin t$, $y' = \cos t$ on en tire: $y = a \sin t$ donc

$$y' = a \cos t \frac{dt}{ds} \qquad \text{et par suite} \qquad \frac{ds}{dt} = a$$

en prenant convenablement l'origine des arcs on peut donc poser $t = \frac{s}{a}$ et l'on a

$$y = a \sin \frac{s}{a}$$

$$x' = \sin \frac{s}{a} , \qquad \text{donc} \qquad x = - a \cos \frac{s}{a} + x_0 ,$$

et enfin

$$(x - x_0)^2 + y^2 = a^2 ,$$

solution évidente a priori.

6. — *Courbes telles que* R $= \pm$ 2N.

1° Posons tout d'abord

$$\frac{y'}{x''} = 2 \frac{y}{x'} , \qquad \text{ou} \qquad 2 \frac{x''}{x'} = \frac{y'}{y}$$

on en tire

$$x'^2 = 1 - y'^2 = \frac{y}{a} ,$$

a étant une constante arbitraire.

La dernière équation pouvant s'écrire ainsi:

$$\frac{y}{a} + y'^2 = 1$$

posons

$$\frac{y}{a} = \sin^2 \frac{1}{2} t \qquad \text{d'où} \qquad y' = \cos \frac{1}{2} t \ .$$

On en déduit

$$dy = a \sin \frac{1}{2} t \cos \frac{1}{2} t . dt \ .$$

Mais

$$dy = y' ds = \cos \frac{1}{2} t . ds$$

ce qui entraîne cette conséquence:

$$ds = a \sin \frac{1}{2} t . dt \ .$$

Mais

$$x'^2 = 1 - y'^2 = \sin^2 \frac{1}{2} t \ .$$

On peut prendre

$$x' = \frac{dx}{ds} = \sin \frac{1}{2} t \ ,$$

donc

$$dx = \sin \frac{1}{2} t \, ds = a \sin^2 \frac{1}{2} t . dt \ .$$

En intégrant on obtient

$$x = \frac{a}{2} (t - \sin t) + x_0$$

et l'on a déjà

$$y = \frac{a}{2} (1 - \cos t) \ .$$

La courbe cherchée est donc une cycloïde.

2° Soit maintenant

$$\frac{y'}{x''} = -2 \frac{y}{x'} \ , \qquad \text{ou} \qquad 2 \frac{x''}{x'} + \frac{y'}{y} = 0 \ .$$

On a ainsi

$$x'^2 = \frac{a}{y}$$

a désignant une constante arbitraire.

On a donc

$$1 - y'^2 = \frac{a}{y} .$$

En posant $x' = \cos\varphi$, $y' = \sin\varphi$ on en déduit

$$y = \frac{a}{\cos^2\varphi} . \tag{5}$$

$$dy = \frac{2a \sin\varphi}{\cos^3\varphi} d\varphi = \sin\varphi \, ds$$

donc

$$ds = \frac{2a d\varphi}{\cos^3\varphi} \quad \text{et} \quad dx = \frac{2a d\varphi}{\cos^2\varphi} ,$$

donc enfin

$$x = 2a \operatorname{tg}\varphi + x_0 . \tag{6}$$

En éliminant φ entre les équations (5) et (6), on trouve

$$y = a + \frac{(x - x_0)^2}{4a}$$

équation d'une parabole.

7. — Extension a l'Espace. Nous commencerons par la formule (4). Nous prendrons trois axes rectangulaires et nous appellerons N la longueur MN comprise entre le point M et le point N où la *normale principale* relative à M perce le plan *xoy*.

Les équations de la normale principale étant

$$\frac{X - x}{s'x'' - x's''} = \frac{Y - y}{s'y'' - y's''} = \frac{Z - z}{s'z'' - z's''} .$$

On en déduit aisément

$$N^2 = \frac{z^2}{(s'z'' - z's'')^2}\left[(s'x'' - x's'')^2 + (s'y'' - y's'')^2 + (s'z'' - z's'')^2\right] .$$

Mais le crochet a pour valeur

$$s'^2[x''^2 + y''^2 + z''^2 - s''^2] , \quad \text{donc} \quad N^2 = \frac{z^2 s'^2[x''^2 + y''^2 + z''^2 - s''^2]}{(s'z'' - z's'')^2} .$$

D'autre part

$$R^2 = \frac{s'^4}{x''^2 + y''^2 + z''^2 - s''^2} .$$

On en conclut que

$$R = \left|\frac{zs'^3}{(s'z'' - z's'') N}\right| . \tag{7}$$

La variable indépendante est arbitraire — choisissons l'axe s pour paramètre — il vient, puisqu'alors $s' = 1$, $s'' = 0$:

$$R = \left|\frac{z}{z''N}\right| . \tag{8}$$

Pour obtenir une relation analogue à la formule (2), on peut procéder de la manière suivante:

La normale principale peut être définie comme étant l'intersection du plan osculateur et du plan normal relatifs au point M. Les dérivées étant prises par rapport à un paramètre arbitraire t, si l'on pose

$$A = y'z'' - z'y'' \qquad B = z'x'' - x'z'' \qquad C = x'y'' - y'x'' ,$$

on reconnaît que les équations de la normale principale peuvent s'écrire ainsi:

$$\frac{X - x}{Bz' - Cy'} = \frac{Y - y}{Cx' - Az'} = \frac{Z - z}{Ay' - Bx'} .$$

et par suite:

$$N^2 = \frac{z^2}{(Ay' - Bx')^2}\left[(Bz' - Cy')^2 + (Cx' - Az')^2 + (Ay' - Bx')^2\right] .$$

Mais

$$(A^2 + B^2 + C^2)(x'^2 + y'^2 + z'^2) = (Ax' + By' + Cz')^2 + (Bz' - Cy')^2 + (Cx' - Ax')^2 + (Ay' - Bx')^2 ,$$

et si l'on remarque que

$$Ax' + By' + Cz' = 0 \qquad \text{et} \qquad x'^2 + y'^2 + z'^2 = s'^2 ,$$

on voit que

$$N^2 = \frac{z^2 s'^2 (A^2 + B^2 + C^2)}{(Ay' - Bx')^2} .$$

D'autre part

$$R = \frac{s'^3}{(A^2 + B^2 + C^2)^{\frac{1}{2}}} ,$$

donc

$$R = \left|\frac{(Ay' - Bx')^3}{z^3}\right| \frac{N^3}{(A^2 + B^2 + C^2)^2} . \tag{9}$$

Remarque. — Si dans la formule (9) on suppose $y \equiv o$, ce qui revient à dire que la courbe est plane et tracée dans le plan des yz, on a dans ce cas $y' = 0$, $y'' = 0$, par suite $A = 0$ $C = 0$ et la formule se réduit à

$$R = \left| \frac{x'^3}{z^3(z'x'' - x'z'')} \right| N^3 ,$$

formule qui coïncide avec la formule (2) si $x' = 1$, $x'' = 0$ z remplaçant y.

Pareillement si l'on suppose la courbe plane et tracée dans le plan des x, y la formule (7) donnera

$$R = \left| \frac{ys'^3}{s'y'' - y's''} \right| \times \frac{1}{N} .$$

qui coïncide avec la formule (4) quand $s' = 1$, $s'' = 0$.

Application. On peut mettre les équations d'une hélice circulaire dont l'axe est pris pour axe des x, sous la forme

$$y = a \cos \frac{s}{b} , \qquad z = a \sin \frac{s}{b} , \qquad x = \frac{hs}{2\pi b} .$$

où $b = \sqrt{a^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}}$, a étant le rayon de la section droite du cylindre sur lequel l'hélice est tracée et h le pas de cette hélice. On trouve alors $N = a$, et puisque $\frac{z}{z''} = - b^2$

$$R = \frac{b^2}{a} = a + \frac{h^2}{4\pi^2 a} .$$

SUR LES SÉRIES ENTIÈRES, DONT LA SOMME EST UNE FONCTION ALGÉBRIQUE

PAR

G. Pólya (Zurich).

---

1. — Outre la formule du binôme on connaît depuis l'époque d'Euler plusieurs exemples de séries simples, dont la somme est une fonction algébrique, par exemple, la série de Lambert, servant à la résolution des équations trinômes. Ces divers résultats sont, croyons-nous, contenus comme cas particuliers dans le théorème général suivant :

Soient $\varphi(z)$ et $\Phi(z)$ deux fonctions algébriques régulières autour du point $z = 0$. Posons

$$\begin{aligned}
\Phi(z) &= A_{00} + A_{01} z + A_{02} z^2 + A_{03} z^3 + \dots \\
\Phi(z)\varphi(z) &= A_{10} + A_{11} z + A_{12} z^2 + A_{13} z^3 + \dots \\
\Phi(z)\varphi(z)^2 &= A_{20} + A_{21} z + A_{22} z^2 + A_{23} z^3 + \dots \\
\Phi(z)\varphi(z)^3 &= A_{30} + A_{31} z + A_{32} z^2 + A_{33} z^3 + \dots \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

et disposons les termes de ce tableau *régulièrement*, c'est-à-dire de la manière suivante : après avoir choisi un axe des x dirigé de haut en bas et un axe des y dirigé de gauche à droite, convenons d'écrire le terme $A_{kl} z^l$ au point $x = k$, $y = l$. Traçons dans ce tableau une droite quelconque non parallèle à l'axe des x ; *l'ensemble des termes disposés le long de cette droite forme une série entière dont le rayon de convergence est différent de zéro et dont la somme est une fonction algébrique.*

Dans cet énoncé, les fonctions rationnelles sont considérées

comme des fonctions algébriques particulières. S'il n'y a qu'un nombre fini de termes le long de la droite en question, l'ensemble de ces termes forme une fonction rationnelle entière; dans ce cas-là, le théorème est trivial. Si la droite est horizontale, parallèle à l'axe des y, le théorème est encore évident, le produit de deux fonctions algébriques étant algébrique. Si la droite est verticale, la série obtenue peut être divergente (c'est pour cela que ce cas a été écarté dans l'énoncé) mais si elle converge, elle représente une fonction rationnelle particulièrement simple.

Il y a encore un cas où le théorème est évident. En posant

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots, \qquad \omega = e^{\frac{2\pi i}{k}};$$

on a

$$a_l z^l + a_{l+k} z^{l+k} + a_{l+2k} z^{l+2k} + \dots$$
$$= \frac{f(z) + \omega^{-l} f(\omega z) + \omega^{-2l} f(\omega^2 z) + \dots + \omega^{-(k-1)l} f(\omega^{k-1} z)}{k}$$

et cette dernière fonction est algébrique si $f(z)$ l'est. Voilà à quoi se réduit essentiellement le théorème, si $\varphi(z) = az^m$, a étant une constante, m un nombre entier, $m \geq 0$.

Le tableau le plus simple du genre considéré est le *triangle de Pascal*, que j'écris comme suit:

$$\begin{array}{l} 1 \\ 1 + z \\ 1 + \mathbf{2z} + z^2 \\ 1 + 3z + 3z^2 + z^3 \\ 1 + 4z + \mathbf{6z^2} + 4z^3 + z^4 \\ \dots\dots\dots\dots \end{array}$$

(On a dans ce cas-là $\Phi(z) = 1$, $\varphi(z) = 1 + z$.) Les droites parallèles à la bissectrice des deux axes rectangulaires contiennent des séries entières dont la somme est rationnelle, $= (1 - z)^{-1}$ $(1 - z)^{-2}$, $(1 - z)^{-3}$, ... La droite passant par les trois termes en caractères gras engendre la série

$$1 + 2z + 6z^2 + \dots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1.3.5 \dots 2n-1}{2.4.6 \dots 2n} 2^{2n} z^n = \frac{1}{\sqrt{1-4z}}.$$

2. — Les points du plan, dont les coordonnées rectangulaires sont des nombres entiers non négatifs, forment un réseau. Nous avons à nous occuper des droites qui passent par une infinité des points de ce réseau, sans être parallèles à un des deux axes. Ces droites ont une équation de la forme

$$ay - bx = q \tag{1}$$

où a, b, q sont des entiers, $a > 0$, $b > 0$. Le plus grand commun diviseur de a et de b doit diviser q ; il peut être supposé, sans restriction, égal à l'unité. Toutes les solutions de (1) en nombres entiers non négatifs peuvent être représentées par une formule

$$x = c + an \ , \qquad y = d + bn \ , \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots).$$

$n = 0$ donne la « plus petite » solution de ce genre, $x = c$, $y = d$. Il s'agit donc de la somme de la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_{c+an,\, d+bn}\, z^{d+bn} = F(z) \ . \tag{2}$$

On a

$$A_{c+an,\, d+bn} = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\Phi(u)\,\varphi(u)^{c+an}}{u^{d+bn}} \cdot \frac{du}{u} \ . \tag{3}$$

L'intégration est étendue le long d'un contour circulaire $|u| = r$, r étant choisi de manière que l'aire $|u| \leq r$ ne contienne aucun point singulier des branches considérées des fonctions algébriques $\varphi(u)$ et $\Phi(u)$. (Plus tard r sera assujetti à une nouvelle condition.) Soit sur la circonférence $|z| = r$

$$|\varphi(u)| \leqq k \ , \qquad |\Phi(u)| \leqq K \ .$$

On a alors d'après (3)

$$|A_{c+an,\, d+bn}| < K \,.\, k^{c+an} \,.\, r^{-d-bn} \ .$$

ce qui montre que la série (2) converge sûrement dans le cercle $|z| < rk^{-\frac{a}{b}}$.

On a d'après (2) (3)

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\Phi(u)\,\varphi(u)^c z^d}{u^d} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\varphi(u)^a z^b}{u^b}\right)^n \cdot \frac{du}{u}$$

la série géométrique étant convergente pour $|z|$ assez petit, d'où l'on tire

$$F(z) = \frac{z^d}{2\pi i} \int \frac{u^{b-d-1} \varphi(u)^c \Phi(u)\, du}{u^b - z^b \varphi(u)^a} . \qquad (4)$$

Considérons les racines multiples u qu'on obtient en égalant à zéro le dénominateur de la fraction à intégrer. Elles satisfont aux deux équations simultanées

$$u^b - z^b \varphi(u)^a = 0 , \qquad b u^{b-1} - a z^b \varphi(u)^{a-1} \varphi'(u) = 0$$

d'où résulte

$$a u \varphi'(u) - b \varphi(u) = 0 . \qquad (5)$$

Si cette dernière équation est identique, on aura $\varphi(u)^a = Cu^b$, où C est une constante. Je laisse de côté ce cas qui peut être traité directement, comme je viens de le faire remarquer.

L'équation (5) a un nombre fini de racines.

On peut choisir le chemin des intégrations (3) et (4) c'est-à-dire le contour circulaire $|u| = r$ de manière qu'il ne contienne qu'une racine ou qu'il n'en contienne aucune, suivant que le point $u = 0$ est ou n'est pas racine de (5). Le rayon r étant choisi définitivement, je prends z assez petit en valeur absolue pour qu'on ait sur le contour $|u| = r$

$$|u|^b > |z|^a |\varphi(u)|^b .$$

D'après le théorème de Rouché, l'intérieur du contour $|u| = r$ contient exactement b racines de l'équation $u^b - z^b \varphi(u)^a = 0$; $u = 0$ peut être une racine multiple, mais les autres racines

$$u_1 , u_2 , u_3 , \ldots u_\beta$$

contenues à l'intérieur du contour $|u| = r$ sont sûrement simples d'après le choix de r. On a $\beta \leq b$.

L'intégrale (4) étant égale à la somme des résidus relatifs aux pôles à l'intérieur de la circonférence $|u| = r$ on obtient d'après la discussion précédente

$$F(z) = R(z) + \sum_{\nu=1}^{\beta} \frac{z^d u_\nu^{b-d-1} \varphi(u_\nu)^c \Phi(u_\nu)}{b u_\nu^{b-1} - a z^b \varphi(u_\nu)^{b-1} \varphi'(u_\nu)} . \qquad (6)$$

$R(z)$ est le résidu correspondant au point $u = 0$.

$R(z)$ est une fonction rationnelle, qui peut se réduire à 0. On sait que les fonctions algébriques d'une fonction algébrique sont algébriques, ainsi que la dérivée d'une fonction algébrique ; donc $u_1, u_2, \dots u_\beta$ sont algébriques, chaque terme de la somme dans l'équation (6) est algébrique et $F(z)$ est aussi algébrique, *c. q. f. d.*

3. — Comme premier exemple, posons $\Phi(z) = 1$, $\varphi(z) = 1 + z + z^2$ et considérons avec Euler [1] le tableau

$$\begin{array}{l} \mathbf{1} \\ 1 + \mathbf{z} + z^2 \\ 1 + 2z + \mathbf{3z^2} + 2z^3 + z^4 \\ \cdots\cdots\cdots \end{array}$$

On trouve la somme de la série qui commence par les termes en caractères gras d'après la méthode exposée.

$$1 + z + 3z^2 + 7z^3 + 19z^4 + \dots = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{du}{u - z(1 + u + u^2)} = \frac{1}{1 - z(1 + 2u_1)}$$

u_1 désignant la racine de l'équation $u - z(1 + u + u^2) = 0$ qui se réduit à zéro pour $z = 0$. On a donc

$$u_1 = \frac{1 - z - \sqrt{1 - 2z - 3z^2}}{2z},$$

$$1 + z + 3z^2 + 7z^3 + 19z^4 + \dots = \frac{1}{\sqrt{1 - 2z - 3z^2}},$$

résultat dû à Euler, *loc. cit.* [1].

Je considère un second exemple. Je désigne par

α, β deux nombres rationnels, par

a, b deux nombres entiers non négatifs.

Je pose $\Phi(z) = (1 + z)^\alpha$, $\varphi(z) = (1 + z)^\beta$ et je considère la droite $y = a + bx$. J'obtiens la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha + \beta n}{a + bn} z^{a+bn}$$

[1] L. Euler. *Opuscula analytica*, Tomus I (Petropoli, 1783), p. 48-62.

dont la somme est une fonction algébrique de z ainsi que la somme de la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha + \beta n}{a + bn} z^n .$$

D'après une remarque faite auparavant, l'évaluation de cette dernière série se ramène facilement à l'évaluation de celle-ci: [1]

$$\sum_{=0}^{\infty} \binom{\alpha + \beta n}{n} z^n = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{(1+u)^\alpha du}{u - z(1+u)^\beta} = \frac{v_1^\alpha}{1 - \beta z v_1^{\beta - 1}} ; \qquad (7)$$

où l'on désigne par v_1 la racine de l'équation trinôme

$$zv^\beta - v + 1 = 0 \qquad (8)$$

qui se réduit à l'unité pour $z = 0$ $(1 + u = v)$. La formule (7) contient un grand nombre de cas particuliers intéressants. La série (7) reste inchangée si l'on change simultanément

$$\alpha \text{ en } -1-\alpha , \qquad \beta \text{ en } 1-\beta , \qquad z \text{ en } -z ;$$

elle se réduit à la formule du binôme pour $\beta = 0$ et $\beta = 1$; elle a une somme très simple, si $\beta = 2$ ou $\beta = 1 - 2 = -1$. On obtient d'après (7) en résolvant l'équation trinôme (8) qui devient quadratique pour $\beta = 2$

$$1 + \binom{\alpha+2}{1} z + \binom{\alpha+4}{2} z^2 + \binom{\alpha+6}{3} z^3 + \dots$$
$$= \left(\frac{1 - \sqrt{1-4z}}{2z}\right)^\alpha \frac{1}{\sqrt{1-4z}} . \qquad (9)$$

Cette formule était aussi connue d'EULER [2] qui donne à la

[1] M. HURWITZ, dans ses exercices, a posé le problème suivant : en admettant que β est rationnel, démontrer que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\beta n}{n} z^n$$

représente une fonction algébrique. C'est ce problème qui, conjointement avec le problème d'EULER précité, m'a suggéré le théorème général que je viens de démontrer.

[2] L. EULER. *Opera postuma*, Tom. I (Petropoli, 1862), p. 299-314.

somme la forme équivalente

$$\left(\frac{2}{1+\sqrt{1-4z}}\right)^{-\alpha} \frac{1}{\sqrt{1-4z}} .$$

On a d'après (7)

$$\frac{v_1}{1-\beta z v_1^{\beta-1}} = \sum_0^\infty \binom{1+\beta n}{n} z^n = 1 + \sum_{n=1}^\infty \frac{1+\beta n}{n} \binom{\beta n}{n-1} z^n ,$$

$$\frac{\beta z v_1^{\beta}}{1-\beta z v_1^{\beta-1}} = \beta z \sum_0^\infty \binom{\beta+\beta n}{n} z^n = \sum_{n=1}^\infty \beta \binom{\beta n}{n-1} z^n .$$

On obtient par soustraction

$$v_1 = 1 + \sum_{n=1}^\infty \binom{\beta n}{n-1} \frac{z^n}{n} ,$$

ce qui est la série bien connue de Lambert[1] écrite sous une forme simplifiée; elle donne la solution de l'équation trinôme (8) qui se réduit à 1 pour $z = 0$.

En mettant $w = v^\alpha$ on obtient par un calcul analogue la solution w_1 de l'équation trinôme plus générale

$$z w^{\frac{\beta}{\alpha}} - w^{\frac{1}{\alpha}} + 1 = 0$$

$$w_1 = 1 + \alpha \sum_{n=1}^\infty \frac{z^n}{n} \binom{\alpha+\beta n-1}{n-1}$$

w_1 se réduisant à l'unité pour $z = 0$. D'autre part, en changeant simultanément dans les formules (7) et (8)

$$v \quad \text{en} \quad 1 + \frac{v}{\beta} , \qquad z \quad \text{en} \quad \frac{z}{\beta}$$

on obtient pour $\beta = \infty$ les séries simples

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{n^n z^n}{n!} = \frac{1}{1-v_1} , \qquad \sum_{n=1}^\infty \frac{n^{n-1} z^n}{n!} = v_1 .$$

---

[1] Voir p. ex. *Encyklopadie d. mathem. Wiss.*, II, B. 1 (Osgood). p. 44.

v_1 désignant la solution de l'équation transcendente

$$ze^v - v = 0$$

qui se réduit à 0 pour $z = 0$ et à 1 pour $z = e^{-1}$.

4. — J'expose deux problèmes caractéristiques, où les calculs précédents peuvent être utilisés.

En jetant $2n$ dés à la fois, on peut obtenir différentes sommes de points de $2n$ à $12n$. Le cas le plus probable est celui de $7n$ points. Désignons par A_n le nombre des combinaisons où se produit cet événement, de manière que $A_n 6^{-2n}$ soit la probabilité d'amener $7n$ points avec $2n$ dés. Je considère la série

$$1 + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \dots \qquad (10)$$

Comme on sait A_n est le coefficient de u^{7n} dans le développement de la puissance $(u + u^2 + u^3 + u^4 + u^5 + u^6)^{2n}$.

On a donc

$$\sum_{n=0}^{\infty} A^n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2\pi i} \int \frac{(u + u^2 + \dots + u^6)^{2n}}{u^{7n}} \cdot \frac{du}{u}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int \frac{u^4 du}{u^5 - z(1 + u + \dots + u^5)^2}$$

d'où l'on conclut par le raisonnement précédent que la série envisagée (10) représente une fonction *algébrique*.

Euler a fait connaître la remarquable transformation de séries

$$\frac{1}{1+t} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{t}{1+t}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \Delta^n a_0 \qquad (11)$$

qui porte son nom et qui joue un rôle important dans certaines recherches modernes sur les séries entières [1]. On désigne comme d'habitude par $\Delta^n a_r$ l'expression

$$\Delta^n a_r = a_{n+r} - \binom{n}{1} a_{n+r-1} + \binom{n}{1} a_{n+r-2} - \dots + (-1)^n a_r .$$

Les quantités a_0, Δa_0, $\Delta^2 a_0$, ... interviennent dans la solution de ce problème: trouver un polynôme de degré $\leq n$, prenant des valeurs données $a_0, a_1, a_2, \dots a_n$ aux points successifs $z =$

---

[1] Voir p. ex. Pringsheim. *Ueber einige funktionentheoretische Anwendungen der Eulerschen Reihentransformation.* Sitzungsber. München, 1912, p. 11-92.

0, 1, 2, ... n. C'est ce que j'appellerai le problème de l'interpolation *unilatérale* ou *Newtonienne*. Comme interpolation *bilatérale* ou *Laplacienne*[1] je désignerai le problème suivant: chercher un polynôme de degré $\leq 2n$ prenant des valeurs données aux $2n+1$ points

$$z = -n\,,\ -n+1\,,\ \dots -1\,,\ 0\,,\ +1\,,\ \dots n-1\,,\ n\,.$$

Je me suis proposé de chercher une transformation de séries qui ait le même rapport à l'interpolation bilatérale que la transformation d'Euler à l'interpolation unilatérale. J'ai trouvé qu'il faut distinguer deux cas; le cas pair et le cas impair. Bref, je suis arrivé aux formules suivantes:

en supposant $a_{-n} = a_n$ (12)

$$\frac{1}{\sqrt{1+4t}}\left\{\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\left(\frac{1+2t-\sqrt{1+4t}}{2t}\right)^n\right\} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} t^n\,\Delta^{2n} a_{-n}$$

en supposant $a_{-n} = -a_n$ (12′)

$$\frac{1}{t}\sum_{n=1}^{\infty} a_n\left(\frac{1+2t-\sqrt{1+4t}}{2t}\right)^n = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} t^n\left(\Delta^{2n} a_{-n+1} - \Delta^{2n} a_{-n-1}\right)$$

Je démontre la première de ces formules. On a, k désignant un entier:

$$\frac{1}{\sqrt{1+4t}}\left(\frac{1+2t-\sqrt{1+4t}}{2t}\right)^k = \frac{t^k}{\sqrt{1+4t}}\left(\frac{1-\sqrt{1+4t}}{-2t}\right)^{2k}$$
$$= t^k\sum_{l=0}^{\infty}\binom{2k+2l}{l}(-t)^l$$

d'après la formule (9). En substituant cette expression dans la formule (12) on obtient

$$\frac{a_0}{2\sqrt{1+4t}} + \frac{1}{\sqrt{1+4t}}\sum_{k=1}^{\infty} a_k t^k\left(\frac{1-\sqrt{1+4t}}{-2t}\right)^{2k}$$
$$= \frac{a_0}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}(-1)^n t^n + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} a_k(-1)^l\binom{2k+2l}{l}t^{k+l}$$
$$= \frac{a_0}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}(-1)^n t^n + \sum_{n=1}^{\infty} t^n\sum_{l=0}^{n-1}(-1)^l\binom{2n}{l}a_{n-l}\,. \qquad (13)$$

[1] LAPLACE. *Théorie analytique des probabilités*, chap. I, n° 4.

J'ai introduit le nouvel indice de sommation n par l'équation $n = k + l$. Remarquons qu'en vertu de la supposition $a_{-m} = a_m$, on a

$$(-1)^l \binom{2n}{l} a_{n-l} = (-1)^{2n-l} \binom{2n}{2n-l} a_{n-(2n-l)} \cdot$$

Donc la dernière ligne de la formule (13) peut être écrite comme suit:

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} t^n \sum_{l=0}^{2n} (-1)^l \binom{2n}{l} a_{n-l} ,$$

ce qui démontre la formule proposée (12).

J'ai démontré autrefois [1] que la plus petite fonction entière *transcendante* qui prend des valeurs entières pour $z = 0, 1, 2, 3, \ldots$ est la fonction simple 2^z et que la plus petite fonction entière transcendante qui prend des valeurs entières pour toutes les valeurs entières

$$\ldots -n, \ldots -2, -1, 0, +1, +2, \ldots +n, \ldots$$

de z est la fonction impaire

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^z - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{-z} \right\}.$$

Le premier et le second de ces théorèmes ont le même rapport entre eux que l'interpolation unilatérale et bilatérale ou bien que la transformation d'Euler et les nouvelles formules (12) et (12').

[1] G. Pólya. *Ueber ganze ganzwertige Funktionen*, Rendiconti, Palermo, T. 40 (1915, 2), p. 1-16. — Göttinger Nachrichten, 1920, p. 1-10.

SUR LE NOMBRE e.

PAR

Michel PETROVITCH (Belgrade).

---

1. — Le développement classique exprime le nombre e sous la forme de somme de fractions rationnelles ayant pour numérateurs l'unité. L'identité

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_p x^p)\, e^x \sum_{n=0}^{n=\infty} M_n x^n ,$$

où

$$M_n = \frac{a_0}{n!} + \frac{a_1}{(n-1)!} + \frac{a_2}{(n-2)!} + \dots + \frac{a_p}{(n-p)!} ,$$

fournit le moyen d'exprimer e, et cela d'une infinité de manières, sous la forme de somme de fractions rationnelles irréductibles ayant pour numérateurs des entiers autres que 1. Et en particulier:

Il est possible d'exprimer e *comme somme de fractions rationnelles irréductibles ayant pour numérateurs la suite naturelle de nombres premiers impairs*

1, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ...

En effet, l'identité

$$(x+1)\, e^x = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{n+1}{n!}\, x^n \qquad (1)$$

fait voir, pour $x = 1$, que

$$e = \sum_{0}^{\infty} \lambda_n .$$

où

$$\lambda_n = \frac{1}{2} \frac{n+1}{n!} . \tag{2}$$

D'après la conséquence connue du théorème de Wilson, lorsque $n + 1$ est composé et $n > 3$ on a

$$\frac{n!}{n+1} = \text{nombre entier}$$

et lorsque $n + 1$ est premier, on a

$$\frac{n!}{n+1} = \text{nombre entier} - \frac{1}{n+1} .$$

Il s'en suit que les λ_n sont des fractions rationnelles, lesquelles, réduites à leurs plus simples expressions, ont pour numérateur 1 lorsque $n + 1$ est composé, et $n + 1$ lorsque c'est un nombre premier, ce qui démontre la proposition.

Le nombre e se laisse ainsi exprimer sous la forme

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{s_n} + \sum \frac{p_n}{q_n} , \tag{3}$$

où p_n, q_n, s_n sont des nombres entiers tels que, la fraction $\frac{p_n}{q_n}$ étant réduite à sa plus simple expression, p_n *soit le* $n^{\text{ième}}$ *terme de la suite naturelle de nombres premiers impairs.*

2. — Au point de vue de la propriété arithmétique précédente le nombre e n'est qu'un cas particulier d'une classe plus générale de nombres jouissant de la même propriété.

Soient α_0, α_1, α_2 ... des nombres entiers quelconques et considérons la fonction

$$f(x) = \frac{1}{0!\,\alpha_0} + \frac{x}{1!\,\alpha_1} + \frac{x^2}{2!\,\alpha_2} + \cdots$$

holomorphe dans tout le plan de la variable x. On a

$$\frac{d}{dx}\left[xf(x)\right] = \sum_0^\infty \frac{(n+1)x^n}{n!\,\alpha_n}$$

et par suite

$$\frac{f(1) + f'(1)}{2} = \sum_0^\infty \frac{\lambda^n}{\alpha_n}$$

où λ_n est le nombre précédent (2).

Le nombre

$$M = \frac{f(1) + f'(1)}{2}$$

se laisse donc exprimer sous la forme de somme de fractions rationnelles irréductibles n'ayant pour numérateurs que des nombres premiers.

Dans le cas où α_n n'est pas divisible par $n + 1$ pour $n + 1$ premier, le nombre M se laisse exprimer sous la forme (3). Tel est, par exemple, le cas de

$$\alpha_n = (n\,!)^k\,, \qquad \alpha_n = (n + 2)(n\,!)^k\,, \qquad \text{etc.},$$

k étant un entier positif. Le nombre e correspond au cas particulier où

$$\alpha_n = 1 \qquad f(x) = e^x.$$

Etant donnée une fonction $\varphi(x)$ développable pour $|x| \geqq 1$ en série de la forme

$$\varphi(x) = \frac{1}{\alpha_0} + \frac{x}{\alpha_1} + \frac{x^2}{\alpha_2} + \cdots\,,$$

les α_n étant des entiers quelconques, il est possible d'en former un nombre précédent M sous la forme d'une intégrale définie portant sur des combinaisons simples de $\varphi(x)$. On partira des formules connues exprimant le nombre $\frac{1}{n\,!}$ sous forme d'une intégrale définie, à l'aide de laquelle en exprimera la fonction $f(x)$ à l'aide de $\varphi(x)$. Telles seraient, par exemple, les formules suivantes:

$$\frac{1}{n\,!} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^{\cos t} \cos(\sin t) \cos nt\, dt\,,$$

$$\frac{1}{n\,!} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^{\cos t} \sin(\sin t) \sin nt\, dt\,,$$

$$\frac{1}{n\,!} = \frac{e^{ac}}{2\pi c^n}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{cti}}{(a + ti)^{n+1}}\, dt\,,$$

(c et la partie réelle de a étant des quantités positives).

MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

Sur le théorème de la progression arithmétique de Dirichlet

A propos d'une communication de M. Léon Aubry.

par M. Marius Bedarida (Gênes).

Dans une Note [1] présentée au Congrès de l'Association française pour l'avancement des sciences (Strasbourg, juillet 1920), M. Léon Aubry croit constater une erreur dans la démonstration que donne Dirichlet du théorème suivant: « Toute progression arithmétique dont le premier terme et la raison sont premiers entre eux, contient une infinité de nombres premiers. »

Or, les considérations sur lesquelles M. Aubry base sa remarque, ne sont pas justes.

Dirichlet établit l'égalité fondamentale (*Jour. de Liouville*, t. 4, 1839, p. 396):

$$\Pi \frac{1}{1 - \omega^{\gamma} \frac{1}{q^s}} = \Sigma \, \omega^{\gamma} \frac{1}{n^s} = \mathrm{L} \quad , \qquad (1)$$

dans l'hypothèse $s > 1$. Par cette égalité, avec des raisonnements rigoureux, toujours dans l'hypothèse $s > 1$, il déduit (p. 411, où $s = 1 + \rho$, $\rho > 0$)

$$\Sigma \frac{1}{q^{1+\rho}} + \frac{1}{2} \Sigma \frac{1}{q^{2+2\rho}} + \frac{1}{3} \Sigma \frac{1}{q^{3+3\rho}} + \dots$$
$$= \frac{1}{p-1} [\log \mathrm{L}_0 + \Omega^{-\gamma_m} \log \mathrm{L}_1 + \Omega^{-2\gamma_m} \log \mathrm{L}_2 + \dots \Omega^{-(p-2)\gamma_m} \log \mathrm{L}_{p-2}] \, . \qquad (2)$$

Ici Dirichlet passe à la limite pour $\rho = 0$. Après ce raisonnement on a le théorème.

La valeur de s dont M. L. Aubry parle, sans préciser, est $s = 1$,

[1] Voir le résumé reproduit dans l'*Ens. math.*, t. XXI, n°s 3-4, p. 211.

c'est-à-dire $\rho = 0$. Maintenant dans l'expression (2), démontrée pour $\rho > 0$, passant à la limite pour $\rho = 0$, tous les termes doivent être étudiés séparément, et après les conclusions qui s'y rattachent, on ne doit plus penser à la relation (1) et à celle dont elle a été déduite, toujours dans l'hypothèse $s > 1$. De plus il faut observer que Dirichlet démontre, et n'admet pas, comme dit M. Aubry, que $\lim_{s=1} \log L_0 = +\infty$ (p. 598, § II).

L'objection de M. L. Aubry, qui consiste dans l'examen des relations dont on déduit (2), pour $s = 1$, n'est pas compatible avec les considérations du passage à la limite, qui suivent ces relations.

Gênes, le 27 juillet 1921.

CHRONIQUE

Académie des Sciences de Paris. — Prix décernés.

Mathématiques. — Prix Francœur (1000 fr.), M. René Baire, professeur à la Faculté de Dijon.

Mécanique. — Prix Montyon (700 fr.), M. E. Fouché. — Prix Poncelet (2000 fr.), M. Jouguet, professeur à l'Ecole des Mines. — Prix Boileau (1300 fr.), M. Maillet, professeur à l'Ecole des Ponts et Chaussées.

Astronomie. — Prix Lalande (540 fr.), M. P. Strobant, directeur adjoint de l'Observatoire de Belgique. — Prix Valz (460 fr.), M. Trousset, astronome à l'Observatoire de Bordeaux. — Prix G. de Pontécoulant (700 fr.), M. Crommelin, astronome à l'Observatoire de Greenwich.

Prix généraux. — Prix Petit d'Ormoy, sciences mathématiques (10.000 fr.). Le prix est décerné à feu Georges Humbert, membre de l'Académie, pour l'ensemble de ses travaux. — Prix Saintour (3000 fr.), M. Pierre Boutroux, professeur au Collège de France, pour ses travaux sur la théorie des équations différentielles et ses études sur l'histoire de la philosophie des Sciences.

Fonds de recherches scientifiques. — Fondation Henri Becquerel (prix de 3000 fr.), M. Camille Flammarion, directeur de l'Observatoire de Juvisy, pour l'ensemble de son œuvre scientifique.

Académie Royale de Belgique.

Prix décernés. — La Classe des Sciences a décerné un prix de mathématiques à M. P. Montel (Paris), pour son Mémoire « Sur les familles quasinormales de fonctions holomorphes. Un autre prix de mathématiques a été attribué à M. L. Godeaux (Bruxelles), auteur du Mémoire « Sur les transformations rationnelles de Jonquières de l'espace ».

Concours de 1923. — La Classe de sciences met au concours les questions suivantes:

I. On demande une contribution importante à la géométrie infinitésimale.

II. On demande une contribution au problème des corps dans la théorie d'Einstein.

Pour chacune des questions, l'Académie peut accorder un prix de 1500 fr. — Délai: 1er août 1922.

Conférences mathématiques à Bruxelles.

I. — A l'*Institut des Hautes Etudes de Belgique* (anciennement Université Nouvelle) M. Kraitchik a exposé en 25 leçons pendant le dernier trimestre 1920, la *Théorie des Abaques et ses applications.*

Le 20 décembre 1920, le même auteur a fait une conférence spéciale sur la *Nomographie.*

Le 19 mai 1921, M. Kraitchik a terminé son cours sur la *théorie des nombres.* Procédés graphiques et applications à la factorisation.

Le 23 mai, M. Pierre Boutroux a fait une conférence sur l'*Œuvre scientifique de Pascal.*

Les 30 et 31 mai, M. Charles Moureu, membre de l'Institut, a fait deux conférences avec projections lumineuses sur les *gaz rares des gaz naturels.*

M. A. Gérardin, de Nancy, a fait les 2, 3 et 4 juin, trois conférences sur les sujets suivants: *Carrés magiques en nombres tous premiers.* Construction mécanique; applications au tissage, à l'ameublement, aux mosaïques et aux travaux de dames. — *Les jeux et les nombres entiers.* Historique. Questions attachantes pour parents et enfants. Enseignement visuel. Nombres pensés. — *La Théorie des Nombres.* Son domaine et son histoire. L'avenir passionnant de cette « Reine des Sciences ».

II. — *Deuxième quinzaine internationale* (20 août-5 septembre) au Palais Mondial (Cinquantenaire). — Le 24 août 1921, conférence de M. Paul Otlet, sur *la question bibliographique et documentaire.*

Les 1, 2 et 3 septembre, M. A. Gérardin a fait trois conférences dont voici les titres: *Origine de nos chiffres.* Systèmes de numéra-

tion. — *Questions d'analyse indéterminée* en nombres entiers, sur les degrés 2, 3 et 4. Méthode universelle. — *Polynomes de degrés quelconques* ne donnant que des nombres premiers pour les h premières valeurs de la variable.

Aux mêmes dates, M. Kraitchik a fait trois conférences sur *la nomographie* (abaques). Après avoir exposé une théorie sommaire des différents modes de représentation graphique, l'auteur — qui depuis des années fait des abaques pour les divers services de la Société Financière de Transports et d'Entreprises Industrielles — a montré différents abaques; la plupart sont faits pour les besoins de la susdite Société. Il a exposé plus en détail le *Tokomètre* (dont il est parlé spécialement dans la chronique A. F. A.-S. 1921). Il est vraiment regrettable que cet appareil, d'une utilité indiscutable pour les banquiers soit si peu connu. Et cependant il existe sous sa forme actuelle depuis 1914, et il a été utilisé avec succès.

54e Congrès des Sociétés savantes, Paris, mars 1921.

La section des Sciences, sous-section de mathématiques et astronomie s'est réunie à la Sorbonne le mardi 29 mars 1921, à 14 h. 30 sous la présidence de M. Bigourdan, membre de l'Institut et du Comité des travaux historiques et scientifiques.

M. Bigourdan donne lecture de certains paragraphes de son mémoire: Un essai d'Institut d'optique au XVIIIe siècle, à Paris. L'auteur raconte les efforts faits sous Louis XV et Louis XVI pour créer à Poissy le cabinet de physique du roi. On devait y perfectionner ou y construire les instruments d'optique et principalement d'astronomie.

L'impulsion la plus vigoureuse a été donnée à cette institution par l'abbé Rochon qui construisit divers appareils encore utilisés de nos jours. On lui doit la découverte de la distribution de la chaleur dans le spectre, puis le spectre infra-rouge, les miroirs de platine, le prisme objectif, etc...

Ce cabinet de physique fut supprimé en 1790.

M. A. Gérardin, de Nancy, présente une communication sur la Primalité et la Factorisation, suite de ses recherches pour le 53e Congrès des Sociétés savantes.

Par exemple:

$$N = 2^q - 1 , \qquad q \text{ premier} = 2n + 1$$

si

$$u_{2n} = -3 \quad \text{avec la loi} \quad u_{p+1} = u_p^2 \qquad (\text{mod. } N)$$

et $u_0 = 3$, le nombre N est premier s'il n'est pas divisible par $6qx + 1$.

Lorsque N est composé, u_{2n} est différent de -3; on poursuit le calcul jusqu'à la rencontre d'un deuxième nœud ce qui donne la factorisation.

Exemple:

$$q = 11 \ , \qquad N = 2047 \ ,$$

3, 9, 81, **420**, 358, —797, 639, 968, —502, 223, 601, 929, —793, **420**

Les diviseurs sont donnés par $793^2 - 81^2$.

M. H. Grouiller, assistant à l'Observatoire de Lyon, envoie une note pour la septième question du programme: Utilisation d'une série importante d'observations non encore publiées d'étoiles variables.

Les travaux de la Section de mathématiques et d'astronomie de l'Association française pour l'Avancement des Sciences.

Congrès de Rouen, 1-6 août 1921.

Les sections I et II (mathématiques, astronomie, géodésie, mécanique) ont fonctionné du premier au six août sous la présidence de M. Lelieuvre (Rouen), assisté de M. A. Gérardin (Nancy), comme Secrétaire. MM. J. de Lassus (Paris) et M. Kraitchik (Bruxelles) ont été élus Vice-Présidents.

Communications présentées.

1. — M. Lelieuvre. — *Note sur les surfaces cerclées.* — L'auteur montre la possibilité d'arriver *sans intégration* à la représentation paramétrique des surfaces cerclées rapportées à leurs génératrices circulaires et aux trajectoires orthogonales de ces génératrices.

2. — M. J. de Lassus. — *Sur un compresseur rotatif dit* « hydromécanique ».

3. — M. Kraitchik. — *Applications industrielles des abaques. Tokomètre. Calcul des titres à revenu fixe.* — L'auteur montre les ressources que la théorie des abaques offre aux applications industrielles. Il a fait un abaque pour les calculs concernant les obligations (titres à revenu fixe). Cet abaque est un véritable appareil, car l'échelle mobile se déplace dans deux directions par des dispositifs mécaniques. Au moyen de cet appareil, que l'inventeur appelle « Tokomètre » (du grec Tokos = intérêt) on peut résoudre par simple lecture, donc pour ainsi dire instantanément, les problèmes suivants:

a) Etant donné le taux effectif qu'on se propose de réaliser par un placement en obligations, trouver la parité (prix) d'un titre.

b) Etant donné le prix d'un titre (cote de la Bourse) trouver le taux effectif. (Partant, on trouve le placement le plus avantageux entre plusieurs titres).

c) Trouver le taux d'une annuité donnée.

4. — M. Emile Belot, Vice-Président de la Société Astronomique de France, adresse son mémoire. — *Sur l'évolution de la Cosmogonie dualiste et tourbillonnaire.* — La faillite de la cosmogonie jusqu'ici est due à une faute de méthode dans la recherche. Les Astronomes ont abandonné la méthode inductive suivie inconsciemment par Képler trouvant des lois empiriques du système solaire d'où Newton put remonter à une hypothèse explicative. C'est en reprenant cette méthode et trouvant de nouvelles lois empiriques de notre système que l'auteur a pu fonder la nouvelle cosmogonie dualiste qui explique l'origine des Mondes dans tous leurs détails et dans toutes leurs formes.

Voici la conclusion du mémoire: Tous les êtres cosmiques comme les êtres organisés, doivent leur naissance à un dualisme où se rencontrent deux procréateurs différents dans leur nature, qui transmettent à leurs descendants les caractères propres de leur espèce.

5. — M. J. Camescasse (Paris) envoie un mémoire intitulé: *l'Initiateur mathématique, et l'éducation mathématique objective* (avec fig. et tableaux). — Origines et procédés antérieurs. — Unité de la Mathématique et Avantages de la Présentation *simultanée* (Arithmétique, Algèbre, Géométrie) grâce à la méthode Objective Expérimentale. — Indélébilité des Impressions et connaissances acquises par le contact et la vue des Formules et Phénomènes Mathématiques matériellement présentés. — Connaissance et Compréhension instantanée du système métrique décimal quand numération apprise par l'Initiateur Mathématique. — Règle des opérations Fondamentales comprises parce que Objectives.

6. — M. Kraitchik présente sa note *Sur un procédé graphique de criblage.* — L'auteur explique en quelques mots son procédé qui sera exposé avec détails dans le volume I de sa Théorie des Nombres, que la maison Gauthier-Villars éditera fin 1921. Il donne deux exemples de recherche des facteurs de grands nombres:

$$2^{53} + 2^{27} + 1 = 15\,358\,129 \times 586\,477\,649 \ ,$$

$$2^{61} + 2^{31} + 1 = 3\,456\,749 \times 667\,055\,378\,149 \ .$$

7. — M. Clapier envoie un mémoire: *Sur les équations aux dérivées partielles dont les caractéristiques sont des géodésiques sur les surfaces intégrales.*

8. — M. A. Gérardin. — *Problèmes sur des sommes de carrés égalant d'autres sommes de bicarrés* « Solutions nouvelles ». — L'auteur

indique la bibliographie du sujet, donnée dans l'*History of Theory of Numbers* de L. E. Dickson, et il rappelle que l'étude de toutes ces questions se ramène à

$$Am^3 + Bm^2 + Cm + D = 0 , \qquad (1)$$

où A, B, C, D sont des fonctions de nouvelles indéterminées. Il a exposé ce procédé en détail dans l'*Intermédiaire des mathématiciens* (1915, pp. 149-161).

L'étude complète de (1) se ramène à 11 cas généraux. Les identités données par le procédé de Fermat, ou trouvées par d'autres mathématiciens découlent de l'un seulement de ces onze cas, dont l'ensemble fournit bien toutes les solutions, comme M. G. Humbert l'a confirmé par les hautes mathématiques. L'auteur utilise ici sa méthode universelle (*Bull. Soc. Philom.*, 1911).

9. — M. Léon Aubry envoie une note, présentée par M. A. Gérardin: *Solutions récurrentes du système en nombres entiers*

$$x^2 + 2axy + by^2 = u^2 \qquad x^2 + 2cxy + dy^2 = v^2 .$$

L'auteur a donné dans le *Sphinx-Œdipe* (Numéro Spécial, avril 1920, p. 8-9), pour le cas particulier: $a = -3$, $b = -9$, $c = -1$, $d = 3$, que Ed. Lucas avait signalé à tort comme impossible, une méthode qui permet de déduire par récurrence une infinité de solutions de la solution immédiate $x = u = v = 1$, $y = 0$. Il généralise cette méthode, pour tous les systèmes dans lesquels on n'a pas $c = a$ ou $b - a^2 = d - c^2$.

10. — M. R. Goormaghtigh adresse un mémoire, présenté par M. A. Gérardin: *Extension aux cycloïdales de la propriété fondamentale de la spirale logarithmique.* — La spirale logarithmique coupe sous un même angle tous les rayons vecteurs menés du pôle; or la spirale appartient, avec la cycloïde et les épi-hypo- et pseudocycloïdes, à la classe des cycloïdales, caractérisées par l'équation intrinsèque $\rho^2 + ls^2 = a^2$. L'auteur établit dans sa note le théorème suivant:

Pour une cycloïdale quelconque, il existe toujours dans l'espace un point tel que les rayons vecteurs menés de ce point rencontrent tous la courbe sous un même angle.

Le pôle n'est réel que pour les spirales logarithmiques et les pseudocycloïdes avec rebroussements. Dans le cas de la cycloïde ordinaire, le pôle est à l'infini.

11. — M. Pomey, Ingénieur des télégraphes, envoie un mémoire: *Remarques sur l'application du théorème des moments cinétiques.* — « La vitesse de l'extrémité de l'axe du moment des quantités de mouvement est équipollent à l'axe du moment des forces extérieures. » Dans

un énoncé de ce genre tous les vecteurs sont censés ramenés parallèlement à eux-mêmes à une même origine. Qu'arrive-t-il si l'on prend les moments par rapport à un point A animé d'une vitesse $\overrightarrow{V_A}$?

Si $\overrightarrow{AK}$ est le moment cinétique par rapport à A, M la masse du système, $\overrightarrow{V_G}$ la vitesse du centre de gravité, $\overrightarrow{A\mathcal{M}}$ le moment par rapport à A des forces extérieures, on a :

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{A\mathcal{M}} - [\overrightarrow{V_A}, \overrightarrow{MV_G}]$$

les crochets indiquant un produit vectoriel ; ce terme complémentaire provient de la vitesse du point A ; la note a pour objet d'exposer sa raison d'être.

En appliquant de même le théorème dans le mouvement autour du centre de gravité, mais en prenant les moments par rapport à un point A :

Le moment cinétique par rapport à A est le même que par rapport à G et l'on a :

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{GK} = \overrightarrow{A\mathcal{M}} + \left[\overrightarrow{GA}, \frac{d}{dt}M\overrightarrow{V_G}\right].$$

Le terme complémentaire disparaît quand A coïncide avec G ; il faut remarquer que dans ce terme la dérivation ne porte que sur le second facteur.

12. — M. Véronnet, astronome à l'observatoire de Strasbourg : *Sur les Etoiles nouvelles et Etoiles géantes.* — Le calcul permet de montrer que les deux composantes d'une *étoile double* peuvent se rapprocher, se fusionner et produire une température intense, qui explique les principaux caractères des *étoiles nouvelles*. La *pression de radiation*, due à cette température, peut repousser certaines fines particules avec des vitesses comparables à celle de la lumière, expliquer les *nébulosités* et les *nébuleuses spirales*, en tenant compte de la rotation originelle. Ces nébulosités, en se contractant, peuvent former une enveloppe continue autour de l'étoile centrale, expliquer ainsi les *étoiles géantes*, Bételgeuse, Antarés, d'un diamètre extérieur mesuré de 300 et 40 fois celui du soleil, expliquer les étoiles variables du genre *céphéide*, et plusieurs phénomènes de notre *soleil*.

13. — M. A. Gérardin présente à la Section *Treize Lettres inédites de J. J. Sylvester et six de Th. Pépin adressées à Ed. Lucas de* 1877 *à* 1880. — Cette importante contribution à l'Histoire de la Théorie des Nombres étudie surtout les solutions initiales de $x^3 + y^3 = Az^3$. Après traduction et réajustement, elles seront publiées au *Sphinx-Œdipe*.

14.— M. A. Gérardin. — *Histoire des Sciences, un ancêtre de la presse mathématique française:* « Le Géomètre ». — Ce recueil, à l'usage des candidats aux écoles spéciales, était édité en 1836 à Paris par Guillard. L'exemplaire, cartonné, contient quatorze feuilles 13 × 21 et 9 planches. Gerono, Sturm, Miquel, Catalan, Terquem, Chasles... s'y sont intéressés. On y trouve des mémoires, des questions et réponses, la solution de certains concours généraux, et des problèmes résolus ignorés des mathématiciens et géomètres modernes.

15.— M. A. Gérardin expose divers *Procédés et problèmes de calcul mental*, avec applications à des problèmes des 2e, 3e, et 4e degrés. — Partant d'*une* solution *rationnelle* de $ax^2 + bx + c = y^2$, l'auteur apprend à trouver *toutes* les solutions *entières*.

La juxtaposition de ses méthodes fournit une solution élégante de la question.

16. — M. Tripier. — *Mouvement d'une surface invariable.* — Détermination graphique de la caractéristique.

17. — M. le Cdt Litré. — *Principes de la rotation des fluides.*

18. — M. Cadenat.— *Sur des formes se reproduisant par la multiplication.*

Ainsi:

$$(a^2 + ab + b^2)(c^2 + cd + d^2) = e^2 + ef + f^2$$

avec

$$e = ac + d(a + b) \ , \qquad f = bc - ad \ ;$$

ou encore

$$e = ad + b(c + d) \qquad f = ac - bd \ .$$

Le prochain Congrès se tiendra à *Montpellier*. Le président des Sections I et II sera M. E. Fabry, et le secrétaire M. A. Gérardin.

Société mathématique suisse.

Réunion de Bâle, 8 mai 1921.

Les mathématiciens suisses ont tenu leur réunion de printemps à Bâle, le 8 mai 1921, sous la présidence de M. L. Crelier, professeur à l'Université de Berne. Donnant suite à un vœu qui avait été émis en septembre 1920, à l'occasion du Congrès de Strasbourg, le Comité avait invité les mathématiciens de Strasbourg à prendre part à la réunion.

L'ordre du jour comprenait deux conférences, l'une de M. Fréchet, Directeur de l'Institut de mathématiques de l'Université de Stras-

bourg, l'autre de M. Gustave Dumas, professeur à l'Université de Lausanne, puis une série de courtes communications.

Conférences.

1. — *Conférence* de M. Maurice Fréchet (Strasbourg). — *Sur la désaxiomatisation de la Science.* — L'auteur rappelle d'abord qu'ayant fondé sur la méthode axiomatique la plupart de ses propres travaux, il ne saurait être suspecté de vouloir diminuer l'importance de cette méthode.

Mais il estime qu'il serait dangereux de lui assigner un rôle exclusif. Bien souvent cette méthode substitue à un concept d'ordre concret un concept abstrait sur lequel on peut édifier des raisonnements rigoureux; mais il arrive trop souvent qu'on en applique les conséquences à la réalité concrète en substituant sans s'en apercevoir le concept concret qui était le but de l'étude au concept abstrait, base unique de ces déductions logiques. L'auteur cite quelques exemples: la définition usuelle de la tangente impossible à réaliser graphiquement, la définition de la différentielle totale exacte qu'on abandonne tacitement après l'avoir énoncée, etc... Il y aurait lieu d'introduire des définitions où intervient l'ordre d'approximation admis pour l'élément à définir. Par exemple,à titre d'indication, la dérivée moyenne dans un intervalle de longueur ε remplacerait la dérivée exacte, la valeur de ε étant trois ou quatre fois supérieure à l'épaisseur concrète de la courbe, etc.

2. — *Conférence* de M. Gustave Dumas (Lausanne). — *Tableaux de Poincaré et propriétés topologiques des surfaces.* — Poincaré, dans ses recherches mémorables d'Analysis Situs, a fait usage de tableaux permettant de caractériser, au point de vue topologique les variétés d'un nombre quelconque de dimensions.

M. Gustave Dumas, dans une large esquisse, montre, à grands traits, comment ces tableaux facilitent l'étude des propriétés des surfaces bilatérales ou unilatérales de l'espace à trois dimensions et comment le nombre permet de retrouver, d'une manière rigoureuse, tous les résultats que l'on doit à l'intuition géométrique.

La méthode, dans son essence, fait correspondre à des polyèdres, tracés sur les surfaces, certaines formes bilinéaires.

Les polyèdres sont orientés de la manière indiquée par MM. Veblen et Alexander, lesquels ont introduit encore, à propos des formes ci-dessus, des systèmes d'équations linéaires [1].

Les solutions de ces systèmes fournissent un moyen avantageux de représenter les contours fermés. On est ainsi conduit directement

---

[1] O. Veblen and J.-W. Alexander, Manifolds of N dimensions. *Annals of Mathematics*, 2me série, t. 14, p. 163, 1912-13.

à la notion d'*homologie* que Poincaré a introduite et dont la place est prédominante dans ses travaux[1].

La première formule d'Euler acquiert de son côté une interprétation facile [2], tandis que, d'un autre, on se trouve en possession d'un procédé commode donnant les contours d'encadrement [3].

Les questions d'homéomorphie, enfin, se greffent sans grande difficulté sur ceci [4].

On sait, ce qu'en esprit de finesse, les plus illustres, les Riemann, les Jordan, les Möbius et, combien d'autres, ont dépensé d'ingéniosité dans l'exploration de ce domaine si riche et si attrayant de l'Analysis Situs, dernière citadelle, selon quelques-uns, de l'esprit de finesse.

Leurs efforts n'ont point été vains ; mais, dans ce champ aussi, grâce au génie si varié et si illimité de Poincaré, l'on verra peu à peu les tendances des Weierstrass et des Kronecker prédominer. Tant il est vrai, comme souvent on l'a dit, que, si les nombres ne gouvernent point le monde, ce sont eux néanmoins qui nous enseignent comment le monde est gouverné.

COMMUNICATIONS.

1. — M. G. VALIRON (Strasbourg). — *Sur les fonctions entières.* — Soit $f(z)$ une fonction entière d'ordre fini non entier ρ ; l'exposant de convergence de la suite des zéros est égal à ρ. Soit r_n le module du $n^{\text{ième}}$ zéro, je dirai que la fonction est de *première classe* si la série

$$\sum \frac{1}{r_n^\rho} \tag{1}$$

converge, dans le cas contraire qu'elle est de *deuxième classe.* En m'appuyant sur une généralisation simple de l'inégalité de M. Jensen, j'ai établi que, la condition nécessaire et suffisante pour que la fonction soit de première classe est que l'intégrale

$$\int_a^r \frac{\log M(x)}{x^{\rho+1}}\, dx \tag{2}$$

dans laquelle $M(x)$ désigne le maximum de $|f(z)|$ pour $|z| = x$, converge. Si l'on désigne par R_n le rapport rectifié du coefficient de rang n au

---

[1] Gustave DUMAS et Jules CHUARD, Sur les homologies de Poincaré. *Comptes rendus de l'Ac. des Sc.*, t. 171, p. 1113, 1920.

Voir aussi la thèse « *Questions d'Analysis Situs* » présentée à l'Université de Lausanne par M. J. CHUARD.

Rendiconti del Circolo mat. di Palermo, t. 46.

[2] Voir à ce propos : O. VEBLEN, An application of modular equations in Analysis Situs. *Annals of Mathematics*, 2e Série, t. 14, p. 86. 1912-13.

[3] Gustave DUMAS, Sur les contours d'encadrement. *Comptes rendus de l'Ac. des Sc.*, t. 172, p. 1221, 1921.

[4] Gustave DUMAS, Sur un tableau normal relatif aux surfaces unilatérales. *Comptes rendus de l'Ac. des Sc.*, t. 174, p. 93, 1922.

coefficient de rang $n - 1$ dans le développement de Taylor de $f(z)$, on déduit de la proposition précédente que la série (1) converge ou diverge en même temps que la série

$$\sum \frac{1}{R_n^\rho} \tag{3}$$

Dans le cas de l'ordre ρ entier, la convergence de (3) entraîne que le genre est $\rho - 1$. Il résulte de là que la classe se conserve par la dérivation, que les fonctions $f(z) - x$ sont toutes de même classe; de même ces opérations conservent le genre dans le cas de l'ordre entier lorsque (3) converge.

Comme application on voit que si l'on pose

$$f(z) = \sum a_n z^n$$

et si l'on suppose que la série

$$\sum \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|^k$$

converge, ou bien l'ordre de $f(z)$ est moindre que k, ou bien l'ordre est k et la fonction de la première classe et si k est entier le genre est $k - 1$ au plus (Voir la communication de M. Polya à la dernière réunion de la Société, Neuchâtel, août 1920. *L'Ens. Math.*, t. XXI, p. 217).

2. — M. R. Fueter (Zurich). — *Le critère de Kummer relatif au dernier théorème de Fermat.* — Afin de pouvoir appliquer les méthodes de la théorie moderne des nombres à l'étude de l'équation de Fermat

$$a^l + b^l + c^l = 0 \qquad (l \text{ nombre premier impair}), \tag{1}$$

il faut d'abord remplacer la *forme additive* de l'énoncé de Fermat par une *forme multiplicative.* Des transformations simples permettent de ramener l'expression (1) à

$$(a + bh)^{r_0}(a + bh^r)^{r_{-1}} \dots (a + bh^{r^{l-2}})^{r_{-l+2}} = h^\rho \psi^l \tag{2}$$

où $h = e^{\frac{2\pi i}{l}}$, r étant une racine primitive (mod. l) et r_i le plus petit reste positif de r^i. ψ est un nombre du corps $k(h)$ et ρ un nombre déterminé par $\rho \equiv - \frac{b}{a + b}$ (mod l).

La formule (2) est valable pour c premier avec l. Elle fournit immédiatement les critères de Wieferich et de Furtwaengler. On peut aussi en déduire facilement les conditions de Kummer et de Mirimanoff.

3. — M. Alex. VÉRONNET (Strasbourg). — *Variation de la masse et de la distance d'une planète dans un milieu résistant.* — On suppose que l'atmosphère de la planète absorbe toutes les particules rencontrées. Alors sa distance au centre d'attraction varie en raison inverse du carré de sa masse: $m^2 r =$ const. L'équation du mouvement et l'équation de la trajectoire se déterminent facilement quand on se donne la loi de variation de la densité du milieu. De deux planètes, celle dont la valeur de $m^2 r$ est la plus faible se rapproche le plus vite du soleil. Le calcul montre que, quelque soit la loi de densité, les planètes n'ont pas pu se former à des distances très différentes des distances actuelles sans se rencontrer.

4. — M. A. SPEISER (Zurich). — *Sur la décomposition des nombres premiers dans les corps algébriques.* — Etant donnée une équation à coefficients entiers

$$x^n = a_1 x^{n-1} + \dots + a_n \, .$$

on peut former avec les nombres $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1$ une série récurrente en commençant par n nombres entiers quelconques, par exemple par 0, ... ,0, 1. En réduisant les termes de cette série par un nombre premier p qui ne divise pas a_n, on reçoit une série périodique. Soit u le nombre de termes dans la période et soit f le plus petit nombre satisfaisant à l'équation $p^f \equiv 1 \pmod{u}$, on démontre que f est le degré des idéaux premiers divisant p dans le corps algébrique formé par les racines de l'équation proposée.

5. — M. Maurice FRÉCHET (Strasbourg). — *Sur divers modes de convergence.* — Les ensembles de fonctions où la limite d'une suite est définie au moyen d'une définition particulière de la convergence donnent lieu à une extension plus ou moins complète des propriétés des ensembles linéaires suivant que la définition adoptée pour la convergence peut ou non s'énoncer au moyen d'un écart de deux fonctions.

La convergence uniforme, la convergence en moyenne de Fischer, la convergence en mesure de F. Riesz convenablement généralisée, la convergence relativement uniforme de E. H. Moore peuvent être définies par l'intermédiaire de définitions, convenant à chaque cas, de la distance de deux fonctions.

Dans un mémoire sous presse [1], l'auteur a montré qu'au contraire la convergence ordinaire, la convergence quasi-uniforme d'Arzelà, la convergence presque partout de Lebesgue ne peuvent être définies par l'intermédiaire d'une définition de l'écart, quelle qu'elle soit.

---

[1] *Bulletin of the Calcutta Mathematical Society*, 1921.

6. — M. L. Crelier (Berne). — *Sur la puissance de la droite*[1]. — La puissance d'une droite par rapport à un cercle que nous avons définie par l'expression

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha'_s}{2} = \frac{r + d}{r - d}$$

peut être établie également sans difficultés par la géométrie synthétique, en considérant la puissance d'une involution circulaire de points et en passant à celle de l'involution circulaire des tangentes correspondantes. La puissance de l'involution est alors égale à la puissance de l'axe de l'involution par rapport au cercle considéré.

En outre tous les théorèmes et toutes les constructions déduits de la puissance d'un point par rapport à un cercle correspondent à des théorèmes et des constructions analogues déduits de la puissance d'une droite.

Enfin la notion de puissance se laisse parfaitement étendre à la sphère. Nous aurons la puissance d'un point et la puissance d'un plan par rapport à une sphère avec des propriétés analogues aux précédentes.

Les propriétés involutives déduites de la théorie de la puissance du point ou de la droite se retrouvent également dans la puissance du point ou du plan par rapport à une sphère.

7. — M. L. Kollros (Zurich). — *Invariants orthogonaux de l'espace à* n *dimensions*. — La généralisation, dans l'espace à n dimensions, des notions de distance, d'angle et de courbure conduit aux résultats suivants:

1. En géométrie euclidienne, deux espaces linéaires ε_k et ε_l n'ayant aucun point commun (dans le fini et à l'infini) ont *une seule perpendiculaire commune*; il y en a plusieurs en géométrie non euclidienne.

2. Si ε_k et ε_l $(k + l \leq n)$ ont un seul point commun, le nombre de leurs angles φ est le plus petit des 4 nombres $k, l, n - k, n - l$. Ce résultat, démontré par Jordan (*Bull. soc. math.*, t. III) avait été trouvé (22 ans auparavant) par Schläfli dans un mémoire: *Theorie der vielfachen Kontinuität* qui n'a été publié qu'en 1901. Schläfli appelle facteur de projection d'un espace sur l'autre le produit des cosinus de ces angles et le travail de Jordan permet de trouver l'équation qui détermine ces cosinus. La forme de cette équation ne montre pas immédiatement que *ces angles* φ_i *sont réels*, quand les espaces ε_k et ε_l le sont. Or, en prenant un des espaces donnés comme espace de coordonnées, on trouve pour $tg^2\varphi_i$ une équation séculaire; toutes les racines sont donc réelles et, de plus, positives, car $\mathrm{tg}^2\varphi_i$ s'exprime, d'ailleurs, par

[1] *Enseignement mathématique*, N° 1-2, XIXe année, janvier-mars 1917.
Nouvelles Annales de Mathématiques, 4e série, t. XVII, août et septembre 1917.

le quotient de 2 formes quadratiques définies et positives. Les côtés $(m_1, n_1) \dots (m_l, n_l)$ de ces angles sont tels que chaque m_i ou n_i est perpendiculaire à tous les m_h et n_h (où $h \neq i$). Si l'on considère les éléments à l'infini de nos espaces, on déduit du résultat précédent un théorème de géométrie non euclidienne, car l'ε_{n-1} à l'infini d'un ε_n euclidien est un espace de Riemann. Pour $n = 4$, on retrouve cette proposition connue[1]: 2 droites gauches d'un espace de Riemann à 3 dimensions ont 2 perpendiculaires communes, *toujours réelles*, l'une AA_1 correspond à un minimum de la distance, l'autre BB_1 à un maximum; 2 plans passant respectivement par les 2 droites ont un angle maximum lorsqu'ils contiennent AA_1, minimum quand ils passent par BB_1.

3. Pour généraliser la notion de courbure totale, nous utilisons un théorème de Jordan (C. R.; 79) (Euler pour $n = 3$). Considérons dans l'$\varepsilon_n = \varepsilon_{m+k}$ une « k-surface » définie par un système de k équations simultanées: $x_{m+i} = f_i(x_1, \dots, x_m)$ pour $i = 1 \dots k$; elle présente en chaque point m directions rectangulaires telles que la somme des carrés des angles formés par deux « k-plans » tangents consécutifs divisée par ds^2 soit maximum ou minimum. En désignant ce quotient par $\frac{1}{R_1^2}, \dots, \frac{1}{R_m^2}$ pour chacune de ces m directions, nous appellerons *courbure totale* de la « k-surface » en un de ses points P le produit: $c = \frac{1}{R_1 \dots R_m}$. Si l'on représente les dérivées secondes par $r^i_{la} = \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_l \partial x_a}$ et la double somme $\sum_{i,l} r^i_{la} r^i_{lb}$ par le symbole (a, b), on trouve, en prenant P pour origine et son « k-plan » tangent pour espace de coordonnées

$$c^2 = \begin{vmatrix} (1,1) & \dots & (1,m) \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ (m,1) & \dots & (m,m) \end{vmatrix}.$$

Pour $i = 1$, on a la surface: $x_n = f(x_1 \dots x_{n-1})$; le déterminant ci-dessus est alors un carré parfait et l'expression de la courbure totale est:

$$c = \begin{vmatrix} r_{11} & \dots & r_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ r_{m1} & \dots & r_{mm} \end{vmatrix} \quad \text{en posant} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_l \partial x_a} = r_{la} \quad (l \text{ et } a = 1 \dots m)$$

$(rt - s^2$ pour $n = 3)$.

[1] Darboux. *Principes de géom. anal.*, 1917, p. 310.

8. — Chargé par le Comité de la Société mathématique suisse d'introduire la question de l'*adhésion de la Suisse à l'Union internationale mathématique*, M. H. Fehr donne un aperçu des statuts de l'Union adoptés à Strasbourg le 20 septembre 1920. Cette union se rattache au Conseil international de recherches créé sous les auspices de la Conférence internationale des académies. L'admission d'un pays à l'Union est subordonnée aux conditions fixées par le Conseil international de recherches. La Société helvétique des sciences naturelles ayant adhéré au Conseil international, en août 1920, la Société mathématique suisse ne saurait se tenir à l'écart de l'Union internationale mathématique. La question sera soumise à l'assemblée annuelle (Schaffhouse, août 1921) après entente avec le Comité central de la Société helvétique.

Société mathématique suisse.

Schaffhouse, 27 août 1921.

La Société mathématique suisse a tenu sa onzième réunion annuelle à Schaffhouse, le 27 août 1921, sous la présidence de M. le Prof. L. Crelier (Berne), à l'occasion de la cent-deuxième réunion annuelle de la Société helvétique des sciences naturelles.

Dans sa *séance administrative* la Société a décidé, à l'unanimité, d'accord avec le Comité central de la Société helvétique, d'adhérer à l'*Union internationale mathématique*. Puis, après avoir donné décharge au trésorier sortant de charge, elle a constitué comme suit le comité pour les années 1922 et 1923: M. Gustave Dumas (Lausanne), président; M. O. Spiess (Bâle), vice-président; M. A. Speiser (Zurich), secrétaire-trésorier.

La prochaine réunion annuelle aura lieu à *Berne*.

Communications scientifiques.

1. — M. S. Bays (Fribourg). — *Sur la généralisation du problème des triples de Steiner.* — Appelons *n-uple* une combinaison n à n, et *problème des n-uples*, le problème suivant, généralisant le *problème des triples de Steiner :*

Pour quel nombre N *d'éléments, peut-on trouver un* SYSTÈME DE N-UPLES, *contenant* UNE FOIS et UNE SEULE FOIS *chaque* (n — 1)-*uple de ces éléments* [1] ?

[1] Exemple : Le triple 123 contient les trois couples 12, 13, 23. et le système de triples (de Steiner) 123, 145, 167, 246, 257, 347, 356, contient une fois et une seule fois chaque couple des sept éléments 1, 2, ..., 7. Voir Netto, *Combinatorik*, chap. 10, p. 202.

Je peux établir, pour ce problème général, les résultats suivants: La condition *nécessaire* pour l'existence d'un système de n-uples, est l'intégrité de tous les quotients:

$$\frac{N(N-1)(N-2)\ldots(N-n+2)}{n!}, \quad \frac{(N-1)(N-2)\ldots(N-n+2)}{(n-1)!}, \ldots, \frac{N-n+2}{2}.$$

I. *Il y a, quel que soit* n, *indéfiniment des* N *remplissant cette condition nécessaire.* Il suffit de prendre $N = m\,n\,! + n$ (m entier positif).

II. *Pour un* n *donné, les* N *remplissant cette condition nécessaire, sont tous les nombres* N *tels que* N — n *n'est pas congru à* — 1, *suivant un module* PREMIER *inférieur ou égal à* n. Ainsi le problème des triples (de Steiner) est possible pour tous les N tels que N — 3 n'est pas $\equiv -1$ mod. 2 ou 3, ce qui donne les formes $N = 6x + 1$ et $6x + 3$. Le problème des quadruples est possible pour $N = 6x + 2$ et $6x + 4$. Le problème des quintuples est possible pour tous les N tels que N — 5 n'est pas $\equiv -1$ mod. 2, 3 ou 5; etc.

III. *D'un systéme de* n — uples *avec* N *éléments, j'obtiens un système de* (n — 1)*uples avec* N — 1 *éléments, par suite un système de* (n — 2)*-uples avec* N — 2 *éléments, etc.* Si donc, pour un certain n, il n'existe plus de systèmes de n-uples pour aucun N, il n'en existera plus pour aucun n supérieur. Mais ceci est peu probable. Pour tout $N = 6x + 1$ et $6x + 3$, il existe des systèmes de triples (de Steiner).

IV. Appelons système *cyclique* de n-uples, celui qui possède le groupe cyclique $\{(123 \ldots N)\}$. On a le théorème: *les systèmes cycliques de* n*-uples vont par* PAIRES *de systèmes conjugués; les 2 systèmes de la même paire sont déductibles l'un de l'autre par la substitution* $|x, N - x|$ *et n'ont aucun* n*-uple commun.*

Je puis donner des systèmes de quadruples ($n = 4$) et de quintuples ($n = 5$) pour les premières valeurs de N permises, et j'ai le moyen de reconnaître les systèmes de n-uples *différents*, c'est-à-dire ne provenant pas l'un de l'autre par une permutation des éléments. Exemple: les éléments étant 0, 1, ..., 9, 0′, les 2 systèmes cycliques conjugués déterminés par [1]:

01235	01269	01278	01347	01368	01579
01239	01247	01256	01348	01357	01469

sont les 2 seuls systèmes cycliques de quintuples pour 11 éléments.

---

[1] Chaque système est constitué des 66 quintuples découlant des 6 donnés par la permutation cyclique (012 ... 0′).

2. — M. G. Pólya (Zurich). — *Sur les zéros des dérivées successives.* — 1. On désigne a comme *valeur exceptionnelle* de la fonction entière $g(z)$, si la fonction $g(z) - a$ n'a qu'un nombre fini de zéros. Supposons que $g(z)$ ne soit pas de la forme $P(z)\,e^{Q(z)} + a$, où $P(z)$ et $Q(z)$ sont des polynomes et a une constante. Alors au moins une des trois fonctions $g(z)$, $g'(z)$, $g''(z)$ ne possède aucune valeur exceptionnelle.

2. Soit $F(z)$ une fonction méromorphe. Le « champ d'activité » d'un pôle de $F(z)$ soit défini comme l'ensemble des points plus rapprochés du pôle en question que des autres pôles de $F(z)$; le champ d'activité de chaque pôle est un polygone convexe. Les zéros des fonctions $F(z)$, $F'(z)$, $F''(z)$, ... forment un ensemble dénombrable; l'ensemble dérivé de celui-ci coïncide avec la totalité des segments séparant les champs d'activité des différents pôles de $F(z)$.

3. Soient $P(z)$, $Q(z)$ des polynomes, de degré p, q respectivement, $q \geqq 2$. Posons $F(z) = P(z)\,e^{Q(z)}$. On peut déterminer l'ensemble dérivé de l'ensemble dénombrable formé par les zéros des fonctions $F(z)$, $F'(z)$, $F''(z)$, ...: il consiste en q demi-droites issues de la racine de l'équation linéaire $Q^{(q-1)}(z) = 0$, partageant le plan en q angles égaux et tendant vers les directions dans lesquelles $F(z)$ décroît le plus vite.

3. — M. Chr. Moser (Berne). — *A propos d'équations se rapportant à une association qui se renouvelle, avec application aux caisses d'assurances sociales.* — Soient H personnes qui se réunissent pour constituer une association. A la suite de diverses circonstances (décès, etc), l'association, que nous supposons tout d'abord fermée, c'est-à-dire ne se renouvelant pas, sera devenue plus petite à l'époque t. Le nombre des participants sera représenté à ce moment-là par $H \cdot p(t)$, où $p(t)$ désigne la probabilité pour un adhérent du début d'appartenir encore à l'association au temps t, de telle sorte que $p(0) = 1$ et $p(\infty) = 0$. La fonction $p(t)$ est supposée connue.

Si l'association se renouvelle d'une manière continue, dans la même mesure qu'elle diminue, et par des éléments tels que, dans leur composition, ils correspondent à la génération du début au moment de la constitution de l'association, et si, de plus, le renouvellement à l'époque τ est désigné par $H\,f(\tau)\,d\tau$, il faut que l'équation suivante soit satisfaite, pour toutes les valeurs de t, et indépendamment de la base H:

$$1 = p(t) + \int_0^t f(\tau)\,p(t-\tau)\,d\tau\,. \qquad (1)$$

L'association a pour but de supporter en commun un risque bien

déterminé, par exemple, garantir des rentes de veuves dans le cas d'une caisse de secours pour veuves.

La veuve d'un participant décédé touchera, durant la période 1, une rente 1, donc durant le temps $d\tau$, une rente $d\tau$ [1]. Si H $\omega(t)$ désigne le nombre de veuves, provenant de l'association fermée H$p(\tau)$, $0 \leqq \tau \leqq t$, qui jouissent de leur rente à l'époque t, ω (t) indique la probabilité pour un adhérent du début de n'être plus en vie à l'époque t, mais de laisser une veuve, en jouissance de la rente à ce moment-là. Dès lors, le nombre de veuves H$\Omega(t)$ pour l'association qui se renouvelle se déterminera à l'aide de la relation

$$\Omega(t) = \omega(t) + \int_0^t f(\tau)\omega(t-\tau)\,d\tau\,. \qquad \text{(II)}$$

D'une manière analogue, la réserve mathématique H$Z(t)$ afférente à l'association qui se renouvelle pourra être exprimée par l'équation suivante:

$$Z(t) = z(t) + \int_0^t f(\tau)z(t-\tau)\,d\tau\,, \qquad \text{(III)}$$

en désignant par H$z(t)$ la réserve mathématique pour l'association fermée.

Le passage à l'époque du plein fonctionnement de l'assurance présente un intérêt particulier. Si P désigne la prime nette constante d'un adhérent pour la période 1, P$d\tau$, pour la période $d\tau$ et si v représente la valeur du capital qui, avec ses intérêts, au bout du temps 1 atteindra la valeur 1, nous aurons

$$P = \frac{\int_0^\infty v^t \omega(t)\,dt}{\int_0^\infty v^t p(t)\,dt}\,, \qquad \text{(IV)}$$

et si l'on considère que, pour l'époque du plein fonctionnement de l'assurance, les fonctions f, Ω et Z doivent se rapprocher de cons-

[1] Dr O. Schenker. — IIme Bulletin de l'Association des Actuaires suisses. — Berne. 1916.

tantes, nous aurons

$$\left.\begin{aligned}
\alpha &= \lim_{t=\infty} f(t) = \frac{1}{\int_0^\infty p(t)\,dt}, \\
\beta &= \lim_{t=\infty} \Omega(t) = \frac{\int_0^\infty \omega(t)\,dt}{\int_0^\infty p(t)\,dt}, \\
\gamma &= \lim_{t=\infty} Z(t) = \frac{\int_0^\infty z(t)\,dt}{\int_0^\infty p(t)\,dt},
\end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{V})$$

et nous pourrons établir les relations

$$e^{\frac{\beta-1}{\gamma}} - 1 = i, \qquad (\mathrm{VI})$$

et

$$\mathrm{P}\int_0^\infty p(t)\,dt + \delta\int_0^\infty z(t)\,dt = \int_0^\infty \omega(t)\,dt, \qquad (\mathrm{VII})$$

où e désigne la base des logarithmes népériens, $i = \frac{1}{v} - 1$, l'intérêt, et δ, l'escompte logarithmique.

Pour l'époque du plein fonctionnement de l'assurance, le rapport R entre les recettes en intérêts de la réserve, d'une part, et les recettes en primes, d'autre part, est donné par la relation

$$\mathrm{R} = \gamma\,.\,\delta\,.\,\frac{1}{\mathrm{P}} = \frac{\int_0^\infty z(t)\,dt}{\int_0^\infty p(t)\,dt}\,.\,\delta\,.\,\frac{\int_0^\infty v^t\,.\,p(t)\,dt}{\int_0^\infty v^t\,.\,\omega(t)\,dt} \qquad (\mathrm{VIII})$$

On remarquera la facilité et l'élégance avec lesquelles les grandeurs principales, valables pour l'époque du plein fonctionnement de l'assurance, peuvent être établies. La considération d'autres risques, par exemple, du risque d'invalidité, ou la combinaison de divers risques, conduirait à des équations tout à fait analogues.

4. — M. Emile Marchand (Zurich). — *Le problème fondamental de l'assurance.* — Le problème fondamental de l'assurance peut être énoncé comme suit:

« *Etant donné le principe de la péréquation des ressources avec les engagements, ayant établi une hypothèse quant au développement futur d'un groupement d'assurance, et étant connues les prestations futures aux adhérents, comment déterminer les primes et répartir les charges* ».

Le problème formulé d'une manière aussi générale conduit à une infinité de solutions, qui toutes doivent satisfaire l'équation suivante [1] :

$$\sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{r^t} \sum_{x=x_0}^{\omega} \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{r^n} (A^{(t)}_{x,n} - M^{(t)}_{x,n} \cdot p^{(t)}_{x,n}) = 0$$

en désignant par:

r 1 + i, i étant le taux annuel de l'intérêt,

x l'âge des assurés au moment de leur adhésion, x_0 l'âge minimum, ω l'âge maximum,

t l'époque de l'adhésion, comptée à partir de la constitution du groupement,

n la durée d'assurance, comptée à partir de l'adhésion de l'assuré au groupement, N la plus grande durée qui puisse intervenir,

$M^{(t)}_{x,n}$ le nombre de personnes qui adhèrent au groupement à l'époque t, âgées de x années, et qui en font encore partie comme payeurs de primes, à l'époque $t + n$, âgées de $x + n$ années, avec une activité de n années,

$p^{(t)}_{x,n}$ le montant que chacun des $M^{(t)}_{x,n}$ assurés doit verser à l'époque $t + n$.

$A^{(t)}_{x,n}$ la valeur des versements aux assurés, à effcetuer dans l'intervalle de temps $t + n$ à $t + n + 1$, valeur rapportée à l'époque $t + n$, et correspondant à l'ensemble des assurés qui ont adhéré à l'époque t, à l'âge x, et pour lesquels, après n années, des droits aux prestations subsistent pour eux-mêmes ou pour leurs ayants droit.

Tous les systèmes d'assurance doivent satisfaire cette équation et, réciproquement, de cette équation doivent dériver tous les modes de répartition des charges dans tout groupement d'assurance. *Les diverses possibilités pour la répartition des charges diffèrent l'une de l'autre uniquement par la manière dont le groupement total est subdivisé en*

[1] Dr Julius Kaan. Die Finanzsysteme in der öffentlichen und in der privaten Versicherung. — *Versicherungswissenschaftliche Mitteilungen des österreichisch-ungarischen Verbandes der Privat-Versicherungsanstalten.* Neue Folge, 5. Bd. Wien, 1910.

sous-groupements, tels que chacun subvienne à ses propres charges, sans apport extérieur.

En se servant d'une représentation graphique, — deux systèmes de coordonnées rectangulaires dans l'espace, x, n, t: le système des dépenses et celui des recettes — il est aisé de définir les modes les plus usuels de répartition des charges. Il suffit de considérer, entre ces deux systèmes, l'équivalence par points, par droites, par plans, dans diverses positions.

Le rapporteur termine par quelques remarques concernant les principes de la capitalisation des primes et de la répartition des charges annuelles, et indique qu'il a préconisé ce dernier principe pour l'introduction des assurances sociales en Suisse [1].

5. — M. Jules CHUARD (Lausanne). — *A propos des homologies de H. Poincaré.* — La notion d'homologie est fondamentale en Analysis situs. Pour la définir, l'auteur envisage des surfaces fermées de l'espace usuel, qu'il suppose triangulées et orientées de manière à faire apparaître un polyèdre de α_0 sommets, α_1 arêtes et α_2 faces. Il en tire les tableaux de Poincaré: T_1 de rang ρ_1 et T_2 de rang ρ_2.

A la matrice T_1, il associe un système d'équations linéaires et homogènes, le système A.

Il a démontré, dans sa thèse de doctorat, que:

1° Le système A possède un système fondamental de μ solutions en nombres 0, + 1 et — 1, ($\mu = \alpha_1 - \rho_1$).

Si donc $c_1\, c_2 \ldots c_\mu$ sont ces μ solutions, toute solution entière du système A peut se mettre sous la forme

$$C = \sum_{i=1}^{\mu} t_i c_i \,, \qquad (1)$$

les t_i étant des nombres entiers.

2° A toute solution en nombres entiers du système A, correspond un contour fermé, constitué par des arêtes du polyèdre et réciproquement.

L'expression (1) représente donc indifféremment un contour fermé ou la solution correspondante.

Soient Γ_k ($k = 1, 2, \ldots, \alpha_2$) les solutions correspondant aux frontières des faces. Elles sont définies par les colonnes de la matrice T_2.

3° Si la surface est bilatère, l'on peut former un système fondamental avec ρ_2 solutions Γ_k et $\mu - \rho_2 = \alpha_1 - \rho_1 - \rho_2 = \lambda$ solutions c_i

---

[1] Emile MARCHAND. A propos de l'introduction des assurances sociales en Suisse. Contribution à l'étude des diverses possibilités pour la répartition des charges. *Bulletin de l'Association des Actuaires suisses,* 16me Bull., 1921.

de sorte que toute solution entière peut se mettre sous la forme

$$C = \sum_{l=1}^{\lambda} t_l c_l + \sum_{k=1}^{\rho_2} \tau_k \Gamma_k , \qquad (2)$$

les t_l et les τ_k étant des entiers.

4° Si la surface est unilatère, le même système de solutions est complet. Il existe alors des solutions entières de la forme (2) dans lesquelles les τ_k sont des fractions multiples de $\frac{1}{2}$. Cela résulte de la présence, dans la matrice T_2, d'un coefficient de torsion (invariant ou diviseur élémentaire) égal à 2.

Mais une homologie nulle caractérise un contour fermé, qui sur une surface, limite une aire. Nous avons donc, avec Poincaré, les homologies fondamentales

$$\Gamma_k \sim 0 . \qquad (k = 1, 2, \ldots, \alpha_2)$$

Puisqu'une aire se compose nécessairement de faces, toute homologie s'exprimera à l'aide des homologies fondamentales.

Une homologie apparaît donc comme une solution entière du système A qui résulte uniquement des colonnes de la matrice T_2.

Si $C \sim 0$, c'est que dans (1) tous les t_l sont nuls. D'où

$$C = \sum_{k=1}^{\rho_2} \tau_k \Gamma_k . \qquad (3)$$

Si, d'autre part

$$C = \sum_{l=1}^{\lambda} t_l c_l + \sum_{k=1}^{\rho_2} \tau_k \Gamma_k ,$$

$$C' = \sum_{l=1}^{\lambda} t'_l c_l + \sum_{k=1}^{\rho_2} \tau'_k \Gamma_k ,$$

sont tels que toutes les différences $t_l - t'_l$ soient nulles, l'on a les homologies

$$C - C' \sim 0 \qquad \text{soit} \qquad C \sim C' .$$

Plus généralement, soient σ contours C_γ

$$C_\gamma = \sum_{l=1}^{\lambda} t_{l\gamma} c_l + \sum_{k=1}^{\rho_2} \tau_{k\gamma} \Gamma_k \qquad (\gamma = 1, 2, \ldots, \sigma$$

l'on peut écrire l'homologie

$$\sum_{\gamma=1}^{\sigma} m_\gamma C_\gamma \sim 0 \ ,$$

si les λ égalités suivantes sont satisfaites

$$\sum_{\gamma=1}^{\sigma} t_{i\gamma} m_\gamma = 0 \ ,$$

d'où une conséquence importante: Entre $\lambda + 1$ contours fermés tracés sur une surface fermée, il existe toujours une homologie nulle. $\lambda + 1$ exprime l'ordre de connexion de la dite surface.

Les homologies possèdent toutes les propriétés des solutions entières d'un système d'équations linéaires et homogènes. On peut additionner ou soustraire deux homologies, multiplier ou diviser (quand c'est possible) tous les termes d'une homologie, l'on retrouve une homologie.

Relativement à la division, il faut remarquer qu'elle peut conduire à un contour C défini par (3), tel que les τ_k soient des fractions. Dans ce cas l'homologie $C \sim 0$ est dite « par division ». Dans tous les autres cas elle est dite « sans division ».

L'homologie « par division » est une expression symbolique qui ne peut exister que dans le cas de surfaces unilatères. Elle met en évidence des contours fermés qui, parcourus une fois, ne limitent pas d'aire, mais qui en deviennent frontières, si on les parcourt deux ou un nombre pair de fois dans le même sens.

6 et 7. — M. Rolin Wavre (Neuchâtel). — I. *Réponse à la question posée par M. Plancherel sur le problème de la médiane à une courbe fermée plane.* — Voir *l'Ens. math.*, t. XXI, p. 265-277, *Sur l'équation fonctionnelle* $f[\varphi_1(t)] = f[\varphi_2(t)]$.

II. *Remarque sur quelques équations de Fredholm dans le domaine complexe.* — M. Pincherle a montré le parti que l'on pouvait tirer de l'équation de Fredholm pour l'étude de certaines équations fonctionnelles dans le domaine complexe notamment l'équation de Schröder à une variable pour le problème local. Je voudrais en partant d'un point de vue un peu différent traiter l'équation de Schrœder à plusieurs variables étudiées par M. Leau dans sa thèse (*Annales de Toulouse*, 1897).

Soient $\Gamma_1 \Gamma_2 \ldots, \Gamma_n$; n courbes fermées simples analytiques situées dans les plans des variables complexes $x_1\ x_2 \ldots x_n$ limitant un domaine D à $2n$ dimensions et n fonctions $\psi_p(x_1 \ldots x_n)$, $(p = 1, 2 \ldots n)$ holomorphes dans le domaine D et sur sa frontière, telles que

$x_1 x_2 \dots x_n$ étant quelconque sur $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$ respectivement, ψ_p soit intérieur à Γ_p.

Ceci étant, on peut démontrer en transformant légèrement une méthode employée par M. Julia, dans son mémoire sur l'itération des fonctions rationnelles, qu'à tout point intérieur au domaine D correspond également un point intérieur à D et que les itérés successifs $\psi_p(x_1, \dots x_n) \dots, \psi_p[\psi_1(x_1 \dots x_n), \psi_2, \dots, \psi_n]$ d'un point quelconque de D convergent vers le point double unique P de la substitution x_p, ψ_p. Il est dès lors immédiat que sous ces conditions l'équation de Fredholm

$$A\varphi(x_1 \dots x_n) = \frac{\lambda}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma'_n} \dots \int_{\Gamma'_1} \frac{\varphi(z_1 \dots z_n)\, dz_1 \dots dz_n}{[z_1 - \psi_1(x_1, \dots, x_n)] \times \dots \times [z_n - \psi_n(x_1, \dots, x_n)]}$$

est entièrement équivalente à l'équation de Schrœder

$$\varphi(x_1, \dots x_n) = \lambda\varphi[\psi_1(x_1, \dots, x_n) \dots \psi_n(x, \dots, x_n)] .$$

Système d'équations fonctionnelles. Je vais donner une condition suffisante pour que le système

$$U_p(x) = \lambda \sum_{q=1}^{\infty} A_{pq}(x)\, U_q[\psi_q(x)] \qquad (p = 123 \dots) \qquad (1)$$

où les fonctions $U_p(x)$ sont inconnues puisse se ramener à une unique équation de Fredholm. Les $A_{pq}(x)$ et $\psi_q(x)$ étant holomorphes à l'intérieur d'un cercle C et sur ce cercle lui-même, il suffit que x étant quelconque sur C, $\psi_q(x)$ soit intérieur à C et cela pour tous les $q = 1,2,3 \dots$; et que l'on ait, les α_q formant une suite de nombres positifs tels que $\sum_{q=1}^{\infty} \alpha_q$ converge:

$$\left| \frac{A_{pq}(x)}{z - \psi_q(x)} \right| < \alpha_q$$

quels que soient $q = 1,2,3 \dots$ et les variables x et z sur C. Les systèmes de la forme (1) à un nombre fini de fonctions inconnues

$$U_p(x) = \lambda \sum_{q=1}^{n} A_{pq}(x)\, U_q[\psi_q(x)]$$

ont été étudiés par M. Leau dans sa thèse et dans le cas où toutes les

fonctions $\psi_q(x)$ sont identiques par M. Böttcher (*Annales de l'Ecole Normale*, 1909).

8 et 9. — M. G. Juvet (Neuchâtel). — I. *Sur la méthode de la variation des constantes en mécanique céleste.* — Soit un système canonique:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \; ; \; \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2 \ldots n) \qquad (1)$$

où $H = H_1 + R$. Supposons que ni H_1, ni R ne dépendent explicitement du temps t. Si l'on sait résoudre le système canonique où $H = H_1$, on sait qu'il est aisé de résoudre, grâce à la méthode de la variation des constantes arbitraires, le problème posé et cela, en le ramenant à un système canonique où $H = R$. La démonstration que nous donnons ici, et que nous croyons nouvelle, utilise systématiquement la notion de transformations canoniques (T.C.).

Soit une T.C.:

$$q_i = f_i(\alpha_k, \beta_k) \; , \quad p_i = g_i(\alpha_k, \beta_k) \; . \qquad (2)$$

transformant H_1 en $\varphi(\alpha_1 \ldots \alpha_n)$; alors, on sait que:

$$\alpha_i = \text{const.} \qquad \beta_i = -\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_i} t + \gamma_i \; . \quad (3) \qquad (\text{où} \quad \gamma_i = \text{const})$$

On peut prendre α_i et γ_i comme nouvelles variables canoniques au lieu de α_i et β_i, et chercher à mettre à leur place dans (2), des fonctions de t, tellement choisies que (2) donne l'intégrale générale de (1), où $H = H_1 + R$. On a, en effet,

$$\Sigma \beta_i \delta\alpha_i = \Sigma \gamma_i \delta\alpha_i - \delta(t\varphi) \; ,$$

ce qui montre bien qu'on peut conjuguer à α_i, la grandeur γ_i. D'autre part:

$$\Sigma p_i \delta q_i = \Sigma \beta_i \delta\alpha_i + \delta S \; ,$$

d'où:

$$\Sigma \gamma_i \delta\alpha_i = \Sigma p_i \delta q_i + \delta(t\varphi - S) \; . \qquad (4)$$

Or la fonction génératrice H' du système canonique, qui définit les fonctions α_i et γ_i, est:

$$H' = -L' + \Sigma \gamma_k \frac{d\alpha_k}{dt} \qquad (5)$$

où L' est définie par:

$$\frac{d(\Sigma \gamma_k \delta\alpha_k)}{dt} = \delta L' \; .$$

Mais on sait que

$$\frac{d(\Sigma p_i \delta q_i)}{dt} = \delta L \qquad \left(L = -H + \Sigma p_i \frac{dq_i}{dt}\right)$$

(3) montre donc que:

$$L' = L + \frac{d}{dt}(t\varphi - S) \tag{6}$$

Exprimons H′ au moyen des α et des γ. On a d'après (3) :

$$\Sigma \gamma_i \frac{d\alpha_i}{dt} = \Sigma \beta_i \frac{d\alpha_i}{dt} + \frac{d\varphi}{dt} . t$$

or

$$\Sigma \beta_i \frac{d\alpha_i}{dt} = \Sigma p_k \frac{dq_k}{dt} - \frac{dS}{dt}$$

car d'après les hypothèses faites S ne dépend pas explicitement de t et $dS = \delta S$. On a donc:

$$\Sigma \gamma_i \frac{d\alpha_i}{dt} = \overline{\Sigma p_k \frac{dq_k}{dt} - \frac{dS}{dt}} + \overline{t\frac{d\varphi}{dt}}$$

où la barre indique qu'il faut effectuer le changement de variables indiqué. (5) devient alors, en utilisant (6):

$$H' = \overline{-L - t\frac{d\varphi}{dt} - \varphi + \frac{dS}{dt} + \Sigma p_k \frac{dq_k}{dt} - \frac{dS}{dt}} + \overline{t\frac{d\varphi}{dt}}$$

$$= \overline{-L + \Sigma p_k \frac{dq_k}{dt}} - \varphi = \overline{H} - \varphi$$

Or $\overline{H} = \varphi + \overline{R}$; donc: $H' = \overline{R}$. Le système canonique cherché est bien, comme les résultats classiques nous le confirment:

$$\frac{d\alpha_i}{dt} = \frac{\partial \overline{R}}{\partial \gamma_i} ; \qquad \frac{d\gamma_i}{dt} = -\frac{\partial \overline{R}}{\partial \alpha_i} .$$

II. *Les équations aux dérivées fonctionnelles et la théorie de la relativité.* — M. VOLTERRA[1] a montré que les équations lagrangiennes qui

[1] *Rendiconti dei Lincei,* 1890, VI, p. 127.

définissent les fonctions $y_1 \ldots y_k$, rendant extrémale l'intégrale multiple:

$$I = \int \ldots \int F\left(x_1 \ldots x_k ; y_1 \ldots y_k ; \frac{\partial y_1}{\partial x_1}, \ldots \frac{\partial y_i}{\partial x_j}, \ldots \frac{\partial y_k}{\partial x_k}\right) d_{x_1} - d_{x_k}$$

peuvent prendre une forme canonique. On définit de nouvelles variables pour remplacer les $\frac{\partial y_i}{\partial x_j} = y_{ij}$, par une transformation analogue à celle de Poisson-Hamilton: $p^{ij} = \frac{\partial F}{\partial y_{ij}}$, alors si l'on introduit la fonction

$$H = - F + \sum_{ij} p^{ij} y_{ij} ,$$

le système canonique définissant les y et les p est:

$$\sum_j \frac{\partial p^{ij}}{\partial x_j} = - \frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad \frac{\partial y_i}{\partial x_j} = - \frac{\partial H}{\partial p^{ij}}. \tag{C}$$

Lorsque F dépend des y_{ij} par l'intermédiaire exclusif des déterminants fonctionnels $\frac{D(y_{i_1}, y_{i_2} \ldots y_{i_k})}{D(x_1, x_2, \ldots x_k)}$, M. Volterra a montré que le système canonique (C') (de forme légèrement différente de celle de C) peut être résolu si l'on connaît une solution de certaine équation aux dérivées fonctionnelles partielles dépendant d'un nombre suffisant de constantes arbitraires. Il généralise ainsi les méthodes de Jacobi.

Dans le cas qui nous occupe et qui se présente en relativité (détermination des g_{ik} par un principe de moindre action, ou équations du champ électromagnétique, etc.) [1], je n'ai pu obtenir que l'équation aux dérivées fonctionnelles partielles à laquelle satisfait la fonctionnelle I. I est en effet une fonctionnelle qui dépend de la frontière R_{k-1}, limitant la région de l'espace à k dimensions sur laquelle on intègre, et qui dépend encore des valeurs des y_i sur cette frontière. En suivant pas à pas les idées de Jacobi [2], on arrive à démontrer que I satisfait à l'équation:

$$I'_n + H\left(x_1 \ldots x_k ; y_1 \ldots y_n, \frac{\partial I}{\partial(y_1, x_1)}, \ldots \frac{\partial I}{\partial(y_i, x_j)}, \ldots \frac{\partial I}{\partial(y_n, x_k)}\right) = 0 \tag{1}$$

---

[1] Voir WEYL : *Raum, Zeit, Materie* (Die Miesche Theorie et le chapitre IV), Berlin, 4e éd., 1921. — Une édition française de cet ouvrage vient de paraître.

[2] *Vorlesungen über Dynamik*, 19e leçon.

On a remplacé dans $H(x_j, y_i, p^{ij})$, les p^{ij} par les $\frac{\partial I}{\partial(y_i, x_j)}$ qui sont les dérivées fonctionnelles partielles de I, par rapport à y_i, dans la direction de l'axe x_j. I'_n est la dérivée normale de I. Ces grandeurs sont définies par les identités suivantes. Calculons δI, en variant les y_i sur le contour de quantités δy_i sans altérer le contour R_{k-1}, alors:

$$\delta I = \int_{R_{k-1}} \left[\sum_i \left\{ \sum_j \frac{\partial I}{\partial(y_i, x_j)} \cos(x_j, n) \right\} \delta y_i \right] d^{(k-1)}\tau$$

où (x_j, n) est l'angle que fait la normale à R_{k-1} avec l'axe des x_j, et où $d^{(k-1)}\tau$ est l'élément d'hypervolume de R_{k-1}.

Si maintenant on fait varier le contour, sans toucher aux y_i, cette variation étant définie par un glissement δn de chacun des points de la frontière R_{k-1}, le long de la normale qui y est relative, la dérivée I'_n est définie par la formule qui donne la variation $\delta' I$ de la fonctionnelle I, dans ce cas:

$$\delta' I = \int_{R_{k-1}} I'_n \, \delta n \, d^{(k-1)}\tau .$$

Nous avons cherché à tirer de la considération de l'équation (1) des conséquences utiles pour l'intégration du système (C); le problème est plus difficile que celui que s'est posé M. Volterra. Nous avons obtenu jusqu'ici quelques résultats intéressants grâce à l'emploi de deux méthodes dont on trouvera l'une dans les C. R. de la Société suisse de physique, mais nous ne sommes pas encore parvenu à généraliser tous les résultats de Jacobi [1].

10. — M. C. Carathéodory (Smyrne). — *Sur des transformations générales de Legendre.*

Nouvelles diverses. — Nominations et distinctions.

Allemagne. — M. M. Dehn, professeur à l'Ecole technique supérieure de Breslau, a été nommé professeur ordinaire à l'Université de Francfort a. M.

M. P. Guthnick a été nommé professeur ordinaire d'astronomie à l'Université de Berlin et directeur de l'Observatoire universitaire à Neubabelsberg.

[1] Depuis le mois de septembre, nous avons pu faire notamment avancer cette question (janvier 1922, date de la correction des épreuves).

M. O. Haupt, professeur à l'Université de Rostock, a été nommé professeur ordinaire à l'Université de Erlangen.

M. le Prof. M. von Laue (Berlin), a été appelé à la chaire de physique théorique de l'Université de Hambourg.

M. L. Lichtenstein, professeur à l'Université de Münster, a été nommé professeur ordinaire à l'Université de Leipzig.

M. P. Riebesell a été nommé professeur à l'Université de Hambourg.

M. le Prof. A. Schoenflies, de l'Université de Francfort a. M., a pris sa retraite.

La préparation des professeurs de mathématiques en Prusse. — Jusqu'en juin 1921 les candidats aux examens d'Etat pour le professorat dans l'enseignement secondaire supérieur devaient avoir passé par les universités, les semestres suivis dans une Ecole technique supérieure n'étant compté que pour trois au maximum. A la suite d'un décret ministériel l'Ecole technique supérieure est mise sur le même rang que l'Université pour ce qui est de la préparation des candidats à l'enseignement des sciences mathématiques, physiques et chimiques. En outre les ressortissants d'une Ecole technique supérieure qui auront subi avec succès l'examen d'Etat, auront accès au grade de docteur-ingénieur.

Belgique. — *Cercle mathématique de Belgique.* — Le 20 octobre 1921 a été fondé à Bruxelles le Cercle mathématique de Belgique. Cette société, qui a son siège à Bruxelles, a pour but de contribuer au progrès et à la diffusion des sciences mathématiques en Belgique. Elle s'occupe exclusivement des questions touchant les mathématiques pures et appliquées au sens le plus large de ces mots. Elle s'efforcera d'établir un lien permanent entre l'enseignement secondaire et l'enseignement supérieur. Le Cercle tient une séance ordinaire par mois, sauf en août et en septembre. Le premier comité, nommé pour deux ans, est composé comme suit: Président: M. Th. De Donder; Vice-Président: M. Mineur; Secrétaire: M. Errera; Secrétaire-adjoint: M. Van Muldera; Trésorier: M. Casteels; Trésorier-adjoint: M. Vanderlinden.

Les Amis des nombres. — Le 3 juin 1921, à Bruxelles, MM. A. Gérardin et Kraïtchik ont fondé la société « Les Amis des nombres » dont le but est de réunir les professionnels et les amateurs qui s'intéressent surtout aux nombres. La séance de constitution a eu lieu au Palais mondial, Bruxelles-Cinquantenaire, siège social. Le Bureau est composé de M. Otlet, président, et de MM. Kraïtchik, A. Errera, Bosman et A. Gérardin, secrétaire. Le « *Sphinx-Œdipe* », dirigé par M. Gérardin (Nancy) insérera les communications officielles du Comité.

Danemark. — M. J. Nielsen, professeur à l'Ecole technique supérieure de Breslau, a été nommé professeur à l'Académie d'agriculture de Copenhague, en remplacement de M. le Prof. Chr. Crone.

Etats-Unis. — *Mouvement de réforme de l'enseignement mathématique.* — A la suite des travaux publiés par la sous-commission américaine de la commission internationale de l'enseignement mathématique, un important mouvement de réforme a pris naissance aux Etats-Unis. Un comité national (National Committee on Mathematical Requirements) a été constitué sous les auspices de l'Association mathématique américaine. Il est composé de MM. J.-W. Young, Dartmouth College (Hannover, N. H.), président; J.-A. Foberg (Chicago), vice-président; A.-R. Crathorne, University of Illinois; C.-N. Moore, University of Cincinnati; E.-N. Moore, University of Chicago; David-Eugène Smith, Columbia University, New York; H.-W. Tyler, Massachusetts Institute of Technology; W.-F. Downey Boston, Mass.; V. Blair, New-York City; A.-C. Olney, Sacramento, Calif.; Raleigh Schorling, New-York City; P.-H. Underwood, Galveston, Tex.; Eula A. Weeks, St. Louis, Mo.

Nous ne manquerons pas de tenir nos lecteurs au courant des résultats de l'enquête que vient d'entreprendre le comité américain.

France. — M. E. Borel a reçu le grade de docteur *honoris causa* de l'Université de Dublin.

M. Cotton, professeur de physique théorique et de physique céleste, est appelé à prendre la chaire de physique générale à l'Université de Paris, vacante à la suite du décès de M. Lippmann.

M. Darmois est nommé professeur d'Analyse supérieure à l'Université de Nancy.

M. Deltheil est nommé professeur de mathématiques générales à l'Université de Toulouse.

M. Drach, professeur de mathématiques générales, est appelé à la chaire d'application de l'analyse à la Géométrie de l'Université de Paris.

M. Giraud est nommé professeur de Calcul différentiel et intégral à l'Université de Clermont.

M. P. Humbert est nommé professeur de mathématiques à l'Université de Montpellier.

M. Pérès est nommé professeur de mécanique rationnelle à l'Université d'Aix-Marseille.

M. E. Turriere est nommé professeur de mécanique rationnelle à l'Université de Montpellier.

Académie des Sciences de Paris. — M. J. Andrade, professeur à l'Université de Besançon a été élu correspondant de la section de mécanique. — M. Marcel Brillouin, professeur au Collège de France, a été élu membre de la section de physique générale, en remplacement de Gabriel Lippmann, décédé.

Italie. — *R. Accademia dei Lincei.* — M. R. Marcolongo, professeur à l'Université de Naples, a été élu membre national dans la section des mathématiques pures et appliquées. — Dans la même

section M. G. Armellini, professeur à l'Université de Pise, a été élu membre correspondant; MM. A. Einstein (Berlin) et Ch. De la Vallée Poussin (Louvain) ont été élus associés étrangers.

Società dei XL. — La Société des XL a conféré le prix de mathématiques pour 1921 à M. O. Tedone, professeur à l'Université de Gênes. Elle a admis au nombre de ses membres MM. E. Almansi, professeur à l'Université de Rome, et G. Ricci, professeur à l'Université de Padoue.

Université de Rome. — A la suite d'un vœu de la Faculté des Sciences ont été transférés à l'Université de Rome: M. G. Bagnera, de Palerme, pour l'Analyse infinitésimale; M. F. Severi, de Padoue, pour l'analyse algébrique; M. F. Enriques, de Bologne, pour l'enseignement qu'on vient d'instituer, de Méthodologie mathématique. — M. Zondadari a été admis, en qualité de privat-docent pour la géométrie descriptive, à la Faculté des Sciences de Rome.

Institut technique supérieur de Milan. — M. U. Cisotti, professeur de Physique mathématique à l'Université de Pavie, a été nommé professeur de mécanique rationnelle.

Conférence de M. A. Einstein. — M. A. Einstein a tenu en octobre dernier quelques conférences de vulgarisation sur sa théorie de la relativité: trois à Bologne sur l'invitation de la société de philosophie scientifique présidée par M. Enriquès, et une à Padoue, sur l'invitation de l'Académie de cette ville. Ces conférences ont attiré une foule extraordinaire de savants et d'amateurs donnant lieu à grand retentissement même dans la presse quotidienne.

Società Italiana di Matematiche « Mathesis ». — La Société italienne de Mathématiques « Mathesis » s'est réunie à Naples, du 13 au 16 octobre 1921, en un congrès présidé par M. le Prof. F. Enriques (Bologne). L'organisation locale de la réunion avait été confiée à un comité dirigé par M. le Prof. R. Marcolongo. Nous aurons l'occasion de revenir sur quelques-uns des objets inscrits à l'ordre du jour de ce congrès qui avait attiré un grand nombre de mathématiciens venus de toutes les parties de l'Italie. Bornons-nous pour le moment de signaler les *conférences* de MM.:

F. Enriques: Evoluzione del concetto della Scienza nei pensatori matematici. — G. Scorza : Il principio di causabilità e le applicazioni delle matematiche alla Scienze economiche e sociali. — R. Marcolongo: Sul materiale diddattico d' insegnamento. — R. Marcolongo: Nel mondo degli atomi. — D. Mercogliano : L' insegnamento dinamico. — Bemporad: L' astronomia nelle scuola medie. — Gallucci : Critica e ipercritica. — G. Fano: Le Scuole di Magistero.

Suisse. — *Université de Genève.* — M. le Professeur C. Cailler prend sa retraite pour raison de santé. — M. R. Wavre a été admis en qualité de privat-docent.

Nécrologie.

Ed. Gubler. — Nous apprenons avec regrets la mort de M. le Prof. Ed. Gubler, survenue à Zurich le 6 novembre 1921. Né le 7 juillet 1845, E. Gubler fit toute sa carrière dans l'enseignement secondaire; il prit sa retraite en 1914. On lui doit des manuels très appréciés et de nombreux rapports sur l'organisation et la méthodologie des mathématiques dans les écoles moyennes. Il fut, avec le regretté C. Brandenberger, l'un des fondateurs de la Société suisse des professeurs de mathématiques (1901). Gubler fit partie de la sous-commission suisse de l'enseignement mathématique et rédigea le rapport sur les mathématiques dans les Ecoles supérieures de jeunes filles.

En qualité de privat-docent, puis de chargé de cours à l'Université de Zurich, Ed. Gubler eut l'occasion de prendre une part active à la préparation des candidats à l'enseignement scientifique par ses cours sur la Trigonométrie, l'Algèbre, l'Analyse et la théorie des assurances.

Ses recherches mathématiques se rattachent à l'Analyse et plus particulièrement à la théorie des fonctions de Bessel. Il publia avec le Professeur J.-H. Graf, une introduction à la théorie des fonctions de Bessel de 1re et de 2me espèces (Berne, 1898-1900), d'après les leçons et les manuscrits de son illustre maître le Professeur L. Schlaefli. H. F.

H.-A. Schwarz. — On annonce la mort du mathématicien allemand M. Hermann-A. Schwarz, décédé à Berlin dans sa 79e année. Elève de Weierstrass, Schwarz débuta dans l'enseignement supérieur en 1867 en qualité de professeur extraordinaire à l'Université de Halle. Nommé professeur à l'Ecole polytechnique fédérale, à Zurich, en 1869 en remplacement de Christoffel, il y resta six ans. En 1875, il fut appelé à l'Université de Gœttingue, puis, en 1892, à la mort de Weierstrass, il rentra à Berlin pour occuper la chaire de son illustre maître.

L'œuvre mathématique de Schwarz appartient aux domaines de l'Analyse et de la théorie des surfaces. Tous ceux qui ont suivi les progrès de la Géométrie infinitésimale connaissent ses importants mémoires sur les surfaces minima.

Schwarz était membre de l'Académie des Sciences de Berlin, de la Société des Sciences de Gœttingue et correspondant de l'Académie des Sciences de Paris.

Au moment de mettre sous presse nous apprenons le décès de M. Camille Jordan, membre de l'Institut, et de M. Charles Cailler, professeur honoraire de l'Université de Genève.

NOTES ET DOCUMENTS

Cours universitaires.

Année 1921-1922.

ITALIE[1]

Bologna ; *Università.* — Burgatti: Teoria matematica dei fluidi e cinetica dei gas, 3. — Enriques: Teoria delle funzioni ellittiche e abeliane, 3. — Pincherle: Omografie ed equazioni lineari negli spazi ad infinità numerabile di dimensioni. Equazioni integrali. Elementi della teoria dei gruppi continui, 5. — N. N.: Fisica matematica, 3.

Catania ; *Università.* — Cipolla: Applicazioni diverse della teoria dei gruppi d'ordine finito, 4. — Lazzarino: Dinamica dei sistemi rigidi e semi rigidi, 4. — Picone: Calcolo delle variazioni, 5. — N. N.: Geometria superiore, 3.

Genova ; *Università.* — Loria: Geometria numerativa, 5. — Severini: Calcolo delle variazioni, 4. — Tedone: Fondamenti di ottica geometrica. Principi di cristallografia ed ottica dei cristalli, 4.

Messina ; *Università.* — Calapso: Teoria generale delle superficie, 4. — Giambelli: Breve introduzione alla geometria algebrica. Interpretazioni geometriche dell' eliminazione algebrica, 4. — Palatini: Calcolo assoluto con applicazioni alla relatività, 4.

Napoli ; *Università.* — Amodeo: Il secolo di Newton e Leibniz, 3. — Del Re: Teoria analitica della propagazione del calore, 3. — Marcolongo: Teoria della elasticità, 3. — Montesano: Corrispondenze birazionali involutorie nel piano e nello spazio, 3. — Pascal: Le funzioni analitiche. Le funzioni abeliane, 3.

Padova ; *Università.* — d'Arcais: Funzioni armoniche. Funzioni di variabile complessa; rappresentazioni conformi. Integrali euleriani, 4. — Gazzaniga: Teoria dei numeri, 3. — Ricci: Esposizione dei metodi di calcolo differenziale assoluto. Teoria della elasticità, 4. — Severi: Geometria non euclidea, 4. — Soler: Teoria della forma dei pianeti e teoria delle maree, 4. — Tonolo; Equazioni a derivate parziali del primo e del secondo ordine, 3.

---

[1] Les cours fondamentaux, tels que Analyse algébrique et infinitésimale, Géométrie analytique, descriptive, projective, Mécanique rationnelle, existant dans toute université, ne figurent pas dans la liste.

Palermo ; *Università.* — Bagnera: Funzioni di variabile complessa. Funzioni di due variabili. Funzioni algebriche e loro integrali, 3. — De Franchis: Funzioni algebriche ed integrali abeliani, 3. — Gebbia: Elettromagnetismo, elettroinduzione, elettrodinamica, 4 1/2. — Signorini: Teoria della relatività, 3. — Strazzeri: Geometria differenziale, 3.

Pavia ; *Università.* — Berzolari: La geometria sopra una curva algebrica svolta con metodo algebrico e con metodo iperspaziale, 3. — Brusotti: Curve piane algebriche reali, 2. — Cisotti: Teoria dell' elettricità, 3. — Gerbaldi: Funzioni di variabile complessa. Funzioni ellittiche, 3. — Sibirani: Problema ristretto dei tre corpi, 3. — Vivanti: Calcolo delle variazioni, 3.

Pisa ; *Università.* — Armellini: Teoria della Luna, 4. — Bertini: Iperspazi e geometria sopra una curva algebrica, 4. — Bianchi: Equazioni differenziali ordinarie e alle derivate parziali. Geometria infinitesimale, 3. — Maggi: Ottica fisica, 3.

Roma; *Università.* — Bisconcini: Applicazioni geometriche del calcolo, 3. — Bompiani: Teoria geometrica dei numeri, 3. — Cantelli: Statistica matematica, 3. — Matematica attuariale, 3. — Castelnuovo: Funzioni ellittiche e funzioni abeliane, 3. — Crudeli: Introduzione agli studi superiori di elettricità, 3. — Levi-Civita: Questioni e valutazioni asintotiche, 3. — Perna: Teorie complementari di analisi matematica. 3. — Volterra: Equazioni integrali, integro-differenziali, a derivate funzionali e applicazioni alla fisica matematica, 3. — Masse fluide vuotanti, 3.

Torino ; *Università.* — Boggio: Teoria delle figure d'equilibrio delle masse fluide rotanti, 3. — Fubini: Le equazioni alle derivate parziali, 3. — Segre: Capitoli scelti di geometria algebrica, 3. — Somigliana: Capillarità e fenomeni collegati, 3. — Togliatti: Geometria iperspaziale, 2.

BIBLIOGRAPHIE

P. Appell. — **Eléments de la Théorie des vecteurs et de la Géométrie analytique.** — Un vol. petit in-8° relié de 148 p. et 57 figures; 4 francs; Payot et Cie, Paris, 1921.

C'est toujours une chose intéressante que de voir comment un ouvrage d'enseignement très élémentaire est écrit par un grand savant.

Ce fut évidemment pour M. Appell un simple jeu que d'amalgamer, avec le maximum d'harmonie, les premiers principes de géométrie vectorielle et de géométrie analytique. Et il paraît étonnant que cette chose si simple n'ait pas été faite depuis longtemps, du moins de manière aussi explicite.

Tout bachelier devrait prendre l'opuscule en question pour s'élever au-dessus du programme acquis et quelle que soit l'orientation projetée pour de nouvelles études mathématiques.

On arrive, de la manière la plus simple, aux conceptions vectorielles fondamentales, telles celles des produits intérieur et extérieur, la géométrie analytique leur donnant immédiatement leur sens tangible.

La normale à une surface apparaît avant le plan tangent ce qui donne sa véritable signification à la notion de différentielle totale.

On pressent que les propriétés des coniques centrées peuvent se dérouler derrière la proportionnalité qui existe, en ces courbes, entre l'abscisse et la sous-normale.... Ne multiplions point les citations. Ajoutons plutôt que ce petit livre inaugure une « Collection Payot » à laquelle on peut prédire un retentissant succès si les opuscules à venir sont tous susceptibles de rendre les mêmes services que le premier publié grâce à M. Appell.

A. Buhl (Toulouse).

Pierre Boutroux. — **L'idéal scientifique des mathématiciens.** — 1 vol. in 16 de 276 pages; 8 fr.; F. Alcan, Paris, 1920.

M. Pierre Boutroux en deux volumes sur « Les Principes de l'analyse mathématique », volumes analysés ici (1914, p. 151; 1919, p. 391), avait déjà fait œuvre de mathématicien, de philosophe et d'historien. Le présent ouvrage, publié dans la *Nouvelle Collection scientifique* de M. E. Borel, paraît revenir, surtout au point de vue philosophique, sur la constitution de la pensée mathématique prise dans sa forme vivante, pratique et féconde et non dans un des aspects chers à telle ou telle école logique.

Nous ne pouvons dire que très brièvement que l'historien a fait un intéressant tableau de la conception hellénique et des conceptions synthétiques qui ont suivi; le mathématicien et le philosophe apparaissent avec l'histoire de l'analyse moderne, avec l'étude de l'objectivité des faits mathématiques et surtout avec les si troublantes questions actuelles et relatives aux corrélations physico-mathématiques.

De remarquables passages sont empruntés au si regretté Duhem et commentés dans un esprit de sympathie qui les met admirablement en lumière. Les constructions mathématiques ont une valeur propre; elles n'ont point besoin des vérifications continuelles des physiciens anglais. Et, en effet, un enchaînement correct de pensées est conditionné par tout l'univers sensible; il doit naturellement donner quelque chose de correct également interprétable dans cet univers. De là la valeur constructive des mathématiques à laquelle on peut se fier sans recourir continuellement aux vérifications.

Il est particulièrement indiqué ici d'insister sur les dernières pages relatives aux méthodes d'enseignement. Là encore M. Pierre Boutroux est éclectique et conseille l'éclectisme. Les méthodes de découverte et les méthodes pédagogiques sont loin d'être les mêmes mais le pédagogue le plus inflexible est généralement celui qui n'a rien découvert. L'originalité créatrice ira rarement sans originalité d'exposition et, finalement, c'est surtout celle-ci qui est désirable comme pouvant donner l'idée la plus exacte de la souplesse et de la richesse de la science. A. Buhl (Toulouse).

A. S. Eddington. — **Espace, temps et gravitation.** La théorie de la relativité généralisée dans ses grandes lignes. Exposé rationnel suivi d'une étude mathématique de la théorie. Ouvrage traduit de l'anglais par J. Rossignol, avec une Introduction de P. Langevin. — 1 vol. in-8°, 130 p.; 28 fr.; Librairie Scientifique J. Hermann, Paris, 1921.

Aucun lecteur de *l'Enseignement mathématique* ne sera resté étranger au mouvement scientifique issu des idées d'Einstein. Les ouvrages en français sont rares sur ce sujet. Celui de M. Eddington vient combler une lacune et ne saurait être assez recommandé aux physiciens, mathématiciens ou philosophes qui désirent s'initier aux théories nouvelles et se faire une juste idée de leur signification et des conséquences qu'elles comportent.

Ce livre débute par un exposé (262 pages) n'exigeant aucune connaissance technique. Cette première partie est suivie d'un complément mathématique (149 pages) écrit spécialement pour l'édition francaise. Dans la partie mathématique qui nous intéresse particulièrement les principes du calcul tensoriel sont exposés d'une manière aussi claire que brève et le mathématicien auquel le nouveau symbolisme ne serait pas connu y trouvera le moyen de se le rendre familier. La mécanique de la relativité, l'électro-magnétisme et la géométrie de M. Weyl de date très récente y sont exposés d'une manière très claire et ce qu'elles contiennent d'essentiel ne peut échapper au lecteur. M. Eddington ne pouvait en un nombre si restreint de pages aborder les détails des déductions et son ouvrage ne peut nous dispenser de la lecture des mémoires originaux sur ces questions nouvelles; mais il atteint son but en mettant vivement en lumière les caractères essentiels des problèmes nouveaux. Cet exposé mathématique à lui seul est des plus suggestifs.

M. Eddington dans l'ensemble de son livre expose les résultats fondamentaux de la théorie de la relativité qui semblent désormais acquis à la science. Il ne s'arrète pas là. Plusieurs chapitres sont consacrés aux questions qui restent encore ouvertes: l'univers considéré comme un tout, et la géométrie de M. Weyl qui est une extension de la géométrie de Riemann et qui permet de rendre compte géométriquement des phénomènes électromagnétiques de la même manière que la géométrie riemannienne rend compte des phénomènes gravitiques. On sait d'ailleurs que dans cette voie où l'on cherche à créer une géométrie naturelle assez vaste et assez souple de manière à y faire entrer la physique tout entière; M. Eddington lui-même est allé plus loin encore que M. Weyl qui s'imposait quelques conditions supplémentaires suggérées par l'expérience.

Il y est fait allusion dans l'exposé mathématique. Dans les derniers chapitres, à propos de l'électromagnétisme l'auteur montre pourquoi les efforts des physiciens doivent être dirigés aujourd'hui vers la théorie des quanta et pourquoi la théorie actuelle d'Einstein et Weyl est incapable de percer le mystère de la structure de l'électron tant que la fusion des deux théories n'aura pas été faite. Ce livre donne un aperçu général de la position actuelle du problème de la matière.

Il faut mentionner à part le prologue « Qu'est-ce que la géométrie ? » écrit sous forme de dialogue entre un mathématicien, un physicien et un relativiste qui résume élégamment les controverses agitées ces dernières années sur le rapport de la géométrie et de l'expérience; et le chapitre intitulé « La lumière pesante » relatant les expéditions à l'isle du Prince et au Brésil dont l'une fut dirigée par M. Eddington lors de l'éclipse de mai 1919. Ce livre peut donc intéresser ceux qui ne possédant pas l'instrument mathématique désirent se faire une idée claire des notions fondamentales de la théorie: temps local, contraction de Lorentz, multiplicité riemannienne, géométrie non euclidienne, courbure de l'espace... et ceux auxquels

la théorie est déjà familière par les problèmes qu'il pose et les horizons qu'il ouvre.

Première partie. — PROLOGUE. Qu'est-ce que la géométrie ? — CHAP. I. La contraction de Fitzgerald Lorentz. — II. La relativité. — III. L'univers à quatre dimensions. — IV. Les champs de force. — V. Les différents genres d'espaces. — VI. La nouvelle loi de gravitation et l'ancienne. — VII. La lumière pesante. — VIII. Autres preuves de la théorie. — IX. Quantité de mouvement et énergie. — X. Vers l'infini. — XI. Electricité et gravitation. — XII. Sur la nature des choses. — APPENDICE. Notes mathématiques. Note historique.

Deuxième partie. — Partie théorique. — I. Principes élémentaires. — II. Le calcul tensoriel. — III. La loi de gravitation. — IV. La mécanique de la relativité. — V. Electricité. R. WAVRE (Genève).

G.-H. HALPHEN. — ŒUVRES publiées par les soins de C. Jordan, H. Poincaré, E. Picard, avec la collaboration de E. Vessiot. Tome III. — 1 vol. gr. in-8° de XII-520 p.; 90 francs; Gauthier-Villars, Paris, 1921.

Nous avons déjà publié (1916, p. 365; 1919, p. 393) les analyses des deux premiers volumes de ces magnifiques *Œuvres*. Pour le tome troisième un aperçu condensé est particulièrement facile, car ce tome ne contient que quatre mémoires dont deux sont si célèbres que les titres seuls suffiraient à attirer les mathématiciens désireux de se replonger dans ces belles productions. Précédés par une Notice due à M. Camille Jordan, les écrits en question sont:

I. Mémoire sur la réduction des équations différentielles linéaires aux formes intégrables (pp. 1-260).

II. Mémoire sur la classification des courbes gauches algébriques (pp. 261-455).

III. Sur quelques équations différentielles linéaires du quatrième ordre (pp. 457-462).

IV. Sur les invariants des équations différentielles linéaires du quatrième ordre (pp. 463-514).

Faut-il rappeler que le premier mémoire fut présenté au concours du Grand Prix des Sciences mathématiques en même temps que celui où Henri Poincaré, inspiré du même sujet, construisait les fonctions fuchsiennes. Quel admirable assaut d'intelligence ! Et comme les traits du génie se reconnaissent bien dans le choix heureux d'une idée fondamentale. Un des moyens les plus utiles, écrit Halphen (p. 3), pour étendre le champ de nos connaissances en calcul intégral consiste dans les changements de variables. La chose était vraie; elle le sera sans doute toujours. Elle sort des champs où Halphen opérait et aujourd'hui se révèle tout aussi féconde en Physique mathématique là où, par exemple, les formules fondamentales de l'électromagnétisme se rattachent aux principes les plus simples de l'analyse.

Pour Halphen, il s'agit surtout de substitutions $x = \varphi(X)$, $y = Y\,\psi(X)$ telles que l'équation différentielle transformée soit à coefficients constants, où à intégrale rationnelle, où à coefficients doublement périodiques et à intégrale uniforme. Une équation linéaire d'ordre quelconque ne peut évidemment être ramenée à une forme donnée par une substitution aussi simple que celle qui vient d'être indiquée mais c'est alors qu'intervient la notion des *invariants*, l'étude de ceux-ci indiquant s'il est possible ou

non de transformer l'équation en un type maniable soit algébriquement soit par le moyen des transcendantes de la théorie des fonctions elliptiques. Pour ne citer que les noms français, rappelons que la question a été également travaillée par Laguerre, par MM. P. Appell, E. Picard, Ed. Goursat. Elle est trop fameuse pour que nous ayons à insister.

La classification des courbes gauches algébriques est encore une question que personne n'avait jamais traitée avec la magistrale puissance qu'y révèla Halphen. Elle est inépuisable et alimente des travaux récents; là encore, la première chose à conseiller aux jeunes chercheurs est de revenir à Halphen même. On sait combien le sujet est fuyant. Déjà pour les courbes du quatrième degré, cette notion de degré ne suffit plus; les quartiques gauches se scindent en deux types essentiellement distincts d'après le nombre des points doubles apparents. Au neuvième degré les deux notions deviennent insuffisantes à leur tour et il faut faire intervenir des propriétés de cordes et ainsi de suite. Les entiers que l'on introduit, concurremment avec le degré, sont liés par de curieuses relations arithmétiques dont il serait imprudent de juger du sens sur des cas trop réduits; leur illustre auteur crut nécessaire de s'expliquer en traitant de la classification des courbes de degré 120.

Rappelons encore que la méthode algébrique fondamentale consiste à faire usage de la représentation

$$\varphi(x, y) = 0 , \qquad z\chi(x, y) = \psi(x, y) .$$

Ainsi toute courbe gauche est l'intersection d'un cylindre et d'une *monoïde* de Cayley. La science actuelle n'a pas trouvé mieux et l'on peut remarquer que ces dernières équations ne manquent point d'analogie formelle avec celles de la substitution qui, dans le mémoire précédent, transformait les équations différentielles linéaires. C'est toujours le génie qui, malgré la diversité de ses aboutissements, révèle sa présence sous des aspects simples et immuables; nous sommes même tenté de dire sous des aspects « invariants ». A. Buhl (Toulouse).

Harold Hilton. — **Plane algebraic Curves.** — 1 vol. de XVI-388 p. avec nombreuses figures. Oxford, at the Clarendon Press, 1920.

Ceci est un volume extrêmement remarquable, que l'auteur s'est proposé d'écrire pour compléter l'œuvre analogue de Salmon. On connaît assez l'excellence de cette dernière, mais les progrès de la Science commencent à la faire vieillir.

M. Harold Hilton est d'ailleurs fort consciencieux; sa préface nous confie quelques craintes, par exemple celle de s'attirer le reproche de ne traiter, dans un si vaste sujet, que les points l'intéressant personnellement. Qu'il se rassure ! Les lecteurs discerneront rapidement les remarquables innovations dues à ses travaux personnels et le tact avec lequel il a dirigé ses emprunts aux productions d'autrui.

Je n'essaierai pas d'une analyse détaillée se poursuivant de manière logique; elle risquerait d'être presque aussi longue que le livre. Mais que de glanes merveilleuses il y a à faire.

A la page 10 et dans la moitié de cette page, il nous est démontré que deux courbes d'ordres N et n se coupent en Nn points ! Il suffit de considérer le faisceau défini par l'origine et les points d'intersection. Il dépend

d'un éliminant, en forme de déterminant, dont le degré est immédiatement visible !

Si l'on compare avec les interminables mémoires écrits jadis sur cette question on conviendra que le présent livre débute par de bonnes impressions. La construction des courbes est enrichie de nombreux exemples; les foyers et les points singuliers sont classés d'une manière systématique. Sous le nom de *branches superlinéaires*, nous étudions celles qu'on peut atteindre, en partant d'un point de la courbe pris pour origine, au moyen d'un développement de y suivant les puissances fractionnaires de x. Faut-il rappeler l'usage de tels développements quant à la distinction des branches d'une fonction algébrique.

Les polaires d'ordre *quelconque* sont immédiatement définies et conduisent aux courbes associées (hessienne, steinérienne, cayleyenne, jacobienne, etc.); toutes aident à la recherche des singularités de la courbe primitive ou sont des lieux de singularités de ses polaires: elles trahissent, des unes aux autres, des singularités qu'il serait fort difficile d'apercevoir sur une courbe isolée! Aux nombres de Plücker est joint le genre *(deficiency)* si bien qu'après les unicurales nous étudions tout naturellement les courbes de genres 1 et 2 avec les fonctions elliptiques associées au genre 1.

M. P. Appell a écrit quelque part qu'il ne fallait pas creuser à l'envie la géométrie des courbes algébriques sans montrer les relations de la chose avec la théorie des fonctions elliptiques et abéliennes. M. H. Hilton semble s'être très heureusement inspiré de la même idée.

Sous le nom de *courbes dérivées*, voici les développées, les courbes inverses, les podaires, les orthoptiques, les cissoïdes, conchoïdes, parallèles et autres types. L'intérêt ici consiste surtout en la *dérivation* des singularités qui se produit quand on passe de la courbe primitive à la courbe dérivée.

A propos de l'intersection de deux courbes, je signale la théorie des *points résiduels*, peu connue en France. Il s'agit d'égaler un polynome f à $A\varphi + B\psi$ mais ceci peut se faire sous une forme particulièrement symétrique en adjoignant un sixième polynome d'où six courbes dont les intersections se peuvent figurer conventionnellement, sur les faces et les arêtes d'un cube, par groupe *corésiduels* entre lesquels existent des lois de symétrie que la construction spatiale indiquée rend intuitives.

Les généralités jusqu'ici exposées occupent exactement 200 pages. Voici maintenant des études extrêmement intéressantes des cubiques. Leur représentation paramétrique est étudiée aussi bien avec les fonctions elliptiques de Jacobi qu'avec celles de Weierstrass. L'auteur évite de tracer des courbes canoniques particulièrement symétriques; que de tracés simples et bizarres nous sont ainsi révélés notamment avec les quartiques unicursales à trois nœuds réels. D'ailleurs la classification des quartiques est tout simplement merveilleuse: toutes les singularités y défilent. Quant aux quartiques absolument générales, ce sont leurs 28 tangentes doubles qui servent de point de départ. Elles donnent des groupes *syzygétiques* ou *asyzygétiques* suivant que les points de contact sont ou non sur des coniques. Nous retrouvons ici des questions qui étaient chères au regretté Humbert et, d'autre part, les complexes de Steiner formés de tangentes syzygétiques.

On sait aussi que l'algèbre des 28 droites précédentes est analogue à celle des 27 qu'on peut placer sur une *surface* cubique. Le rapprochement est élégamment étudié.

Les deux derniers chapitres se rapportent aux singularités *réelles*, avec

d'élégants théorèmes de Klein et Hilbert, ainsi qu'à de nouvelles correspondances interprétables sur surfaces algébriques. Hors du texte courant se trouvent partout d'innombrables problèmes souvent pourvus de brèves explications. L'ouvrage est d'une haute valeur éducative et esthétique.

A. BUHL (Toulouse).

H. A. LORENTZ; A. EINSTEIN; H. MINKOWSKI. — **Das Relativitätsprinzip.** Eine Sammlung von Abhandlungen. Mit Anmerkungen von A. SOMMERFELD und Vorwort von O. BLUMENTHAL. Dritte, verbesserte Auflage. — 1 vol. in-8°, 146 p.; B. G. Teubner, Leipzig.

Il nous suffira de signaler brièvement cette nouvelle édition du petit volume renfermant les Mémoires fondamentaux de MM. Lorentz, Einstein et Minkowski sur la théorie de la relativité. Tous ceux qui désirent approfondir cette théorie tiendront à avoir constamment sous la main les travaux originaux qui ont servi de point de départ aux nombreuses recherches d'ordre mathématique ou physique.

Le célèbre Mémoire de Minkowski „Raum und Zeit" est suivi d'une intéressante note de M. Sommerfeld contenant une série d'annotations et d'utiles remarques sur ce mémoire.

La 3e édition a été augmentée des mémoires récents de M. Einstein sur la théorie générale de la relativité.

H. F.

Michel PÉTROVITCH. — **Mécanismes communs aux phénomènes disparates.** — 1 vol. in-16 de 280 pages; 8 fr.; F. Alcan, Paris, 1921.

Le sujet n'est pas nouveau pour qui connaît les préoccupations de M. Michel Pétrovitch, de l'Université de Belgrade. L'éminent professeur nous avait déjà donné une « Mécanique des phénomènes fondée sur les analogies » publiée, en 1906, avec tout l'appareil mathématique nécessaire, dans la *Collection Scientia*. M. R. Marcolongo a analysé ce petit livre ici-même (t. IX, 1907, p. 78).

Aujourd'hui les mêmes et ingénieuses idées reviennent au jour, en langage ordinaire, dans la *Nouvelle Collection scientifique* dirigée par M.-E. Borel.

Et le langage ordinaire, dans un tel sujet, n'est pas moins expressif que le langage mathématique, puisqu'on parle couramment d'un « accord » sentimental, d'une « inharmonie » entre caractères et que le gros bon sens populaire a même toute une provision de mots variés pour assimiler à des milieux visqueux l'ensemble des difficultés qui éteignent tant d'énergies.

Des phénomènes mécaniques à schèmes analogues, l'auteur passe, en effet, non seulement aux phénomènes physico-chimiques, mais aux phénomènes biologiques, normaux ou pathologiques, et, de même, aux phénomènes sociaux, économiques et moraux.

Il y a longtemps, à coup sûr, que savants et philosophes ont été hantés, par l'idée de telles généralisations. La première difficulté est d'avoir, à l'appui de celles-ci, un nombre suffisant de faits; or le livre de M. Pétrovitch est extrêmement riche à cet égard et témoigne d'un esprit d'observation auquel on ne peut adresser le fréquent reproche d'être localisé sur un trop petit nombre de points. S'il ne donne une science nouvelle, il montrera tout au moins que la science ordinaire est d'une plasticité bien plus grande qu'on ne le croit communément.

A. BUHL (Toulouse).

L. Roy. — **Cours de Mécanique appliquée,** à l'usage des élèves des Instituts techniques et des candidats au Certificat de Mécanique appliquée. — 1 vol. gr. in-8° de VIII-216 p. et 86 fig.; 30 fr.; Gauthier-Villars et Cie, Paris, 1921.

Ceci est le tome second d'un nouveau cours de Mécanique appliquée qui, avec le concours de MM. Camichel et Lamotte, sera publié en quatre volumes. Il n'y a évidemment aucun inconvénient à commencer par la volume actuel qui forme un tout absolument complet. Il se divise en deux parties: Statique graphique et Résistance des matériaux.

On sait que la statique ordinaire, avec sa géométrie spatiale, n'est guère adaptable aux besoins de l'ingénieur; ce dernier a particulièrement besoin du trait et des épures intuitives et c'est ce que fournit immédiatement M. L. Roy en partant des conceptions fondamentales du *dynamique* et du *funiculaire* d'un système statique. Le solide reposant sur deux appuis, l'appui à rotule, l'appui à rouleaux, le solide à trois articulations et le solide encastré illustrent immédiatement les constructions fondamentales. Dans le cas de forces continues, les contours polygonaux du dynamique et du funiculaire se changent en des courbes; au cas usuel des forces parallèles correspond notamment une courbe funiculaire et une équation différentielle à intégration graphique immédiate.

Ces préliminaires permettraient de passer rapidement sur les systèmes articulés si l'auteur, à propos des fermes, ne nous en présentait une, dite *en éventail*, uniquement triangulée par des tirants, qui relève de ses conceptions personnelles et qui apporte une note bien originale parmi les systèmes que la pratique semblait avoir fixés. Une ligne polygonale d'arbalétriers supérieurs admet évidemment des compressions; une ligne de clôture inférieure n'admet que des tensions, qui seront les plus considérables de toutes, et, entre ces deux lignes, il n'y a que des tirants à tension si faible qu'on pourra les réaliser par des fils métalliques échappant à la vue. Curieuse, économique et invisible architecture !

La première partie de l'ouvrage se termine par les quadratures graphiques et mécaniques: nous y trouvons naturellement les quadratures approchées ainsi que les déterminations graphiques de centres de gravité et de moments d'inertie, toutes choses indispensables pour aborder élégamment la Résistance des matériaux.

Cette dernière science est intermédiaire entre la théorie générale de l'élasticité trop compliquée et la statique rationnelle absolument insuffisante. La voie la plus commode semble celle qui consiste à établir des équations générales d'équilibre aussi élémentaires que celles de la statique pure et à montrer, sur de très nombreux exemples, comment on doit les compléter et les interpréter dans le cas des solides naturels. L'idée n'est pas neuve mais M. L. Roy en a tiré un parti particulièrement brillant en prenant des exemples très variés, simples et fort bien uniformisés malgré la première apparence disparate de beaucoup de questions.

Les tractions sur les fils nous conduisent aux câbles des puits de mine, à la chaînette des lignes télégraphiques, aux fibres artificielles telles que celles du béton armé. Les rivures illustrent la résistance au glissement. Les flexions des poutres et des ressorts vont jusqu'à la théorie du ressort en spirale. Les torsions aboutissent aux ressorts à tige et en hélice. Les déformations composées se rapportent aux maçonneries et aux poutres assemblées. Avec l'étude des lignes élastiques on perçoit particulièrement bien le caractère ingénieusement utilitaire des théories en litige. Les lignes élastiques dépen-

dent des fonctions elliptiques, mais ce que la pratique en utilise se peut traiter en leur attribuant une allure parabolique; aussi n'avons nous ici qu'une analyse polynomiale très simple qui se continue d'ailleurs avec les poutres à travées solidaires.

Euler ne dédaigna point de donner, pour les poutres chargées debout, une formule encore attachée à une équation différentielle réduite à une forme élémentaire.

Les arcs sont rattachés à l'idée de retournement de la parabole des ponts suspendus et les principes des constructions statiques se retrouvent dans les machines quand il s'agit de juger de la résistance à l'éclatement des chaudières ou des volants.

Les chapitres sont nombreux et courts, les exemples numériques très abondants; M. L. Roy, en ce volume si aisé et si documenté a remarquablement ouvert la voie à ses collaborateurs. A. Buhl (Toulouse).

Emile Turrière. — **Sur le calcul des objectifs astronomiques de Frauenhofer.** Travaux du Bureau d'études d'optique du Service géographique de l'Armée, fascicule N° 1, décembre 1917. — 1 fasc. in-8°, de 123 p. avec 3 figures de texte et trois planches hors texte; Paris, Imprimerie du Service géographique de l'Armée.

Id. — **Le problème des objectifs de longues-vues dans la dioptrique contemporaine. Exposition des recherches de M. H. Harting.** Travaux du Bureau d'études d'optique du Service géographique de l'Armée. — 1 fasc. in-8° de 149 p., avec 10 fig. et deux planches hors texte; Paris, Imprimerie du Service géographique de l'Armée.

Id. — **Optique industrielle.** Tome premier: Verres et verreries d'optique, objectifs photographiques (Petzval, Steinheil, Goerz, Taylor, Zeiss) Téléobjectifs. Appendice: Calcul des objectifs astronomiques de Fraunhofer (Deuxième édition du fascicule N° 1 des travaux du bureau d'études d'optique du Service géographique de l'Armée). — 1 vol. in-8°, de VI, 265 + 115 = 380 p. avec un portrait hors texte, trois planches hors texte et 83 figures; 22 francs; Delagrave, Paris, 1921.

1. — Le premier fascicule concerne les calculs d'établissement d'avant-projets d'objectifs de lunettes astronomiques à deux lentilles simples et accolées. L'auteur a ramené les équations du problème à une forme particulièrement élégante. Il a pu former effectivement l'équation du cinquième degré de Mossotti qui détermine le choix des verres pour une correction simultanée des deux aberrations de sphéricité dans l'axe et hors de l'axe; ce qui lui a permis de présenter diverses remarques sur les travaux effectués en Allemagne, par M. E. von Hoegh et par M. H. Harting. Il a repris d'autre part l'étude des conditions d'Herschel, d'Airy et de Prazmowsky

De nombreuses indications historiques sur ces types d'objectifs sont données dans ce travail.

2. — Les travaux de *dioptrique* de M. H. Harting sont bien connus en Allemagne. Il a paru utile d'en présenter un exposé et d'en reproduire tous les résultats pratiques susceptibles d'intéresser les constructeurs d'instruments d'optique.

Le plan de cet opuscule est le suivant:

Introduction aux recherches de M. H. Harting. Les tables de Harting. Le mémoire de M. H. Harting sur la théorie de l'objectif astronomique à deux lentilles accolées. Les objectifs de Fraunhofer d'après M. H. Harting.

Calcul d'un aplanat. L'astigmatisme et la courbure d'image dans les objectifs astronomiques. Les objectifs de microscopes de M. H. Harting. L'objectif de longue-vue à prisme. Les objectifs à trois lentilles accolées de M. H. Harting. Les objectifs à trois lentilles accolées, l'équation générale de Mossotti. Verres de Guinand et verres d'Iéna.

L'opuscule se termine par la traduction de deux notes de M. W. Zschokke et M. von Rohr sur le verre d'optique.

3. — Le premier tome du *Traité d'optique industrielle* de M. Turrière est essentiellement un ouvrage de documentation, établi en vue de recherches sur la construction des instruments d'optique. Plus de cent pages concernent tout d'abord les verres d'optique; avant toute étude d'optique, il est, en effet, indispensable de connaître les matières dont on dispose.

Un premier chapitre contient des généralités sur les verres d'optique, les lois de dispersion des verres et quelques indications bibliographiques sur l'influence de la température et de la pression.

Le chapitre II est consacré à l'étude des essais des verriers antérieurement à Fraunhofer et aux verres de Fraunhofer.

Le chapitre III contient l'historique des verres de Guinand. C'est à P.-L. Guinand, né en 1748 aux Brenets, canton de Neuchâtel (Suisse), que revient, en effet, l'honneur d'avoir porté au plús haut degré de perfection la fabrication des verres destinés aux instruments d'optique. Ce même chapitre se poursuit par l'historique de la célèbre verrerie Feil, qui est devenue actuellement l'établissement Parra-Mantois. Le catalogue ce cette dernière verrerie est reproduit in-extenso.

Dans le chapitre IV, l'auteur s'est efforcé de mettre au point l'étude des essais effectués en Angleterre, par Chance principalement. Il a rendu compte des travaux tout récemment entrepris par M. M. T. Smith et R. W. Cheshire sur l'emploi des verres de Chance en vue de la construction d'objectifs de longues-vues.

Dans le chapitre V, on trouvera une étude des travaux effectués à Iéna, à la suite de E. Abbe et de Schott. L'auteur a donné toutes les caractéristiques des verres d'Iéna, d'après le catalogue de Schott. Quelques indications sur la verrerie de Sendling terminent ce chapitre .

Un court chapitre VI sur les objectifs à liquides termine cette étude, inédite et entièrement nouvelle, de ces diverses questions relatives aux verres d'optique.

Au VIIme chapitre commence l'étude des objectifs photographiques les plus anciens et les plus simples: les objectifs photographiques avec diaphragme antérieur; puis viennent successivement les objectifs de Petzval (chapitre VIII), les objectifs de Steinheil (IX), les objectifs symétriques et pseudo-symétriques (X), les objectifs de Goerz (XI); un chapitre XII particulièrement étendu, en raison de l'importance du sujet, est consacré aux objectifs de Taylor et des formes qui en dérivent: les triplets de Voigtlaender, les triplets de Zeiss, le tessar de Zeiss. Le chapitre XIII complète l'étude des objectifs de Zeiss, par une étude des travaux de P. Rudolph.

Au chapitre XIV, on trouvera des données et des indications bibliographiques sur les téléobjectifs, depuis les lunettes polyaldes jusqu'aux instruments modernes.

En appendice, est reproduit le mémoire sur *le calcul des objectifs astronomiques de Fraunhofer* dont il est rendu compte plus haut.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

1. Livres nouveaux :

Tous les ouvrages adressés à la Rédaction sont signalés ici avec une brève indication de leur contenu, sans préjudice de l'analyse dont ils peuvent être ultérieurement l'objet sous la rubrique « Bibliographie ».

Les Maîtres de la pensée scientifique, collection de mémoires et ouvrages publiée par les soins de Maurice Solovine; Librairie Gauthier-Villars & Cie, Paris. Viennent de paraître:

André-Marie Ampère. — **Mémoires sur l'électromagnétisme et l'électrodynamique.** — 1 vol. in-16, xiv-110 p., 17 figures, broché, Fr. 3,50.

Pierre-Simon Laplace. — **Essai sur les probabilités,** I et II. — 2 vol. in-16, xi-110 p., broché, fr. 3,50 le volume.

Le volume consacré à Ampère contient les deux célèbres mémoires traitant « de l'action exercée sur un courant électrique, par un autre courant, le globe terrestre ou un aimant » et de la « Détermination de la formule qui représente l'action mutuelle de deux fractions infiniment petites de conducteurs voltaïques. »

L'essai philosophique sur les probabilités de Laplace a été reproduit d'après la 5e édition (1825); c'est la dernière faite du vivant de l'auteur et la plus complète.

P. Appell. — **Eléments d'Analyse Mathématique,** à l'usage des candidats au certificat de mathématiques générales, des ingénieurs et des physiciens. Cours professé à l'Ecole centrale des Arts et Manufactures. Quatrième édition entièrement refondue. — 1 vol. in-8, de 716 p. avec 220 fig., fr. 65; Gauthier-Villars & Co., Paris.

Quatrième édition entièrement refondue, de l'excellent traité dans lequel M. P. Appell expose les éléments essentiels d'analyse mathématique en vue de leur application à la Géométrie, à la Mécanique et à la Physique. Sous sa nouvelle forme cet ouvrage est appelé à rendre de réels services aux ingénieurs et aux physiciens, aux élèves des grandes Ecoles techniques et aux candidats au certificat de mathématiques générales.

P. Bachmann. — **Grundlehren der neueren Zahlentheorie** (*Göschens Lehrbücherei, I. Gruppe, Reine Mathematik*), mit 10 Figuren. Zweite verbesserte Auflage mit einem Gedächnisworte, herausgegeben von Prof. Dr. R. Haussner. — 1 vol. in-8; 246 p., broché, 50 Mk.; Walter de Gruyter & Co. Berlin-Leipzig.

Nouvelle édition des principes fondamentaux de la théorie moderne des nombres de Paul Bachmann, publié par le Prof. R. Haussner. Elle débute par une notice sur P. Bachmann (1837-1920).

L. Bieberbach. — **Lehrbuch der Funktionentheorie**. Band I, Elemente der Funktionentheorie. — 1 vol. in-8, 314 p. et 80 fig.; B. G. Teubner, Leipzig.

Ce premier volume du traité sur la théorie des fonctions entrepris par M. Bieberbach comprend dans leurs parties essentielles, les notions qui jouent aujourd'hui un rôle fondamental dans la théorie des fonctions: nombres complexes, limites, séries, fonctions d'une variable complexe, intégrale de Cauchy, fonctions elliptiques, fonction gamma.

S. Bloch. — **Cours élémentaire de Géométrie descriptive**, à l'usage des élèves de mathématiques A et B, des candidats aux écoles navales de Saint-Cyr, à l'Institut agronomique. — 1 vol. in-8, de 218 p. et 337 fig; 18 fr.; Librairie Hachette, Paris.

Ce *Cours élémentaire de Géométrie descriptive* forme la première partie du *Cours de Géométrie descriptive* rédigé par le même auteur à l'usage des candidats aux Grandes Ecoles. Ces éléments ont pour but d'initier les élèves de mathématiques aux méthodes de géométrie descriptive qu'ils approfondiront plus tard.

Introduction. — I. Géométrie cotée. — II. Géométrie à deux plans de projection. — III. Courbes et surfaces, ombres. — IV. Notions de Planimétrie et de Nivellement. Notions sur les cartes.

T. Boggio. — **Calcolo differenziale con applicazioni geometriche**. *Volume* I : Funzioni di una variabile (*Collezione Lattes*). — 1 vol. in-18, 611 p., Lire 58; S. Lattes & Co; Torino-Genova, 1921.

Ce premier volume est consacré exclusivement à l'exposé des propriétés fondamentales des fonctions d'une variable réelle et aux applications géométriques. Par la méthode suivie il se rattache plus particulièrement aux travaux de MM. Peano et Burali-Farti.

B. Branford. — **A Study of Mathematical Education** including the Teaching of Arithmetic. New Edition enlarged and revised. — 1 vol. in-8, 420 p.: 7 sh. 6, Clarendon Press, Oxford, 1921.

Ecrites par un professeur possédant une grande expérience de l'enseignement, ces considérations sur la méthodologie des mathématiques seront lues avec profit par les maîtres de l'enseignement primaire et secondaire. Elles sont aussi de nature à intéresser tous ceux qui suivent les progrès de la philosophie et de la psychologie des mathématiques.

L. Brouhon. — **Méthode élémentaire entièrement inédite pour la résolution facile et rapide des équations algébriques** de tous degrés et des équations transcendantes. — 1 vol. in-8. 138 p.; Bénard, Soc. An., Liège, 1914.

— **Résolution facile et rapide des équations numériques,** supplément au mémoire de 1914. — 1 vol. in-8, 31 p.; Bénard, Soc. An., Liège, 1921.

L'auteur expose une méthode qui permet d'obtenir, sans recherches préalables ni tâtonnements, à l'aide d'un certain nombre d'opérations élémentaires, les racines réelles d'une équation algébrique à coefficients numériques de degré quelconque et d'un grand nombre d'équations transcendantes.

C. Burali-Forti. — **Geometria descrittiva.** *Vol.* I, Assonometria, — 1 vol. in-18, 170 p.; XXI planches comprenant 170 fig.; Lire 17. — *Vol.* II Proiezione quotata. Proiezione Monge. Prospettiva. — 1 vol. in-18, 144 p., XIX planches et 143 fig.; Lire 14; S. Lattes & Co., Torino-Genova.

Le premier volume débute par une introduction (76 pages) dans laquelle l'auteur examine 1. les éléments fondamentaux concernant la représentation d'une figure sur un plan; 2. des compléments de géométrie utiles dans l'étude de la Géométrie descriptive. Le reste du volume est consacré à l'Axonométrie et à ses applications.

Le deuxième volume comprend l'étude des projections cotées, des projections orthogonales sur deux plans (méthode de Monge) et de la projection centrale avec application à la perspective.

C. Burali-Forti et T. Boggio. — **Meccanica razionale** (*Collezione Lattes*). — 1 vol. in-18, 425 p. Lire 24; S. Lattes & Co, Torino-Genova, 1921.

Les auteurs se sont proposés de présenter sous une forme élémentaire les notions de mécanique rationnelle qui constituent les fondements de la mécanique appliquée. La méthode d'exposition est basée sur l'emploi systématique du calcul vectoriel.

C. Burali-Forti e R. Marcolongo. — **Elementi di calcolo vettoriale** con numerose applicazioni alla geometria, alla meccanica e alla fisica-matematica. — 1 vol. in-8, xix-250 p.; Lire 20; Nicola Zanichelli, Bologne.

Deuxième édition, revue et augmentée, de l'ouvrage bien connu dans lequel MM. Burali-Forti et Marcolongo exposent les éléments du calcul vectoriel. Les notions théoriques sont groupées dans la première partie sous le titre « opérations et opérateurs vectoriels ». La seconde partie est entièrement consacrée aux applications à la géométrie, à la mécanique et à la physique mathématique.

H. Burkhardt. — **Einführung in die Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen,** fünfte umgearbeitete Auflage besorgt von Dr. G. Faber, mit zahlreichen Figuren im Text. — 1 vol. in-8, 286 p.; Walter de Gruyter & Co, Berlin-Leipzig.

Très appréciée et très répandue dans les pays de langue allemande cette introduction à la théorie des fonctions analytiques paraît aujourd'hui en 5 éditions, revue et complétée par M. le prof. Faber.

C. Canesi. — **Vocabolario interlingua**, italiano (inglese) e italiano, interlingua, con una prefazione di G. Peano. — 1 vol. in-8, 174 p.;Lire 10; G. B. Paravia & Co, Torino, 1921.

Vocabulaire de la langue internationale « Interlingua » avec orthographe latine, publié sous les auspices de l'Académie pro interlingua.

H. S. Carslaw. — **Introduction to the Theory of Fourier's Series and Integrals.** Second Edition completely revised. — 1 vol. in-8, 323 p.; 30 Sh.; Macmillan and Co., Londres.

Introduction to the Mathematical Theory of the Conduction of Heat in Solids. Second Edition completely revised. — 1 vol. in-8, 264 p.; 30 sh.; Macmillan and Co., Londres.

Deuxième, entièrement remaniée, de l'ouvrage publié en 1906 par M.

Carslaw sous le titre *Fourier's Series and integrals and the mathematical Theory of Conduction of Heat.*

Le premier volume comprend l'étude des séries, des intégrales définies, des séries de Fourier et des intégrales de Fourier. Le second est consacré à la théorie mathématique de la conductibilité de la chaleur dans les solides.

W. Dieck. — **Mathematisches Lesebuch** für die Mittelstufe höherer Lehranstalten aller Art, für Volkshochschulen, Fachschulen u.s.w. — 5 fasc. in-8, de 80 p.; prix: fasc. 1, 5 M. 40; fasc. 2-4, 6 M. 40; fasc. 5, 10 M. 40; W. Osterkamp in Sterkrade, 1920-1921.

Dans ce choix de lectures mathématiques destiné à l'enseignement secondaire supérieur, le Professeur Dieck a groupé, à côté d'articles originaux, des mémoires et conférences de divers auteurs sur des sujets accessibles à cette catégorie d'élèves: histoire des mathématiques, biographies de mathématiciens, sur le rôle des mathématiques, méthodologie et philosophie des mathématiques.

P. B. Fischer. — **Darstellende Geometrie.** (Aus Natur und Geisteswelt). — 1 vol. in-16, 90 p. et 59 fig.; B. G. Teubner, Leipzig.

Introduction à la géométrie descriptive contenant les notions essentielles relatives aux projections cotées, à la projection centrale et à la méthode de Monge.

M. Franck. — **La loi de Newton est la loi unique,** Théorie mécanique de l'univers. — 1 vol. in-8, de 158 p.; Fr. 12,50; Gauthier-Villars & Cie, Paris.

Dans cet ouvrage de philosophie scientifique, l'auteur examine quelle serait la loi mécanique régissant l'Espace, si l'on admettait:

1. que toute l'Energie potentielle réside dans le *vide absolu* des physiciens;
2. que toute la matière est formée d'un élément origine unique d'inertie, mobile dans le *vide*.

Le développement du travail consiste dans l'examen de la concordance avec les faits constatés des conséquences de la loi unique ainsi formulée.

La première conséquence de la confirmation de la formule newtonienne, à laquelle la loi énoncée permettrait de donner son interprétation exacte; telle est la raison du titre que l'auteur a donné à son Ouvrage. Cette théorie utilise seulement les notions d'espace, temps, force, inertie admises en géométrie euclidienne et en Mécanique rationnelle.

J. Haag. — **Cours complet de mathématiques spéciales.** Tome II: **Géométrie.** — 1 vol. in-8 de VII-662 p., 65 fr.; Gauthier-Villars & Cie, Paris.

Désirant ne pas se limiter exclusivement à la méthode analytique, l'auteur a intitulé ce tome II: *Géométrie* et non pas « Géométrie analytique. » Cela lui permet d'employer le raisonnement géométrique toutes les fois que cette méthode est plus simple ou plus féconde.

L'ouvrage est divisé en deux parties. Dans la première sont exposée les théories générales, dans la seconde, les applications à l'étude des courbes et des surfaces classiques.

P. Humbert. — **Introduction à l'étude des fonctions elliptiques.** — 1 fasc. in-8, 38 p.; 3 fr.; Librairie Scientifique J. Hermann, Paris.

Destinée aux étudiants des Facultés des sciences, cette Introduction à

l'étude des fonctions elliptiques complète d'une manière utile les notions sur les fonctions analytiques que l'on donne généralement au cours de calcul différentiel et intégral.

L'auteur montre comment la notion de double périodicité d'une fonction se rattache immédiatement par l'inversion de l'intégrale elliptique, à la théorie des résidus avec laquelle l'étudiant est déjà familiarisé.

C. M. Jessop. — **Elementary Analysis.** — 1 vol. in-8, 174 p.; 6 sh.; University Press, Cambridge.

Première introduction à l'étude du calcul différentiel et intégral, avec de nombreux exercices et problèmes.

Notions de coordonnées. — Fonction. — Continuité. — Limite. — Dérivées et différentielles. — Applications. — La notion d'intégrale. Méthodes d'intégration. Applications.

G. Jæger. — **Theoretische Physik.** B. II. *Licht und Wärme*, Mit 47 Figuren, Fünfte Auflage; IV. *Elektromagnetische Lichttheorie und Elektronik*, mit 17 Figuren, dritte verbesserste Auflage. (*Sammlüng Göschen*). — 2 vol. in-16, de 155 et 146 p.; Walter de Gruyter & Co., Berlin-Leipzig.

Tomes II et IV de l'abrégé de Physique théorique publié par M. Jäger, professeur à l'Université de Vienne. Le priemer, qui paraît en cinquième édition, traite de la lumière et de la chaleur, le second, en 3e édition, est consacré à la théorie électromagnétique de la lumière et à l'électronik.

A. Lotze. — **Die Grundgleichungen der Mechanik** insbesondere starrer Körper, neu entwickelt mit Grassmanns Punktrechnung. (Abhandlungen und Vorträge aus dem Gebiete der Mathematik, Naturwissenschaft und Technik). — 1 vol. in-8, 50 p.; B. G. Teubner, Leipzig.

Cet opuscule est destiné à montrer le parti que l'on peut tirer de la méthode ponctuelle de Grassmann appliquée à l'étude des systèmes de points matériels en mécanique.

H. Malet. — **Etude géométrique des transformations birationnelles et des courbes planes.** — 1 vol. in-8. 259 p., 111 figures, 32 fr.; Gauthier-Villars & Co., Paris, 1921.

On sait le rôle fondamental que joue en géométrie moderne l'emploi des transformations. Cet ouvrage est consacré principalement aux transformations dites birationnelles et à leurs applications à l'étude géométrique des courbes planes.

I. Transformations de première grandeur. — II. Transformations simples du plan. — III. Etude géométrique des courbes planes. — IV. Transformations birationnelles générales. — V. Transformations à base commune. Transformations involutives. — VI. Correspondances simplement rationnelles de première grandeur.

R. Marcolongo. — **Relativita** (Biblioteca di Matematiche Superiori). — 1 vol. in-8 de 192 p., L. 30; G. Principato, Messine, 1921.

Dans cet ouvrage, destiné aux étudiants en mathématiques et en physique, l'auteur expose, dans la première partie, les fondements analytiques de la théorie de la relativité (forme quadratique différentielle, Eléments du calcul différentiel absolu). Les parties II et III sont consacrées à l'étude de la relativité restreinte et à la théorie générale de la relativité.

P. Meth. — **Theorie der Planetenbewegung**. 2. Aufl. (Mathematisch-Physikalische Bibliothek, n. 8). — 1 vol. in-16, 54 p. et 14 fig.; B.G. Teubner, Leipzig.

Notions élémentaires sur le mouvement planétaire basées sur l'emploi des hodographes de Hamilton et mises à la portée des élèves de l'enseignement moyen.

R. de Montessus de Ballore. — **Index Generalis** 1920-1921, Annuaire Général des Universités. The Yearbook of the Universities. — 1 vol. in-16 de 1800 p., broché, 50 fr.: Gauthier-Villars & Cie, Paris.

La deuxième édition de l'*Index Generalis* marque un grand progrès sur la première parue en novembre 1919. Elle s'étend à toutes les nationalités. Des chapitres nouveaux sont consacrés aux grandes académies, Archives, Bibliothèques, Instituts scientifiques, Jardins botaniques et zoologiques, Musées, Observatoires et Sociétés savantes.

L'*Index Generalis* étant un Ouvrage de documentation, entrepris sans aucune préoccupation commerciale, le Directeur et les Editeurs de cet Annuaire ont préféré ne publier que les renseignements directement communiqués par les personnes spécialement compétentes, évitant ainsi la plupart des erreurs qui se glissent dans les Ouvrages similaires.

J. Pacotte. — **La Physique théorique nouvelle.** Avec une préface de M. Emile Borel. — 1 vol. in-8, de VIII-182 p., 12 fr.; Gauthier-Villars & Cie, Paris.

Cet Ouvrage résume en un livre de dimensions modestes et sans appareil mathématique, l'ensemble des théories qui constituent la Physique théorique nouvelle. Cette science nouvelle a pour origine l'électrodynamique de Lorentz qui est la forme définitive de celle de Maxwell; ses théories les plus avancées sont dues à Einstein; elles concernent la relativité, l'équivalent énergétique des deux masses matérielles, les atomes d'énergie.

L'auteur présente un essai historique, critique et méthodologique de la physique théorique nouvelle en se basant sur les travaux fondamentaux d'Henri Poincaré, de Walter Ritz, de H.-A. Lorentz et de Max Abraham.

W. Pauli. — **Relativitätstheorie** mit einem Vorwort von A. Sommerfeld. (Sonderabdruck aus der Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften). — 1 vol. in-8, 240 p.; B. G. Teubner, Leipzig, 1921.

Ce fascicule, qui est un tirage à part de l'Encyclopédie des sciences mathématiques, est appelé à rendre de grands services à tous ceux qui désirent suivre les progrès de la théorie de la relativité. Le temps était venu de dresser dans un ordre méthodique le tableau des recherches effectuées dans ce domaine depuis quinze ans et d'en indiquer les principales sources. Il s'agit donc ici d'un recueil bibliographique indispensable aux mathématiciens et aux physiciens.

J. Poirée — **Précis d'arithmétique.** — 1 vol. in-8, de 64 p., fr. 7,50; Gauthier-Villars & Cie, Paris, 1921.

Dans ce *Précis* l'auteur a condensé en un petit nombre de pages les notions essentielles d'arithmétique inscrites dans les programmes de l'enseignement moyen. Il s'est attaché à expliquer le pourquoi et le mécanisme de chaque opération. L'ouvrage se termine par une introduction à la théorie des nombres.

O. PERRON. — **Irrationalzahlen.** (*Göschens Lehrbücherei*, I. Gruppe, *Reine Mathematik*). — 1 vol. in-8, 185 p., 50 Mk.; Walter de Gruyter & Co: Berlin-Leipzig.

Cette nouvelle collection débute par une monographie sur les nombres irrationnels. L'auteur se base sur la théorie de Dedekind et passe en revue les propriétés fondamentales des nombres irrationnels.

H. POINCARÉ. — **Les fondements de la géométrie.** — 1 vol. in-8, 63 p., 3 fr.; Chiron, Paris.

Ce travail, absolument inédit pour le public de langue française, est le plus considérable et le plus synthétique qu'Henri POINCARÉ ait écrit sur les *fondements de la géométrie.* On y trouve longuement établie cette thèse, aujourd'hui universellement célèbre: la métrique d'Euclide est simplement *commode* et ses axiomes sont des *conventions.* Non seulement cette thèse bouleverse les opinions communément accréditées sur la philosophie des sciences et sur l'économie de la connaissance, mais elle constitue encore. avec une divination géniale de l'avenir, l'introduction toute naturelle à la *théorie de la Relativité* d'EINSTEIN.

L. ROUGIER. — **La matière et l'énergie** selon la théorie de la relativité et la théorie des quanta. — 1 vol. in-8 de XI-112., 9 fr. 50; Gauthier-Villars & Cie, Paris.

Dans cet ouvrage, M. Rougier, qui a été un des premiers à faire connaître en France les théories d'Einstein, développe et met au point la conséquence la plus paradoxale et la moins discutée du Principe de Relativité : celle qui attribue à l'énergie une masse, un poids en proportion et une structure, si bien que ce que nous appelons la matière n'est plus qu'un cas particulier de l'énergie. L'antique dualité du pondérable et de l'impondérable fait place à celle du *champ électromagnétique* ou *énergie*, dont le rayonnement et la matière sont de simples modalités, et du *champ pur de gravitation ou espace einsteinien.*

L. ROY. — **Cours de Mécanique rationnelle** à l'usage des élèves de l'Institut électrotechnique et de mécanique appliquée et des candidats au certificat de mathématiques générales. — 1 vol. in-8, de 251 p. avec 103 fig., 25 fr.; Gauthier-Villars & Cie, Paris.

Ce cours est la rédaction de celui que professe l'auteur, à raison d'une leçon par semaine, devant les élèves de première année de l'Institut électrotechnique et de mécanique appliquée et les candidats au certificat de mathématiques générales de l'Université de Toulouse (voir plus haut, p. 92).

S'adressant surtout aux débutants, l'auteur s'est borné à n'exposer que les éléments de cette science; il a néanmoins tenu essentiellement à être précis, à ne pas éluder certaines questions d'intérêt purement théorique. questions qui se posent inévitablement à la réflexion et sur lesquelles glissent généralement les Ouvrages didactiques. L'auteur énonce ainsi explicitement certains postulats, implicitement admis dans les exposés classiques et démontre comment la force appliquée à un point ne dépend que du temps, de la position du point et de sa vitesse. Il insiste spécialement sur les conditions analytiques qui doivent être remplies par les forces, pour que les réciproqu s des conditions d'équilibre soient vraies.

C. Runge. — **Praxis der Gleichungen.** (Göschens Lehrbücherei, 1 Gruppe, Reine Mathematik). Zweite verbesserte Auflage. — 1 vol. in-8 170 p., 8 fig., 30 Mk.; Walter de Gruyter & Co, Berlin-Leipzig.

Cet Ouvrage contient des indications très précieuses d'ordre pratique sur les calculs numériques que l'on est appelé à effectuer dans la résolution des équations numériques à une ou à plusieurs inconnues.

G. Scorza. — **Corpi numerici e algebre.** (Biblioteca di Matematiche superiori). — 1 vol. in-8, 462 p., L. 50; G. Principato, Messine, 1921.

Importante contribution à l'étude des théories modernes de l'algèbre comprenant I. la théorie générale des corps numériques; II. la théorie générale de l'algèbre des systèmes de nombres à plusieurs unités. Dans l'appendice on trouve des compléments relatifs à la théorie des matrices et aux groupes d'ordre fini.

Dr F. Severi. — **Vorlesungen über algebraische Geometrie** Geometrie auf einer Kurve Riemannsche Flächen Abelsche Integrale; berechtigte deutsche Uebersetzung von Dr. E. Lœffler mit einem Einführungswort von A. Brill und 20 Figuren. — 1 vol. in-8, 408 p.; B. G. Teubner, Leipzig.

Etude méthodique de Géométrie algébrique basée sur les travaux des géomètres allemands Brill et de Noether et des géomètres italiens Segre, Castelnuovo, Bertini, Enriques, auquels sont venus s'ajouter les belles recherches de l'auteur.

D. E. Smith. — **Computing Jetons** (Numismatic Notes and Monographs, No. 9). — 1 vol. in-16, 70 p., 25 plates, $ 1,50; New-York.

Bien que spécialement destinée aux numismates, cette monographie sera lue avec intérêt par tous ceux qui s'intéressent aux systèmes de numération des anciens et à leur procédés de calculs.

H. E. Timerding. — **Die Fallgesetze** ihre Geschichte und ihre Bedeutung, zweite Auflage (Mathematisch-Physikalische Bibliothek No. 5). — 1 vol. in-16, 51 p., 25 figures et un portrait de Galilée; B. G. Teubner, Leipzig.

Exposé élémentaire des lois de la chute des corps envisagées dans leur développement historique.

E. Vessiot et P. Montel. — **Cours de Mathématiques générales** professé à la Faculté des Sciences de Paris en 1919-1920. Première partie : **Eléments d'algèbre, de calcul différentiel et de géométrie analytique** (M. Vessiot). — 1 vol. in-8, de 504 p. et 298 fig., 30 fr. — Deuxième partie : **Eléments de calcul intégral** (M. Vessiot). — **Eléments de Mécanique** (M. Montel). — 1 vol. in-8, de 548 p. et 310 fig., 30 fr.; Léon Eyrolles, Paris.

L'ensemble des matières exposées dans ces deux volumes correspond au Cours professé à la Faculté des Sciences de Paris, en 1919-1920, conformément au Programme du certificat de mathématiques générales (préparatoire à l'étude des sciences physiques), y compris les méthodes de calcul numérique se rapportant à l'épreuve pratique de ce certificat.

J. Villey. — **Physique élémentaire et théories modernes.** *Première partie:* Molécules et atomes, Etats d'équilibre et mouvement de la matière (Mécanique, statique des fluides, Chaleur, Elasticité et Acoustique). — 1 vol. in-8 de 198 p., avec 23 fig., 15 fr.; Gauthier-Villars & Co, Paris, 1921.

D'abord préparé pour les étudiants du P. C. N., cet ouvrage sera aussi lu

avec intérêt par tous ceux qui désirent s'éclairer sur les phénomènes fondamentaux de la Physique et sur ses théories les plus modernes.

Les questions étudiées sont groupées en deux volumes. Le premier volume qui vient de paraître est consacré à l'équilibre et aux mouvements de la matière. L'ensemble des questions qu'il traite y sont exposées au point de vue de la théorie cinétique ; et le dernier chapitre donne un exposé résumé des conceptions modernes de la matière.

H. Weyl. — **Temps, espace, matière.** Leçons sur la théorie de la relativité générale. Traduites sur la quatrième édition allemande par G. Juvet et R. Leroy. (Collection de monographies scientifiques étrangères). — 1 vol. in-8, 290 p., 20 fr.; Librairie scientifique Albert Blanchard, Paris.

Importante contribution à la théorie de la relativité générale. L'auteur présente une théorie qui fait de la matière le lieu des singularités limites du champ, et où la masse et la charge se comportent comme les flux de certains tenseurs dans le champ.

I. L'espace euclidien; son expression mathématique et son rôle en physique. — II. Le continuum métrique. — III. Relativité de l'espace et du temps. — IV. Théorie générale de la relativité.

E. J. Willis. — **The Mathematics of Navigation.** — 1 vol. in-8, de 34 p., 3 $; J. W. Fergusson & Sons, Richmond, U. S. A.

Passant en revue les notions de mathématiques les plus utiles dans la pratique de la navigation, l'auteur estime que la Géométrie sphérique et la Trigonométrie sphérique ne sont pas nécessaires au débutant.

A. Witting. — **Einführung in die Trigonometrie,** eine elementare Darstellung ohne Logarithmen (Mathematisch-Physicalische Bibliothek, No. 43). — 1 vol. in-16, 46 p. et 26 fig. und zahlreichen Aufgaben; B. G. Teubner, Leipzig.

Introduction à la Trigonométrie limitée aux notions essentielles sans emploi du calcul logarithmique.

J. W. Young. — **I Concetti fondamentali dell' Algebrate della Geometria,** con una nota di U. G. Mitchell sullo sviluppo storico del simbolismo algebrico. Versione e note di D. Mercogliano con prefazione di G. Loria. — 1 vol. in-8, 418 p., Lire 8; L. Pierro, Naples.

Dans cet ouvrage l'auteur examine les concepts fondamentaux de l'Algèbre et de la Géométrie. Grâce aux nombreuses annotations l'édition italienne marque un réel progrès sur l'édition originale.

E. Zieprecht. — **Verzeichnis mathematischer und naturwissenschaftlicher Schriften** zusammengestellt im Auftrage der Ortsgruppe Hannover des Vereins zur Förderung des mathematischen u. naturwissenschaftl. Unterrichts.

Liste d'ouvrages scientifiques de langue allemande à la portée des élèves de l'enseignement secondaire. Publiée sous les auspices de la section de Hanovre de l'Association allemande pour l'avancement de l'enseignement des sciences mathématiques et naturelles, ce petit catalogue signale les principaux ouvrages d'initiation, de vulgarisation et de récréation scientifique, ainsi que des ouvrages classiques des grands savants qui ont leur place dans les bibliothèques d'élèves.

2. Publications périodiques :

Acta Mathematica. — Tome 43 : 1 et 2. — G.-D. Birkhoff: Surface transformations and their dynamical applications. — N.-E. Nörlund: Mémoire sur les polynomes de Bernoulli.

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, 1er *semestre* 1921. — 3 *janvier.* — E. Picard: Sur certaines fonctions se rattachant à des surfaces fermées. — Angelesco: Sur certaines équations différentielles linéaires complètement intégrables. — A. Petot: Sur les chocs dans les engrenages de changement de vitesse des automobiles. — 17 *janvier.* — Th. Varopoulos: Sur les fonctions ayant un nombre fini ou infini de branches. — C. Guichard: Sur les couples de deux congruences O, polaires réciproques par rapport à un complexe linéaire. — 7 *février.* — R. Birkeland: Résolution de l'équation algébrique générale par des fonctions hypergéométriques de plusieurs variables. — 14 *février.* — G. Giraud: Sur les fonctions automorphes. — Th. Varopoulos: Sur quelques points de la théorie des nombres. — A. Egnell: Sur la détermination des congruences de droite dont le plan moyen est donné. — 21 *février.* — C. Guichard: Sur certains réseaux qui se présentent dans l'étude des congruences qui appartiennent à un complexe linéaire. — R. Wavre: Sur une équation de Fredholm dans le domaine complexe et son application à la théorie des systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues. — G. Bouligand: Sur certains modes de détermination des solutions de $\Delta u = \omega^2 u$. — B. Delaunay: Résolution d'une équation indéterminée. — 28 *février.* — G. Cerf: Sur certains systèmes d'équations de Pfaff et les transformations des équations aux dérivées partielles. — G. Humbert: Sur les formes d'Hermite ternaires dans un corps quadratique imaginaire. — D. Riabouchinski: Mouvement initial d'un liquide en contact avec un obstacle à arêtes vives. — 7 *mars.* — G. Julia: Variation de la fonction qui fournit la représentation conforme d'une aire sur un cercle, lorsque le contour de l'aire varie. — B. Gambier: Systèmes articulés déformables et couples de surfaces qui s'en déduisent. — G. Lippmann: Détermination de l'axe de rotation de la vitesse de rotation d'un corps solide et réalisation d'un corps solide sans rotation. — 14 *mars.* — G.-J. Remoundos: Sur les couples de fonctions algébroïdes d'une variable correspondant aux points d'une courbe algébrique de genre supérieur à l'unité. — C.-E. Traynard: Sur les fonctions hyperelliptiques singulières. — M. Abramesco: Sur les développements en série suivant les inverses de polynomes donnés. — Th. Varopoulos: Sur quelques points de la théorie des fonctions et de la théorie des nombres. — A. Denjoy: Sur un calcul de totalisation à deux degrés. — T. Carleman: Sur une classe d'équations intégrales à noyau asymétrique. — L.-E. Dickson: La composition des polynomes. — Hj. Mellin: Résolution de l'équation algébrique générale à l'aide de la fonction gamma. — J.-L. Walsh: Sur la position des racines des dérivées d'un polynome.— E. Picard: Sur la détermination de l'axe de rotation et de la vitesse de rotation d'un corps solide. — 21 *mars.* — G. Julia: Deux conséquences de l'équation aux dérivées fonctionnelles qu'on tire de la représentation conforme. — G. Valiron: Sur des fonctions entières d'ordre infini. —

L. Lecornu: Sur la détermination expérimentale du mouvement d'un solide quelconque. — 29 *mars.* — C.-E. Traynard: Sur certaines surfaces hyperelliptiques singulières. — M. Hamy: Sur l'approximation des fonctions de grands nombres. — 4 *avril.* — G. Julia: Sur une équation aux dérivées fonctionnelles analogue à l'équation de M. Hadamard. — A. Denjoy: Sur la détermination des fonctions présentant un certain caractère complexe de résolubilité. — Th. Varopoulos: Le théorème de M. Landau et les fonctions multiformes. — F. Carlson: Sur les séries de Dirichlet. — 11 *avril.* — P. Humbert: Les polynomes d'Hermite-Didon et les fonctions de Laplace dans l'hyper-espace. — A. Denjoy: Caractères de certaines fonctions intégrables et opérations correspondantes. — P. Appell: Sur le mouvement périodique d'un fluide. — 18 *avril.* — B. Gambier. Courbes algébriques non unicursales à torsion constante. — 25 *avril.* — L. Guichard: Sur les systèmes triplement indéterminés de droites et leurs conjugués par rapport à un complexe linéaire. — 2 *mai.* — T. Bonnesen: Sur une amélioration de l'inégalité isopérimétrique du cercle et la démonstration d'une inégalité de Minkowski. — Alayrac: Mouvement du centre de gravité d'un solide symétrique par rapport à un plan vertical se déplaçant dans un milieu résistant. — 9 *mai.* — F. Vaney: Sur les polynomes de Laguerre. — A. Angelesco: Sur les représentations des polynomes par des intégrales. — R. Birkeland: Sur la convergence des développements qui expriment les racines de l'équation algébrique générale par une somme de fonctions hypergéométriques de plusieurs variables. — B. Gambier: Courbes algébriques réelles non unicursales à torsion constante. — 17 *mai.* — A. Denjoy: Calcul des coefficients d'une série trigonométrique convergente quelconque dont la somme est donnée. — G. Dumas: Sur les concours d'encadrement. — Bratu: Sur les séries dont le terme général tend vers o. — G. Valiron: Sur les fonctions entières d'ordre fini. — J. Le Roux: Sur la théorie de la relativité et le mouvement séculaire du périhélie de Mercure. — 23 *mai.* — L. Guichard: Sur les systèmes 3 I dont toutes les droites appartiennent à un complexe linéaire. — G. Julia: Sur les discontinuités des solutions de certaines équations de Fredholm. — P. Humbert: Sur les polynomes hypergéométriques. — P. Levy: Sur quelques questions de calcul fonctionnel. — 30 *mai.* — B. Jekhowshy: Sur les fonctions de Bessel à deux variables. — E. Kogbetliantz: Sur les développements de Jacobi. — E. Delassus: Sur une conséquence des lois du frottement. — 6 *juin* 1921. S. Pincherle: Sur une équation intégrale dans le domaine complexe. — B. Gambier: Sur les surfaces applicables et l'équation de Laplace. — Auric: Sur la théorie des nombres algébriques idéaux. — 13 *juin.* — G. Bertrand: Equations de Fredholm à intégrales principales au sens de Cauchy. — H. Mineur: Sur les fonctions qui admettent un théorème d'addition algébrique. — J. Kampe de Feriet: Sur les fonctions hypercylindriques. — J. Le Roux: La loi de gravitation et ses conséquences. — 20 *juin.* — H. Andoyer: Démonstration directe d'un théorème de Tisserand relatif au développement de la fonction perturbatrice. — B. Gambier: Déformation des surfaces et équation de Laplace. — 27 *juin.* — Riquier: Sur les familles complètes de figures intégrales d'un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre. — J. Kampe de Feriet: Sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles des fonctions hypergéométriques les plus générales. — M. Janet: Sur les systèmes aux dérivées partielles comprenant autant d'équations que de fonctions inconnues. —

Th. Varopoulos: Sur une classe de fonctions transcendantes. — *Id.:* Sur les lignes de courbure des quadriques. — Juvet: Les formules de Frenet pour un espace de M. Weyl.

American Journal of Mathematics. Vol. XLII. — G.-A. Miller: Groups of Order $2^{m'}$ Which Contain a Relatively Large Number of Operators of Order Two. — H.-D. Frary: The Green's Function for a Plane Contour. — W. G. Simon: On the Solution of Certain Types of Linear Differential Equations in Infinitely many Variables. — D. Buchanan: Periodic Orbits on a Surface of Revolution. — R. D. Carmichael: On the Convergence of Certain Classes of Series of Functions. — J. L. Walsh: On the Solution of Linear Equations in Infinitely Many Variables by Successive Approximations. — L. E. Wear: Self-Dual Plane Curves of the Fourth Order. — L. C. Mathewson: On the Groups of Isomorphisms of a System of Abelian Groups of Order pm and Type (n, 1, 1,..., 1) — R. M. Winger: On the Satellite Line of the Cubic. — W. C. Carver: The Failure of the Clifford Chain. — E. T. Bell: On the Representations of Numbers or Sums of 3, 5, 7, 9, 11 and 13 Squares. — A. Emch: On a Certain Class of Rational Ruled Surfaces. — E. J. Wilczynski: Geometrical Significance of Isothermal Conjugacy of a Net of Curves. — P. J. Daniell: Observations Weighted According to Order. — L. H. Rice: Some Determinants Expansions. — K. W. Lamson: A General Implicit Function Theorem with an Application to Problems of relative Minima. — R. F. Borden: On the Laplace-Poisson Mixed Equation. — G. A. Miller: Characteristic Subgroups of an Abelian Prime Power Group.

Annali di matematica pura ed applicata. Série III, Tome XXIX. — Mancinelli: Sulle superficie rigate che hanno per asintotiche infinite cubiche gobbe. — Calapso: Sulla teoria generale delle trasformazioni di Ribaucour, e sue applicazioni alla generalizzazione delle trasformazioni di Darboux. — Id.: Sulle trasformazioni delle superficie di Guichard. — Segre: Sulle corrispondenze quadrilineari tra forme di 1a specie e su alcune loro rappresentazioni spaziali. — Calapso: Sulla teoria generale delle trasformazioni delle superficie per inviluppo di sfere. — Darbi: Proprietà delle equazioni Abeliane di grado p^2. — Palatini: Spazi a tre dimensioni con una curvatura nulla e le altre due eguali ed opposte. — Bette: Sulla riduzione del problemi di geodesia ellissoidica alla sfera. — Nicoletti: Sulla dipendenza lineare delle funzioni di una variabile reale. — Belardinelli: Sulla risoluzione delle equazioni algebriche mediante sviluppi in serie.

Annals of Mathematics. Vol. 22. — P. Boutroux: On multiform functions defined by differential Equations of the first order. — J. L. Coolidge: Hermitian Metrics. — R. D. Carmichael: On the Expansion of certain analytic functions in series. — F. V. Morley: Note on the preceding paper. — T. H. Gronwall: Qualitative properties of the ballistic trajectory. — N. Wiener: The mean of a functional of arbitrary elements. — J. F. Trevor: On certain determinants associated with transformations employed in thermodynamics. — L. P. Eisenhart: The permanent gravitational field in the Einstein theory. — S. D. Zeldin: On the structure of finite continuous groups with a finite number of exceptional infinitesimal transfor-

mations. — T. H. Gronwall: Conformal mapping of a family of real conics upon another. — J. L. Walsh: On the location of the roots of the derivative of a polynomial. — F. H. Murray: The asymptotic expansion of the Sturm-Liouville functions. — J. F. Ritt: On the conformal mapping of a region into a part of itself. — L. P. Eisenhart: Conjugate nets R and their conformations. — T. C. Fry: The Application of modern theories of integration to the solution of differential equations. — T. Hayashi: An Analytical Solution of Biot's Problem. — J. K. Whittemore: Minimal Surfaces Containing Straight Lines. — E. B. Van Vleck: An Extension of Green's Lemma to the Case of a Rectifiable Boundary. — E. S. Hammond: Periodic Conjugate Nets. — J. L. Walsh: On the Transformation of Convex Point Sets.

Atti della Reale Accademia dei Lincei. Vol. XXX. — M. Pascal: Circuitazione superficiale. II Sua espressione vettoriale e teoremi generali analoghi a quelli sulla ordinaria circuitazione. — Id.: III. Il teorema della forza sostentatrice nel caso di una corrente fluida spaziale. — E. Bompiani: Invarianti e covarianti metrici nelle deformazioni di specie superiore delle superficie. — L. Brusotti: Sulla « piccola variazione » di una curva piana algebrica reale. — C. Burali-Forti: Sui numeri reali e le grandezze. — G. Castelnuovo: Sulle funzioni abeliane. — A. Comessatti: Saggi d'una teoria geometrica delle forme binarie IV: Rappresentazione tipica dei covarianti. — S. Lefschetz: Sur le théorème d' existence des fonctions abéliennes. — J. Pérès: Transformations qui conservent la composition. — Id.: Sur les fonctions permutables. — M. Picone: Sul potenziale di doppio strato superficiale. — C. Segre: Sui fochi di 2° ordine dei sistemi infiniti di piani e sulle curve iperspaziali con una doppia infinità di piani plurisecanti. — Id.: Le linee principali di una superficie di S_5 e una proprieta caratteristica della superficie di Veronese. — R. Serini: Risoluzione del problema simmetrico di Dirichlet pel cilindro circolare. — F. Severi: Sulla teoria degl' integrali semplici di prima specie appartenenti ad una superficie algebraica. — E. G. Togliati: Sulle varietà a tre dimensioni e di quart' ordine che sono luoghi di almeno ∞^2 rette. — C. Severini: Equazioni integrali. — L. Tonelli: Su due proposizioni di J. W. Lindeberg e E. E. Levi, nel Calcolo delle variazioni.

Bulletin des Sciences mathématiques. Deuxième Série; Tome XLIV. — Montessus de Ballore: Les biquadratiques gauches. — B. Gambier: Application de deux surfaces l'une sur l'autre. — G. Valiron: Remarques sur le théorème de M. Picard. — Id.: Les fonctions entières de deux variables et les ensembles de mesure nulle. — B. Hostinsky: Sur une nouvelle solution du problème de l'aiguille. — A. Rosenblatt: Sur un théorème de A. Liapounoff. — N.-E. Nörlund: Sur l'état actuel de la théorie des équations aux différences finies. — H. Vergne: Sur quelques points d'hydrodynamique. — Le Congrès international de Mathématiques à Strasbourg, Allocutions de M. Picard. — C. de la Vallée Poussin: Les fonctions à variation bornée et les questions qui s'y rattachent.

Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. 29. Band, 1920. — A. Baruch: Die Verwendung der Koinzidenzebene zur Lösung von Aufgaben der darstellenden Geometrie. — F. Bernstein: Berichtigung

zu der Arbeit: Die Uebereinstimmung derjenigen beiden Summationsverfahren, welche von P. J. Stieltjes und E. Borel herrühren. — P. Frank: Die paraboloidischen Flächen und ihre Lieschen Paraboloide. — Id.: Berichtigung zu meiner Arbeit « Ueber die paraboloidischen Flächen. 2 Mitteilung.» — R. Grammel: Ueber einige Bewegungen des unsymmetrischen schweren Kreisels. — H. Jonas: Ueber die Konstruktion der W-Kongruenzen zu einem gegebenen Brennflächenmantel und über die Transformation der R-Flächen. — K. Kommerell: Ueber nichtaffine Raumkollineationen. — E. Landau: Ueber einen Satz des Herrn Rosenblatt. — Id.: Neuer Beweis eines Satzes von Herrn Valiron. — L. Schlesinger: Ein Beitrag zur Lebensbeschreibung von L. Fuchs. — Id.: Jan Versluys. — J. A. Schouten: Die relative und absolute Bewegung bei Huygens. — I. Schur: Beispiele für Gleichungen ohne Affekt. — J. Thomae: Ueber die Cassinischen Kurven. — H. Tietze: Ueber den Richtungssinn und seine Verallgemeinerung. — A. Wangerin: Ueber das Potential dreifach belegter Flächen. — S. Wiesner: Zur Biographie Johann Bolyais.

Journal für die reine und angewandte Mathematik. 151. Band. — G. Polya: Arithmetische Eigenschaften der Reihenentwicklungen rationaler Funktionen. — P. Epstein: Ueber Elementarkettenbrüche lineare Substitutionen und indefinite binäre quadratische Formen. — O. Perron: Ueber das Verhalten einer ausgearteten hypergeometrischen Reihe bei unbegrenztem Wachstum eines Parameters. — J. Schur: Ueber lineare Transformationen in der Theorie der unendlichen Reihen. — K. Hensel: Ueber dei Zerlegung der Primteiler in relativ cyklischen Körpern; nebst einer Anwendung auf die Kummerschen Körper. — A. Fraenkel: Ueber einfache Erweiterung zerlegbarer Ringe. — J. Horn: Laplacesche Integrale als Lösungen nicht linearer Differentialgleichungen. — K. Hensel: Die Zerlegung der Primteiler eines beliebigen Zahlkörpers in einem auflösbaren Oberkörper. — K. Hensel: Zur multiplikativen Darstellung der algebraischen Zahlen für den Bereich eines Primteilers.

Mathematische Annalen. 80. Band. *Heft* 1. — R. Kœnig: Die Integrale der Riemannschen Transzendenten. — B. von Kerekjarto: Ueber die Brouwerschen Fixpunktsätze. — Id.: Ueber Transformationen des ebenen Kreisringes. — Id.: Ueber die periodischen Transformationen der Kreisscheibe und der Kugelfläche. — L. E. J. Brouwer: Ueber die periodischen Transformationen der Kugel. — M. Lagally: Beitrag zur Laplaceschen Cascadenmethode. — L. Tschakaloff: Arithmetische Eigenschaften einer unendlichen Reihe. — R Weitzenböck: Die Invarianten der Galilei-Newton-Gruppe. — F. Klein: Bericht über den Stand der Herausgabe von Gauss's Werken. — *Heft* 2. — *Generalregister* zu den Bänden 51-80 zusammengestellt von H. Vermeil in Göttingen mit einem Bildnisse von C. Neumann.

81. Band. — H. Beck: Ueber lineare Somenmannigfaltigkeiten. — F. Bernstein: Bemerkung zu der Abhandlung: Ueber die Konvergenz eines mit einer Potenzreihe assoziierten Kettenbruchs von H. Hamburger in Berlin. — K. Bœgel: Ueber die Stetigkeit und die Schwankung von Funktionen zweier reeller Veränderlichen. — J.-G. van der Corput: Ueber Gitterpunkte in der Ebene. — H Hamburger: Ueber die Konvergenz eines mit einer Potenzreihe assoziierten Kettenbruchs. — Id.: Ueber eine Erweiterung des Stieltjesschen Momentenproblems. — P. Hertz: Ueber

eine Aufgabe aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung. — N. Kritikos: Ueber ganze transzendente Funktionen mit reellen Nullstellen. — J. Nielsen: Ueber fixpunktfreie topologische Abbildungen geschlossener Flächen. — E. Nœther: Zur Reihenentwicklung in der Formentheorie. — A. Ostrowski: Ueber die Existenz einer endlichen Basis bei Systemen von Potenzprodukten. — H. Rademacher: Ueber partielle und totale Differenzierbarkeit von Funktionen mehrerer Variabeln. — W. Schmeidler: Ueber die Singularitäten algebraischer Gebilde. — W. Sternberg: Ueber die asymptotische Integration von Differentialgleichungen. — J. Wolff: Ueber Folgen analytischer Funktionen.

82. Band. — E. Hilb: Lineare Differentialgleichungen unendlich hoher Ordnung mit ganzen rationalen Koeffizienten. — Id.: Ueber diejenigen Integrale linearer Differentialgleichungen, welche sich an einer Unbestimmtheitstelle bestimmt verhalten. — F. Noether: Ueber eine Klasse singulärer Integralgleichungen. — A. Ostrowski: Ueber die Reihe $\sum q^{n^2} x^n$. — G. Doetsch: Ein Konvergenzkriterium für Integrale. — J. Nielsen: Ueber die Minimalzahl der Fixpunkte bei den Abbildungstypen der Ringflächen. — L. E. J. Brouwer: Ueber die Minimalzahl der Fixpukkte bei den Klassen von eindeutigen stetigen Transformationen der Ringflächen. — E. Trefftz: Ueber die Torsion prismatischer Stäbe von polygonalem Querschnitt. — W. Pauli: Die Ausbreitung des Lichts in bewegten Medien. — H. Hamburger: Ueber eine Erweiterung des Stieltjesschen Momentenproblems. — Fr. Schur: Theodor Reye. — H. Hamburger: Ueber eine Erweiterung des Stieltjesschen Momentproblems. — G. Szegö: Ueber die Entwickelung einer analytischen Funktion nach den Polynomen eines Orthogonalsystems. — A. Schur: Zur Entwickelung willkürlicher Funktionen nach Lösung von Systemen linearer Differentialgleichungen. — A. Terracini: Eine Bemerkung über die Funktionalgleichungen der isomorphen Abbildung. — H. W. E. Jung: Ueber Flächen mit einem Büschel rationaler Kurven. — Ph. Furtwängler: Punktgitter und Idealtheorie. — L. E. J. Brouwer: Aufzählung der Abbildungsklassen endlichfach zusammenhängender Flächen. — H. Kneser: Eine Erweiterung des Begriffes « konvexer Körper ». — W. Süss: Begründung der Lehre vom Polyederinhalt — E. Trefftz: Zur Prandtlschen Tragflächentheorie.

Mathematische Zeitschrift. 6. Band. — H. Hamburger: Ueber eine Riemannsche Formel aus der Theorie der Dirichletschen Reihen. — E. Hecke: Eine neue Art von Zetafunktionen und ihre Beziehungen zur Verteilung der Primzahlen, II. — P. Koebe: Ueber das Schwarzsche Lemma und einige damit zusammenhängende Ungleichheitsbeziehungen der Potentialtheorie und Funktionentheorie. — W. Blaschke: Ueber affine Geometrie XXVI: Wackelige Achtflache. — Id.: Frenets Formeln für den Raum von Riemann. — E. Jacobsthal: Mittelwertbildung und Reihentransformation. — K. Knopp: Mittelwertbildung und Reihentransformation. — R. Grammel: Die Stabilität der Staudeschen Kreiselbewegungen. — M. Lagally: Ueber die Zerlegbarkeit von flächentreu aufeinander abgebildeten Gebieten in unendlich kleine, paarweise kongruente Teile. — E. Landau: Ueber die Nullstellen der Zetafunktion. — H. Cramer: Bemerkung zu der vorstehenden Arbeit des Herrn Landau. — O. Perron: Zur Theorie der divergenten Reihen. — Id.: Ueber nichthomogene lineare Differentialgleichungen. 3/4 Heft. — G. Szegö: Beiträge zur Theorie der Tœplitzschen Formen.

— H. Happel: Ueber das Gleichgewicht von elastischen Platten unter einer Einzellast. — O. Haupt: Ein Satz über die Abelschen Integrale 1. Gattung. — E. R. Neumann: Der Poincarésche Satz über Differenzengleichungen in seiner Anwendung auf eine Integralgleichung. — L. Neder: Konvergenzdefekte der Potenzreihen stetiger Funktionen auf dem Rande des Konvergenzkreises. — Id.: Ueber die Fourierkoeffizienten der Funktionen von beschränkter Schwankung. — W. Schmeidler: Bemerkungen zur Theorie der abzählbaren Abelschen Gruppen. — W. Blaschke: Geometrische Untersuchungen zur Variationsrechnung. I. Ueber Symmetralen. — O. Perron: Beitrag zur Theorie der divergenten Reihen. — P. Kœbe: Zum Verzerrungssatze der konformen Abbildung. — G. H. Hardy: Note on a Theorem of Hilbert. — O. Perron: Bemerkung zu der Arbeit « Ueber eine spezielle Klasse von Regelflächen ».

7. Band. — R. Courant: Ueber die Eigenwerte bei den Differentialgleichungen der mathematischen Physik. — A. Lœwy: Begleitmatrizen und lineare homogene Differentialausdrücke. — L. Lichtenstein: Untersuchungen über die Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten, deren Teilchen einander nach dem Newtonschen Gesetze anziehen. Zweite Abhandlung. Stabilitätsbetrachtungen. — I. Schur: Ueber einen von Herrn L. Lichtenstein benutzten Integralsatz. — P. Kœbe: Abhandlungen zur Theorie der konformen Abbildung (VI. Abbildung mehrfach zusammenhängender schlichter Bereiche auf Kreisbereiche. Uniformisierung hypeelliptischer Kurven). — H. Hamburger: Bemerkungen zu einer Fragestellung des Herrn Polya. — R. v. Mises: Berichtigung zu meiner Arbeit « Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung ».

8. Band. — E. Noether und W. Schmeidler: Moduln in nichtkommutativen Bereichen, insbesondere aus Differential- und Differenzenausdrücken. — G. Szegö: Ueber Potenzreihen, deren Kœffizienten zahlentheoretische Funktionen sind. — A. Tauber: Ueber konvergente und asymptotische Darstellung des Integrallogarithmus. — L. Berwald: Ueber affine Geometrie XXVII. Liesche F_2 Affinnormale und mittlere Affinkrümmung. — E. Hilb: Ueber die Laplacesche Reihe, II.— St. Jolles: Einfache Kennzeichen polarer Korrelationen. — W. Meyer: Zu der Abhandlung von Herrn Roland Weitzenböck: « Ueber eine Ungleichung in der Dreiecksgeometrie ». — J. Horn: Laplacesche Integrale und Gammaquotientenreihen in der Theorie der linearen Differentialgleichungen und Volterraschen Integralgleichungen. — W. Blaschke: Ueber affine Geometrie XXVIII: Bestimmung aller Flächen, die von den umschriebenen Zylindern längs ebener Kurven berührt werden. — L. Koschmieder: Ueber besondere Jacobische Polynome. — F. Carlson: Ein Satz über Kegelschnitte mit einigen Anwendungen auf die perspektive Affinität. — C. Heumann: Ein Satz über Culmannsche Trägheitsellipsen. — O. Perron: Zur Theorie der Summengleichungen. — G. Polya: Ueber den Zentralen Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung und das Momentenproblem. — H. W. E. Jung: Ueber die Differentialinvarianten algebraischer Flächen. — O. Szasz: Ueber Potenzreihen, die im Einheitskreise beschränkte Funktionen darstellen. — G. Dœtsch: Ueber die obere Grenze des absoluten Betrages einer analytischen Funktion auf Geraden. — A. Ostrowski: Ueber Dirichletsche Reihen und algebraische Differentialgleichungen. — Von Pidoll: Bemerkungen über Vertauschung von Limes und Integral. — O. Szasz: Ungleichheitsbeziehungen für die Ableitungen

einer Potenzreihe, die eine im Einheitskreise beschränkte Funktion darstellt. — B. von Kerekjarto: Zur Theorie der mehrdeutigen stetigen Abbildungen. — H. Steinhaus: Bemerkung zu der Arbeit des Herrn L. Neder: Ueber die Fourierkoeffizienten der Funktionen von beschränkter Schwankung.

Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften in Wien. Abteilung II*a* 129. Band. — Ph. Furtwängler: Ueber die Ringklassenkörper für imaginäre quadratische Körper. — J. A. Gmeiner: Ueber die Ketten der reduzierten binären quadratischen Formen mit positiver nichtquadratischer Determinante. — E. Kruppa: Graphische Kurven I. Mitteilung: Ebene Kurven. — F. Mertens: Die Gestalt der Wurzeln einer irreduktiblen Galois'schen Gleichung achten Grades eines gegebenen Rationalitätsbereiches deren Affektgruppe nur Permutationen mit ein- und zweigliedrigen Zykeln enthält. — E. Muller: Zyklographische Abbildung von Flächen und die Geometrie von Kurvenscharen in der Ebene. — P. Roth : Ueber Flächen, die die Punktepaare zweier und einer algebraischen Kurve abbilden. — R. Weitzen-Bock: Ueber die Wirkungsfunktion in der Weyl'schen Physik. 2. Mitteilung. — Id.: Ueber die Wirkungsfunktion in der Weyl'schen Physik. 2. Mitteilung.

Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. Tome LI. — J. Arneberg : Die Kegelschnitte als Kreisprojektion. — R. Böger: Optische Geometrie. — J. Braun: Arbeit und Boden in der Volkswirtschaftslehre und Mechanik. — M. Enders: Die Perspektivität im geometrischen Unterricht der O. II. — A. Fischer: Die Genauigkeit der logarithmisch-trigonometrischen Rechnens. — H. Franke: Mathematische Betrachtungen über das geltende politische Wahlverfahren. — E. Götting: Die Exponentialfunktion im Unterricht. — K. Hahn: Die Einführung des Kraftbegriffs auf der Oberstufe. — Id.: Die Schwingungsformel der oszillatorischen Entladung im Unterricht. — R. Henke: Die Simsonsche Gerade. — W. Hillers: Die Schwingungsdauer der oszillierenden Entladung im Unterricht. — B. Kerst: Kopfgeometrie. — A. Lanner: Das apollonische Berührungsproblem in stereometrischer Behandlung. — L. Müller: Atom- und Molekulwärmen fester Körper. — A. Rohrberg: Lektorate für Mathematik, ein Vorschlag zur Erweiterung des mathematischen Hochschulunterrichts. — R. Rothe: Fragen der Oberlehrerausbildung mit Beziehung auf angewandte Mathematik und Technik. — E. Salkowski: Die Apollonische Berührungsaufgabe. — E. Sos: Das d'Hontsche Wahlsystem. — A. Weise: Zum Mathematikunterrichte am deutschen Gymnasium. — H. Wieleitner: Zur Erfindung des Zeichen x. — O. Zander: Eine neue Definition der stetigen Teilung. — Kleine Mitteilungen. — Berichte. — Bücherbesprechungen.

3. Thèse de doctorat:

Nous signalons sous cette rubrique les thèses de doctorat dont un exemplaire imprimé aura été adressé à la Rédaction, 110 *Florissant, Genève.*

Finlande. — *Université de Helsingfors.* — Stenfors, E. — Die schläfische Konfiguration von zwölf Geraden einer Fläche dritter Ordnung. — 63 p.; 1921.

Suède. — *Université d'Upsal.* — Jonsson, K. G. — Undersökningar rörande Problemräkningens förutsättningar och förlopp. — 1919.

Mikaelsson, Gustav. — Sur la nature analytique des solutions des équations linéaires aux dérivées partielles à caractéristique multiple. 94 p.; 1920.

Wennberg, Sven. — Zur Theorie der Dirichlet'schen Reihen. — 66 p.; 1920.

Suisse. — *Université de Bâle.* — Buchner, Paul. — Thetafunktionen im reellen, quadratischen Körper. — 27 p.; 1919.

Université de Berne. — Grieshaber, Hans. — Beiträge zur kontinuierlichen Methode in der Krankenversicherung. — 82 p.; 1919.

Kaufmann, Arnold. — Die Inverse der Konchoide des Nikomedes. — 95 p.; 1919.

Hartmann, Franz. — Der Zusammenhang der Bessel'schen Funktion $j(x)$ mit der hypergeometrischen Reihe. — 49 p.; 1919.

Aetchlimann, Alfred. — Pol- und Brennpunktsörter ebener Schnitte einer Fläche 2. Grades. — 78 p.; 1921.

Roethlisberger, Ernest. — Die Schnittkurve eines elliptischen und eines kubischparabolischen Zylinders. — 117 p.; 1919.

Grossen, Hans. — Ueber die Schätzung der speziellen Zylinderfunktionen nach Ludwig Schläfli. — 96 p.; 1921.

Université de Lausanne. — Vaney, Félix. — Sur les polynomes de Laguerre. — 48 p.; 1921.

Université de Genève. — Kaufmann, Marthe. — Géométrie des flèches dans le plan couronoïde. — 84 p.; 1921.

Wavre, Rolin. — Sur quelques propriétés des suites de fonctions continues réelles et l'équation fonctionnelle $f[\varphi_1(t)] = f[\varphi_2(t)]$. — 40 p.; 1921.

Université de Zurich. — Bucher, Jakob. — Ueber die Lösbarkeit der Gleichung $t^2 - Ds^2 = -1$ in ganzen Zahlen. — 24 p.; 1919.

Blaeti, Emil. — Ueber autmorphe Funktionen die zu gewissen Untergruppen der Modulgruppe gehören. — 62 p.; 1919.

Liebert, Arnold. — Ueber die Ionisierungsstromkurven der α-Strahlen. — 28 p.; 1920.

Rotszajn, Sophie. — Die Anwendung der Planckschen Erweiterung der Quantenhypothese auf rotierende Gebilde mit zwei Freiheitsgraden in einem Richtungsfelde. — 44 p. 1920.

Ecole polytechnique fédérale, Zurich. — Widmer, Adolf. — Ueber die Anzahl der Lösungen gewisser Kongruenzen nach einem Primzahlmodul. — 55 p.; 1919.

Lauer, Henri. — Sur la réduction des formes positives d'Hermite. — 34 p.; 1919.

Loeffler, Adolphe. — Sur les séries de Fourier à deux variables et le phénomène de Gibbs. — 69 p.; 1920.

Jobin, Herbert. — Sur une généralisation de la transformation de Lie. — 64 p.; 1921.

Funk, Emil. — Reflexion und Brechung optischer Kugelwellen und das Problem der Totalreflexion. — 37 p.; 1921.

FAMILLES ADDITIVES ET FONCTIONS ADDITIVES D'ENSEMBLES ABSTRAITS

PAR

M. Fréchet (Strasbourg).

Sommaire:

Première partie. — I. Construction de familles d'ensembles abstraits qui sont closes par rapport à certaines opérations. — II. Construction de familles d'ensembles abstraits qui sont additives au sens restreint. — III. Idem au sens complet.

Seconde partie. — IV. Fonctions additives d'ensembles abstraits [1].

I. — Construction de familles d'ensembles abstraits qui sont closes par rapport à certaines opérations.

L'addition, la soustraction de deux ensembles sont des exemples particuliers d'opérations qui font correspondre à certains ensembles ou groupements d'ensembles des ensembles déterminés. On peut dire qu'une famille $\mathcal{F}$ d'ensembles est *close par rapport aux opérations* S, D,... si chacune de ces opérations, effectuée uniquement sur des ensembles appartenant à la famille $\mathcal{F}$ ne peut fournir que des ensembles appartenant à $\mathcal{F}$. On peut alors se proposer de construire une famille $\mathcal{F}$ close par rapport à certaines opérations S, D,... connaissant certains ensembles appartenant à $\mathcal{F}$. Ou même, plus généralement, étant donnée une famille arbitraire $\mathcal{H}$ composée d'ensembles également arbitraires, on peut chercher s'il existe une famille $\mathcal{F}$ comprenant tous les ensembles de $\mathcal{H}$ et close par rapport aux opérations S, D,... Nous distinguerons deux cas qui ne sont pas

[1] Le présent article est le résumé de deux communications présentées en janvier 1922 au Colloque mathématique de Zurich et au Séminaire mathématique de Berne, par M. Maurice Fréchet, Directeur de l'Institut mathématique de l'Université de Strasbourg.

tous les cas possibles, mais qui sont les plus simples et les plus importants :

1° Supposons que les opérations S, D,... ne soient applicables (ou qu'on aie convenu de ne les appliquer) qu'à des groupements formés d'un nombre *fini* d'ensembles. Appelons suite déduite de la famille $\mathcal{H}$, toute suite ordonnée composée d'un nombre fini d'ensembles dont chacun, G, appartient à $\mathcal{H}$ ou résulte de l'une des opérations S, D,... effectuée sur les ensembles qui précèdent G dans cette suite.

Appelons maintenant $\mathcal{H}_r$ la famille constituée de tous les ensembles appartenant à l'une quelconque des suites déduites de $\mathcal{H}$; la famille $\mathcal{H}_r$ comprend évidemment la famille $\mathcal{H}$ et est close par rapport à S, D....; d'autre part elle appartient à toute famille comprenant $\mathcal{H}$ et close par rapport aux opérations S,D,... Nous savons donc construire non seulement une solution du problème, mais même «la plus petite famille» comprenant $\mathcal{H}$ et close par rapport aux opérations S, D,...

2° Supposons que les opérations S, D, ... ne sont applicables (ou qu'on convienne de ne les appliquer) qu'à (un nombre fini ou) un groupement *dénombrable* d'ensembles. Alors on saura, comme précédemment, former « la plus petite famille » comprenant une famille arbitraire donnée $\mathcal{H}$ et close par rapport aux opérations S, D, ... (On pourra l'appeler $\mathcal{H}_c$). On opèrera comme plus haut, mais cette fois les suites considérées pourront comprendre des suites *bien* ordonnées dénombrables, *(finies ou non).*

Ainsi chaque ensemble appartenant à $\mathcal{H}_r$ (ou à $\mathcal{H}_c$) pourra être considéré comme le dernier terme d'une suite bien ordonnée finie (ou dénombrable) d'ensembles formés à partir des ensembles de la famille arbitraire donnée $\mathcal{H}$ par des applications répétées, mieux, réitérées, des opérations S,D, ... dans un ordre quelconque.

Distinction des classes d'ensembles. — On peut si l'on veut *repérer le degré de complexité* de la construction de chaque ensemble de $\mathcal{H}_r$ ou de $\mathcal{H}_c$ (qui d'ailleurs peut être obtenu parfois par différentes suites d'opérations) de la manière suivante.

Supposons qu'on puisse disposer les opérations S, D,..., considérées en elles-mêmes, en une suite bien ordonnée T. (C'est par

exemple ce qui aura lieu si ces opérations sont en nombre fini, seul cas utilisé par la suite). En permutant au besoin ces opérations, on peut appeler précisément S, D, ... ces opérations dans l'ordre où elles se présentent. Considérons alors la suite bien ordonnée T', semblable à la suite T,

$$\mathcal{K}, \ S\mathcal{K}, \ D(S\mathcal{K}), \ \ldots$$

où chaque terme est une famille $\mathcal{L}$ d'ensembles composée des ensembles appartenant aux familles précédentes et de ceux obtenus en appliquant à tout groupement de ceux-ci (quand cela est possible) l'opération de même rang que $\mathcal{L}$ dans T. Soit enfin $U\mathcal{K}$ la famille des ensembles appartenant à l'un quelconque des termes de cette suite T'. Il est évident que $U\mathcal{K}$ comprend $\mathcal{K}$.

La plus petite famille $\mathcal{K}_c$ comprenant $\mathcal{K}$ et close par rapport aux opérations S, D, ... comprend évidemment $U\mathcal{K}$, si $\mathcal{K}$ appartient à $\mathcal{K}_c$. De plus la condition nécessaire et suffisante pour qu'une famille $\mathcal{M}$ soit close par rapport à S, D, ... est que $U\mathcal{M} = \mathcal{M}$.

Finalement $\mathcal{K}_c$ contiendra les familles qui sont les termes d'une suite bien ordonnée dénombrable σ, chacun, $\mathcal{N}$, résultant de l'opération U effectuée sur la famille constituée par les ensembles appartenant à l'un des termes de σ précédant $\mathcal{N}$.

Remarquons que si deux termes quelconques d'une des suites σ sont identiques, tous les termes de cette suite sont identiques à partir d'un certain rang. On peut donc remplacer dans ce qui précède, les suites σ par les suites σ_0 qui sont chacune formée en supprimant, s'il y a lieu, d'une suite σ_0 tous les termes identiques à un des termes le précédant.

Ceci étant, chaque suite σ_0 est une suite bien ordonnée dénombrable de familles distinctes, chacune comprenant les précédentes (et comprenant en particulier la première qui est toujours $\mathcal{K}$). Alors si deux suites bien ordonnées σ_0 sont distinctes, l'une est identique à un « segment » de l'autre, c'est-à-dire est formée des mêmes termes et dans le même ordre que la suite des termes de la seconde précédant un certain terme de cette seconde suite.

Ceci suffit pour établir — sans avoir à parler de nombres transfinis, — qu'il existe une suite bien ordonnée Σ formée de

familles distinctes construite comme les σ_0 (sauf qu'elle n'est pas assujettie à être dénombrable) et qui est telle que tous les σ_0 en sont des segments. Enfin les ensembles de tous les σ_0 forment une famille comprenant $\mathcal{H}$ et close par rapport aux opérations S, D, ... Par suite, la plus petite famille $\mathcal{H}_c$ est formée des ensembles appartenant à l'un quelconque des termes d'une certaine suite bien ordonnée Σ composée de familles distinctes dont chacune s'obtient en appliquant l'opération U à la famille composée des ensembles des familles précédentes. La décomposition précédente de $\mathcal{H}_c$ permet maintenant de classer les ensembles qui composent cette famille par ordre de complication croissante.

En effet, chacun de ces ensembles, E, appartient aux familles successives de Σ à partir d'un certain rang. C'est ce rang qui fixe le degré de complexité de la construction de E à partir de $\mathcal{H}$. Il faut d'ailleurs distinguer cette complexité de la complexité de l'ensemble E lui-même. Si la famille $\mathcal{H}$ est formée d'ensembles très compliqués, il pourra arriver qu'un ensemble E de classe très élevée soit beaucoup plus simple que les ensembles de H. Mais si au contraire les ensembles de $\mathcal{H}$ sont tous simples, on pourra juger légitimement de la complexité intrinsèque d'un ensemble E de $\mathcal{H}_c$ par le rang du terme de la suite Σ où il apparaît pour la première fois.

Nous remarquerons enfin que dans le cas où les opérations données, S, D, ... ne portent à chaque fois que sur un nombre fini d'ensembles, la suite Σ si elle n'est pas finie est formée d'une suite de familles de rangs finis, de sorte que dans ce cas les classes des ensembles de $\mathcal{H}_r$ déduits de $\mathcal{H}$ sont toutes repérables par des nombres entiers.

II. — Construction de familles d'ensembles abstraits qui sont additives au sens restreint.

Une famille $\mathcal{F}$ d'ensembles quelconque est dite *additive au sens restreint*, si E_1, E_2 étant deux quelconques des ensembles de la famille $\mathcal{F}$, les ensembles $E_1 + E_2$, $E_1 - E_2$ appartiennent aussi à la famille $\mathcal{F}$.

On peut alors dire que la famille $\mathcal{F}$ est *close par rapport aux opérations* d'addition et de soustraction de deux ensembles et appliquer à ces opérations particulières les considérations que l'auteur a développées plus haut concernant celles des opérations les plus générales qui ne portent à chaque fois que sur un nombre fini d'ensembles.

Il s'agit, étant donnée une famille $\mathcal{H}$, entièrement arbitraire, d'ensembles quelconques, de déterminer une famille comprenant les ensembles de $\mathcal{H}$ et close par rapport aux opérations d'addition et de soustraction de deux ensembles.

D'après ce qui précède, on peut construire la plus petite, $\mathcal{H}_r$, de ces familles de la façon suivante: on formera $\mathcal{H}_r$ au moyen de tous les ensembles obtenus chacun comme résultat final d'un nombre fini d'additions et de soustractions de deux ensembles, ces opérations ayant lieu successivement et portant à chaque fois sur des ensembles appartenant soit à $\mathcal{H}$ soit aux ensembles formés dans les opérations antérieures.

D'après le premier mode de construction indiqué, chaque ensemble E de $\mathcal{H}_r$ s'obtient par un nombre fini d'additions et de soustractions qui sont bien effectués à partir de la famille $\mathcal{H}$, mais qui évidemment ne font intervenir, pour un ensemble E déterminé de $\mathcal{H}_r$, qu'un nombre fini d'ensembles de $\mathcal{H}$: G_1, G_2, ... G_n. Soit $((G_1, \dots G_n))$ la plus petite famille additive au sens restreint qui comprend les ensembles G_1, ... G_n de $\mathcal{H}$; on voit qu'elle comprend E et est comprise dans $\mathcal{H}_r$. Donc:

$$\mathcal{H}_r = \mathcal{H} + \mathcal{H}^{(2)} + \dots + \mathcal{H}^{(n)} + \dots$$

$\mathcal{H}^{(n)}$ étant la famille composée des ensembles appartenant à l'une quelconque des familles $((G_1, \dots G_n))$ pour n donné.

On est donc ainsi ramené au cas particulier où $\mathcal{H}$ est composé d'un nombre fini d'ensembles, puisque si l'on sait construire les familles $((G_1, \dots G_n))$, on saura construire $\mathcal{H}_r$.

Or si les ensembles G_1, ... G_n étaient *disjoints*, c'est-à-dire sans élément commun à deux d'entre eux, la famille $((G_1, \dots G_n))$ serait évidemment constituée des ensembles qui sont chacun somme d'un nombre fini des G_1, ... G_n. Pour ramener à ce cas il suffit d'introduire la considération de ce que nous appellerons les

atomes du système $G_1, \dots G_n$. Dans la suite d'additions et de soustractions à partir des $G_1 \dots G_n$, qui sert à former un ensemble quelconque de $((G_1, \dots G_n))$, les ensembles obtenus successivement resteront formés d'éléments des G, par conséquent tout ensemble de $((G_1, \dots, G_n))$ appartient à $G = G_1 + \dots + G_n$. En posant $G'_1 = G - G_1, \dots G'_n = G - G_n$, on voit que les égalités

$$G = G_1 + G'_1, \dots G = G_n + G'_n$$

représentent ce que l'on peut appeler des découpages de G. Si on combine à la fois tous ces découpages, on divise G en 2^n sous-ensembles au plus — certains pouvant être nuls —, ensembles disjoints deux à deux et que nous appellerons les *atomes* du système $G_1, \dots G_n$.

On voit facilement que chaque atome s'obtient à partir de ce système par une suite convenable de *soustractions* seulement. Finalement, on voit qu'il existe un nombre fini d'ensembles — les atomes — déduits de $G_1 \dots G_n$ chacun par une certaine suite convenable de soustractions et tels que $G_1, \dots G_n$ soient chacun somme d'un nombre fini d'atomes disjoints.

Alors il est manifeste que les atomes appartiennent à la famille $((G_1, \dots G_n))$ et que cette famille est constituée des ensembles qui sont sommes d'un nombre fini d'atomes disjoints.

On peut aussi en déduire une autre construction de la famille $\mathcal{H}_r$ dans le cas d'une famille $\mathcal{H}$ quelconque. Appelons système moléculaire attaché à $\mathcal{H}$, le système $\mathcal{M}$ formé des ensembles qui sont atomes pour l'un au moins des groupements formés d'un nombre fini d'ensembles de $\mathcal{H}$.

On voit alors que la famille $\mathcal{H}_r$ sera constituée des ensembles qui sont sommes d'un nombre fini de molécules disjointes. Ceci montre en passant que dans la construction d'un ensemble quelconque de $\mathcal{H}_r$ par un nombre fini d'additions et de soustractions à partir de $\mathcal{H}$, on peut toujours supposer que les soustractions ont toutes été placées en tête. Ceci montre aussi que pour former la plus petite famille $\mathcal{H}_r$ additive au sens restreint et comprenant $\mathcal{H}$, on peut former d'abord la plus petite famille comprenant $\mathcal{H}$ et close par rapport à la soustraction et ensuite obtenir $\mathcal{H}_r$ comme la plus petite famille close par rapport à

l'addition de deux ensembles et comprenant la famille qu'on vient de former.

Il pourra aussi être utile de remarquer que si une famille d'ensembles, $\mathcal{H}$, est telle que la différence de deux de ses ensembles est la somme d'un nombre fini d'ensembles disjoints appartenant à $\mathcal{H}$, la famille $\mathcal{H}_r$ est constituée par tous les ensembles qui sont sommes d'un nombre fini d'ensembles disjoint appartenant à $\mathcal{H}$. (On est conduit à envisager le cas actuellement considéré si l'on remarque que le système moléculaire attaché à une famille quelconque jouit lui-même de cette propriété.)

En vue de mesurer le degré de complexité de chacun des ensembles de $\mathcal{H}_r$, on commencera par appeler $U\mathcal{H}$ l'opération qui consiste à adjoindre à une famille $\mathcal{H}$ les ensembles qui sont différences de deux ensembles de $\mathcal{H}$, puis à adjoindre à la famille ainsi formée les ensembles qui sont sommes de deux des ensembles de cette seconde famille.

Ceci fait, on formera les familles

$$\mathcal{H}, \quad U\mathcal{H}, \quad U(U\mathcal{H}), \ldots$$

et en général la famille qu'on peut désigner par $U^{(n)}\mathcal{H}$ et qui résulte de l'opération U réitérée n fois à partir de $\mathcal{H}$. Alors: ou bien à partir d'un certain rang p les $U^{(n)}\mathcal{H}$ sont identiques à $U^{(p)}\mathcal{H}$ et $U^{(p)}\mathcal{H} \equiv \mathcal{H}_r$; ou dans le cas contraire $\mathcal{H}_r$ est formé des ensembles appartenant à l'une quelconque des familles $U^{(n)}\mathcal{H}$; autrement dit

$$\mathcal{H}_r = \mathcal{H} + U\mathcal{H} + \ldots + U^{(n)}\mathcal{H} + \ldots .$$

On voit alors qu'on pourra distinguer dans $\mathcal{H}_r$ des ensembles de classe 0, 1, 2, ..., n, ... , la classe étant toujours déterminée par un rang entier. Bien entendu, il pourra arriver que le nombre des classes soit fini si les $U^{(n)}\mathcal{H}$ sont identiques à partir d'un certain rang.

III. — Construction des familles d'ensembles abstraits qui sont additives au sens complet.

1. *Définitions.* — Appelons *ensemble limite restreint* d'une suite infinie d'ensembles E_1, E_2, ... E_n ... l'ensemble R des

éléments qui appartiennent chacun à partir d'un certain rang (variable) aux termes de cette suite.

Appelons *ensemble limite complet* de cette suite, l'ensemble C des éléments qui appartiennent chacun à une infinité (variable) de termes de cette suite.

Il est évident que R appartient à C. Lorsque R est identique à C nous dirons que la *suite des* E_n *converge* et que $R \equiv C$ est son *ensemble limite* [1].

Une famille $\mathcal{F}$ d'ensembles est *fermée* si tout ensemble limite d'une suite convergente infinie d'ensembles appartenant à $\mathcal{F}$ appartient aussi à $\mathcal{F}$.

Tout comme pour les « fonctionnelles » de M. Hadamard, on pourrait dire qu'une famille $\mathcal{F}$ d'ensembles est *linéaire* si elle est fermée et additive au sens restreint. La définition des familles linéaires d'ensembles est équivalente à celle des familles $\mathcal{F}$ *additives au sens complet* (c'est-à-dire telles que si $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ est une suite finie ou infinie d'ensembles appartenant à $\mathcal{F}$, les ensembles $E_1 - E_2$ et $E_1 + E_2 + \ldots$ appartiennent à $\mathcal{F}$).

Remarque: Si $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots; E'_1, E'_2, \ldots, E'_n, \ldots$ sont deux suites infinies quelconques d'ensembles quelconques et si e, E, e', E' sont respectivement leurs ensembles limites restreint et complet; si d'autre part R, C; R_1, C_1 sont respectivement les ensembles limites restreint et complet des suites

$$S_1 = E_1 + E'_1, \ldots, S_n = E_n + E'_n \ldots$$

$$D_1 = E_1 - E'_1, \ldots, D_n = E_n - E'_n \ldots$$

on a les relations symboliques

$$\left.\begin{array}{l} e + e' < R < C < E + E' \\ e - E' < R_1 < C_1 < E - e' \end{array}\right\} \quad (1)$$

où le signe $<$ est mis pour « appartient à ».

---

[1] On remarque que :

1° Si à partir d'un certain rang les ensembles d'une suite $E_1, E_2, \ldots$ sont identiques à un même ensemble E, cette suite converge et a E pour ensemble-limite.

2° Si on extrait d'une suite convergente quelconque d'ensembles $F_1, F_2, \ldots$, une suite infinie de termes de rangs distincts $F_{n_1}, F_{n_2}, \ldots$ cette suite est convergente et vers la même limite.)

(La définition actuelle des ensembles-limites range donc les familles d'ensembles dans la catégorie des classes ($\mathcal{L}$) de ma Thèse.)

En particulier si les deux suites données des E_n et des E'_n convergent et si E, E′ sont leurs ensembles-limites, les deux suites des $S_n = E_n + E'_n$ et des $D_n = E_n - E'_n$ convergent et leurs ensembles limites sont $E + E'$, $E - E'$ [1].

2. *Construction de familles additives au sens complet.* — Le problème consiste étant donnée une famille arbitraire $\mathcal{H}$ d'ensembles quelconques, à déterminer une famille $\mathcal{F}$ comprenant $\mathcal{H}$ et close par rapport aux opérations S, D addition et soustraction de deux ensembles et *L* passage à la limite c'est-à-dire formation de l'ensemble limite d'une suite convergente d'ensembles de $\mathcal{F}$.

I. D'après la méthode générale indiquée § I, page 114, on pourra former la plus petite $\mathcal{H}_c$ de ces familles en la constituant par les ensembles qui sont chacun dernier terme d'une suite bien ordonnée dénombrable σ d'ensembles G résultant chacun d'une des opérations S, D, L effectuée sur des ensembles appartenant à $\mathcal{H}$ ou précédant G dans σ.

(On peut si l'on veut remplacer les opérations S et L par l'opération consistant à additionner une suite dénombrable d'ensembles).

II. Tout ensemble E de $\mathcal{H}_c$ résulte donc d'une suite dénombrable d'opérations portant chacune sur une suite dénombrable d'ensembles. Par conséquent la construction de chaque ensemble E à partir de $\mathcal{H}$ ne fait intervenir qu'une suite dénombrable E_1, E_2, ... d'ensembles de $\mathcal{H}$: E appartient en même temps à la plus petite famille additive au sens complet comprenant E_1, E_2, ... E_n, ... Et réciproquement celle-ci appartient à $\mathcal{H}_c$. Donc $\mathcal{H}_c$ est constituée par les ensembles appartenant à l'une quelconque des familles $\mathcal{N}_c$ qui sont chacune la plus petite

---

[1] Un de mes collègues de Strasbourg, M. FLAMANT, a bien voulu me faire observer que, sans supposer les E_n et F_n simultanément convergentes, on pourrait préciser les inégalités symboliques (1). C'est ainsi qu'on a

$$B_1 \equiv e - E' \; ; \quad e - e' < C_1 < E - e' \; , \quad E - E' < C_1 < E - e' \; . \quad C = E + E' \; .$$

J'ajoute que de même :

$$C = E + E' \; , \quad e + e' < B < E + e' \; , \quad e + e' < B < E' + e \; ;$$

de sorte que si l'une des suites données converge, on n'a plus que des égalités. Par exemple si les E_n convergent : $C_1 = E - e'$, $B = E + e'$.

famille additive au sens complet comprenant une suite dénombrable arbitraire déterminée $\mathcal{N}$ d'ensembles E_1, E_2, ... de $\mathcal{K}$.

III. Soit $\mathcal{N}_r$ la plus petite famille additive au sens *restreint* comprenant $\mathcal{N}$; c'est, comme $\mathcal{N}$, une famille dénombrable d'ensembles F_1, F_2, ... F_n, ... Appelons *atome* relatif à l'élément A, pour le système $\mathcal{N}$, l'ensemble commun à ceux des ensembles de $\mathcal{N}_r$ qui comprennent A. On voit que si un atome relatif à A possède au moins un élément B autre que A, il est aussi relatif à B. Deux atomes sont nécessairement disjoints s'ils sont distincts. Un atome pour le système $\mathcal{N}$ est, si on le compare à un ensemble quelconque F_i de $\mathcal{N}_r$, soit un sous-ensemble de F_i, soit disjoint de F_i. Le mode de construction de $\mathcal{N}_c$ indiqué plus haut montre qu'il en est alors de même vis-à-vis des ensembles de $\mathcal{N}_c$. Finalement si on a une famille *dénombrable*, $\mathcal{N}$ d'ensembles, on peut regarder ces ensembles de $\mathcal{N}$ chacun comme une somme d'atomes disjoints, atomes qui sont indestructibles quand on applique aux ensembles de $\mathcal{N}$ une suite dénombrable quelconque d'additions, soustractions, passages à la limite, de sorte que, de même, chacun des ensembles de la plus petite famille $\mathcal{N}_c$ additive au sens complet et comprenant $\mathcal{N}$ est aussi une somme d'atomes disjoints. (Ces remarques perdent leur intérêt dans le cas où les atomes seraient des ensembles réduits chacun à un élément, mais ce cas ne se présente pas nécessairement.) La notion d'atome est d'ailleurs moins facilement utilisable ici que dans le cas précédemment étudié où $\mathcal{N}$ serait fini (cas où les atomes étaient en nombre fini), parce que l'ensemble des atomes disjoints, non seulement ne sera plus ici fini, mais même ne sera pas, en général, dénombrable.

3. *Classes d'ensembles.* — On peut, si l'on veut, mettre en évidence le degré de complexité de la construction des divers ensembles de $\mathcal{K}_c$ en employant la méthode générale indiquée § 1, page 116. On appellera U la transformation qui consiste à remplacer d'abord une famille d'ensembles $\mathcal{K}$ par la famille $\mathcal{K}'$ obtenue en adjoignant à $\mathcal{K}$ les ensembles limites de suites convergentes (s'il en existe) d'ensembles de $\mathcal{K}$: puis à adjoindre à la famille $\mathcal{K}'$ obtenue les ensembles qui sont différences d'ensembles de $\mathcal{K}'$ et enfin à adjoindre à la famille obtenue $\mathcal{K}_1$, les ensembles qui sont sommes de deux ensembles de $\mathcal{K}_1$. L'application directe

de la méthode générale consisterait à considérer $\mathcal{H}_c$ comme formé des ensembles appartenant à l'une quelconque des familles qui sont les termes de la série bien ordonnée Σ':

$$\mathcal{H}, \quad U\mathcal{H}, \quad U(U\mathcal{H}), \ldots$$

Mais il est préférable ici de remarquer que $\mathcal{H}_c$ est aussi la plus petite famille additive au sens complet comprenant la famille $\mathcal{H}_r$ (famille additive au sens restreint, la plus petite comprenant $\mathcal{H}$). En conséquence $\mathcal{H}_c$ est aussi formée des ensembles appartenant à un des termes de la suite bien ordonnée Σ

$$\mathcal{H}_r, \quad U\mathcal{H}_r, \quad U(U\mathcal{H}_r), \ldots$$

où chaque terme s'obtient en appliquant l'opération U à la somme des familles de Σ qui précède celui-ci. Or on peut simplifier cette construction au moyen du lemme énoncé plus haut, sur la somme et la différence de deux ensembles limites. Il en résulte en effet que si $\mathcal{H}$ est une famille additive au sens restreint la transformation $U\mathcal{H}$ se réduira à $U\mathcal{H} = \mathcal{H}'$ et donnera une famille $U\mathcal{H}$ additive au sens restreint.

On en conclut que la suite Σ s'obtient de la façon suivante: chaque terme est la famille $\mathcal{H}$ constituée par la somme $\mathcal{H}$ des familles de Σ précédant ce terme et par les ensembles-limites des suites convergentes — s'il en existe — d'ensembles de $\mathcal{H}$. Autrement dit, après la formation de $\mathcal{H}_r$ (pour laquelle n'interviennent que les opérations S, D) la formation des termes successifs de Σ ne fait plus intervenir que l'opération L de passage à la limite et chaque terme de Σ est une famille additive au sens restreint. On voit en particulier qu'au lieu d'appliquer dans un ordre quelconque l'addition, la soustraction, le passage à la limite, on peut pour former $\mathcal{H}_c$, épuiser sur $\mathcal{H}$ les effets de la soustraction; puis sur la famille $\mathcal{H}_s$ obtenue épuiser les effets de l'addition; enfin sur la famille $\mathcal{H}_r$ ainsi engendrée épuiser les effets du passage à la limite.

La considération de la suite Σ non seulement offre un mode régulier de construction de $\mathcal{H}_c$ par l'extension progressive de la famille $\mathcal{H}$, mais encore il a sur le premier mode de construction indiqué l'avantage de fournir une répartition naturelle des

ensembles de la famille $\mathcal{H}_c$ en « classes » d'ensembles dont la construction à partir de $\mathcal{H}$ est de plus en plus compliquée.

Applications. — On conçoit bien que les généralités précédentes ont trouvé leur origine dans les travaux concernant les familles additives d'ensembles linéaires dont on trouvera l'exposé récent le plus complet dans l'ouvrage de M. de la Vallée-Poussin : « Intégrales de Lebesgue. Fonctions d'ensembles ».

Même dans ce cas l'auteur croit avoir élargi le point de vue ordinaire, par exemple en ne se restreignant pas au cas où la famille initiale donnée $\mathcal{H}$ est formée d'intervalles.

Mais sa théorie fournit aussi des applications intéressantes dans le cas où les éléments considérés sont des points de l'espace à une infinité de dimensions. L'auteur développera ailleurs ces applications ainsi que l'application à ce cas de la théorie des fonctions additives d'ensembles abstraits.

IV. — Fonctions additives d'ensembles abstraits.

Définitions. — Si une correspondance est établie qui fait correspondre à tout ensemble E d'une certaine famille $\mathcal{F}$, un nombre déterminé $f(E)$, cette correspondance définit une *fonction d'ensemble*, uniforme sur la famille $\mathcal{F}$.

Soient E_1, E_2 deux ensembles disjoints, c'est-à-dire sans éléments communs ; si l'on a

$$f(E_1 + E_2) = f(E_1) + f(E_2)$$

toutes les fois que E_1, E_2, $E_1 + E_2$ appartiennent à $\mathcal{F}$, on dit que f est *additive au sens restreint* sur $\mathcal{F}$.

Soient E_1, E_2, ... E_n, ... une suite infinie dénombrable d'ensembles disjoints deux à deux ; si l'on a

$$f(E_1 + E_2 + \ldots) = f(E_1) + f(E_2) + \ldots$$

toutes les fois que les ensembles E_1, E_2, ... et $E_1 + E_2 + \ldots$ appartiennent à la famille $\mathcal{F}$, on dit que f est *additive au sens complet* (ou plus simplement additive) sur $\mathcal{F}$.

On conçoit qu'il sera généralement plus facile et plus simple d'étudier une fonction additive au sens restreint (complet) sur une famille d'ensembles additive au sens restreint (complet).

C'est en fait surtout cette remarque qui a provoqué l'introduction de ces familles particulières d'ensembles.

Remarque: M. de la VALLÉE POUSSIN a pu écrire, d'ailleurs très justement, que le progrès essentiel introduit par la théorie de la mesure « est d'avoir réalisé l'additivité au sens complet ». Il n'est peut-être pas inutile de faire observer que si l'intuition de M. BOREL n'avait pas soudainement introduit cette notion, un développement régulier de la théorie des ensembles et du calcul fonctionnel aurait dû, plus lentement mais sûrement toutefois, y conduire. Qu'est-ce en effet qu'une fonction d'ensemble additive au sens complet ? C'est une fonction additive au sens restreint *et continue*, (et réciproquement), si nous appelons, comme il convient, fonction d'ensembles, continue sur une famille $\mathcal{F}$ d'ensembles, une fonction telle que $f(E_n)$ converge vers $f(E)$ si la suite convergente d'ensembles E_n de $\mathcal{F}$ a pour ensemble limite l'ensemble E de $\mathcal{F}$.

Rappel de propriétés connues des fonctions additives d'ensembles. — Nous n'étudierons ici que le cas des fonctions d'ensembles additives au sens complet sur une famille $\mathcal{F}$ d'ensembles additive au sens complet.

I. Une fonction f additive sur une famille additive $\mathcal{F}$ est bornée sur $\mathcal{F}$. Il en résulte que si $E = E_1 + \dots + E_n$ est une décomposition variable d'un ensemble E de $\mathcal{F}$ en un nombre fini de sous-ensembles disjoints appartenant à $\mathcal{F}$, la somme

$$|f(E_1)| + \dots + |f(E_n)|$$

a une borne supérieure finie qu'on peut appeler la variation totale de f sur E relativement à la famille $\mathcal{F}$ et qu'on peut désigner quand il s'agit toujours de la même famille $\mathcal{F}$ par la notation (due à J. RADON) $\int_E |df|$.

II. La variation totale d'une fonction f additive sur $\mathcal{F}$ est aussi une fonction d'ensemble additive sur $\mathcal{F}$.

III. On peut représenter à la fois une fonction additive f et sa variation totale au moyen de deux fonctions additives non négatives φ, ψ suivant les formules

$$f(E) = \varphi(E) - \psi(E)$$
$$\int_E |df| = \varphi(E) + \psi(E)$$

On obtient ainsi la représentation canonique de f.

IV. La représentation la plus générale d'une fonction d'ensembles additive f comme différence de deux fonctions additives non négatives $f(E) = \varphi_1(E) - \psi_1(E)$ s'obtient en ajoutant une fonction additive non négative, pour former φ_1, ψ_1 aux fonctions φ, ψ de la représentation canonique. En sorte que celles-ci sont les plus petites fonctions φ_1, ψ_1, possibles.

Définitions nouvelles. — Relativement à une fonction d'ensembles additive déterminée, f, et à une famille d'ensembles additive déterminée, $\mathfrak{F}$,

un ensemble E est *presque nul* s'il appartient à $\mathfrak{F}$ et si la variation totale de f sur E est nulle;

deux ensembles E, F sont *presque identiques*, s'ils ne diffèrent de leur ensemble commun que par des ensembles presque nuls;

deux ensembles E, F sont *presque disjoints*, si leur ensemble commun est presque nul.

Décomposition d'une fonction additive en partie régulière et en partie singulière.

Singularité. — Un ensemble H appartenant à la famille F est une singularité de la fonction f si tout sous-ensemble de H qui n'est pas presque nul est presque identique à H.

La variation totale de f sur une de ses singularités H est égale à $|f(H)|$. Nous appellerons $f(H)$ le saut de f sur H et $|f(H)|$ son saut absolu.

Deux singularités de f sont presque disjointes ou presque identiques.

L'ensemble des singularités presque disjointes d'une même fonction additive est dénombrable. Et même, plus précisément, si une fonction additive d'ensembles a au moins une singularité il existe une suite dénombrable S_1, S_2, ... de singularités disjointes deux à deux, telle que toute singularité de f soit presque identique à l'une de celles-ci.

Appelons *ensemble singulier* l'ensemble $S = S_1 + S_2 + \dots$ ou tout ensemble T appartenant à $\mathfrak{F}$ et presque identique à S.

Fonction des sauts. Partie régulière. — On peut décomposer une fonction $f(E)$ additive sur une famille d'ensembles additive $\mathfrak{F}$ en deux parties $f(E) = s(E) + r(E)$, où $s(E)$, $r(E)$ sont aussi, comme f, deux fonctions d'ensembles additives sur F,

mais où $r(E)$, la *partie régulière* de f, *n'a plus de singularités* et où au contraire on peut prendre *tout ensemble singulier de f* comme ensemble singulier de $s(E)$, *la fonction des sauts* de f, *avec les mêmes sauts* que pour f, sur chaque singularité de f, la fonction des sauts étant *nulle en dehors de tout ensemble singulier* de f.

Il suffit pour cela de poser sur tout ensemble E de $\mathcal{F}$

$$s(E) = f(E.T), \quad r(E) = f(E - T)$$

T désignant l'un quelconque des ensembles singuliers de f.

Remarquons que si E est un ensemble quelconque de $\mathcal{F}$ la partie commune à E et à une singularité S_i de f est, soit presque identique à S_i, soit presque nulle. En appelant $c_i = f(S_i)$, le saut de f sur S_i, on a donc $f(E.S_i) = c_i$ ou égal à zéro. Donc la *fonction des sauts de f peut s'exprimer sous la forme*

$$r(E) = c_{i_1} + c_{i_2} + \cdots + c_{i_n} + \cdots$$

si $S_{i_1}, S_{i_2} \ldots$ sont celles des singularités de f qui sont « presque contenues » dans E, c'est-à-dire qui ne sont pas presque disjointes de E.

D'autre part en ce qui concerne la partie régulière de f, on observera les propriétés suivantes de toute fonction additive g sans singularité : la borne inférieure de la variation totale de g sur un sous-ensemble e non presque nul (et appartenant à $\mathcal{F}$) d'un ensemble fixe E est zéro ; et plus généralement si on fait varier e dans E, la variation totale de g sur e, passe par toutes les valeurs intermédiaires entre son maximum qui est $\int_E |dg|$ et son minimum qui est nul. On démontre ce dernier résultat en prouvant qu'on peut décomposer tout ensemble E de $\mathcal{F}$ en un nombre fini de sous-ensembles disjoints appartenant à $\mathcal{F}$ et sur chacun desquels la variation totale de f est inférieure à un même nombre positif donné d'avance arbitrairement.

Décomposition de la variation totale. Il y a lieu de remarquer que si l'on appelle variation positive et variation négative, les deux fonctions non négatives φ, ψ dont la différence constitue la représentation canonique de f, la décomposition de f se reflète exactement sur ses variations totale, positive et néga-

tive. On a d'abord pour fonctions respectives des sauts de $\varphi_{(E)}$, $\psi_{(E)}$, $\int_E |df|$, les fonctions

$$\varphi(E.T),\ \psi(E.T),\ \int_{E.T} |df|$$

et pour parties régulières

$$\varphi(E-T),\ \psi(E-T),\ \int_{E-T} |df|$$

De plus puisque

$$\int_{S_i} |df| = |f(S_i)|, \qquad \text{ou} \qquad \varphi(S_i)+\psi(S_i) = |\varphi(S_i)-\psi(S_i)|$$

d'où

$$\psi(S_i)=0 \qquad \text{et} \qquad f(S_i)=\varphi(S_i). \qquad \text{ou}$$
$$\varphi(S_i)=0 \qquad \text{et} \qquad f(S_i)=-\psi(S_i)$$

l'ensemble $S = S_1 + S_2 + \ldots$ de singularités de f qui sont disjointes est la somme d'un ensemble singulier S' de φ et d'un ensemble singulier S'' de ψ, ces deux ensembles étant disjoints et composés le premier S' de toutes les singularités S'_i de S où les sauts de f sont positifs et le second S'' de toutes les singularités S''_j de S où les sauts de f sont négatifs, les sauts de φ sur S'' et ceux de ψ sur S' étant en outre nuls.

De sorte qu'on peut écrire:

$$s(E) = \varphi(E.S') - \psi(E.S'')\ ; \qquad r(E) = \varphi(E-S') - \psi(E-S'')$$
$$\sigma(E) = \varphi(E.S') + \psi(E.S'')\ ; \qquad \rho(E) = \varphi(E-S') + \psi(E-S'')$$

S', S'' étant deux ensembles disjoints fixes, indépendants de E. σ et ρ étant la fonction des sauts et la partie régulière de $\int_E |df|$.

Remarque: I. Les définitions se simplifieraient et certaines précautions de langage pourraient être évitées dans ce qui précède si l'auteur s'était borné à considérer le cas où la famille $\mathcal{F}$ est *complète* relativement à f, ou ce qui revient au même le cas où l'on aurait « prolongé analytiquement » la fonction f. C'est à quoi on arrive, en gros, en considérant f comme nul sur toute partie n'appartenant pas à $\mathcal{F}$ d'un ensemble presque nul, comme

l'auteur l'a expliqué dans un article du *Bull. de la Soc. Math. de France*, t. 43, 1915, page 16.

II. L'auteur traitera ailleurs de la décomposition de la partie régulière elle-même, en deux parties analogues à celles qu'il avait signalées au Congrès des Sociétés Savantes de 1913.

III. Les exposés précédents ont été donnés sans démonstrations, celles-ci s'obtenant assez facilement quand on se reporte aux exposés avec démonstrations (dus surtout à MM. Lebesgue et de la Vallée-Poussin) concernant le cas particulier où les familles considérées sont des familles composées d'ensembles linéaires et contenant les intervalles linéaires. D'ailleurs les démonstrations dans le cas général traité ici ont été données au cours des leçons faites par l'auteur à l'Université de Strasbourg dans le premier semestre 1921-22.

SUR LES FOYERS RATIONNELS D'UNE COURBE ALGÉBRIQUE

PAR

P. Appell, Membre de l'Institut (Paris).

I. Dans un article inséré aux *Nouvelles Annales de mathématiques* [1], se trouvent définis les foyers rationnels d'une courbe algébrique C

$$F(x, y) = 0 \qquad (1)$$

comme des *points tels que la distance d'un point quelconque* M *de la courbe* C *au point foyer soit exprimable par une fonction rationnelle* R *des coordonnées de* M.

Cette notion peut d'ailleurs s'étendre aux surfaces.

A la suite de cet article, M. E. Turrière, aujourd'hui profes-

[1] Sur les foyers rationnels d'une courbe algébrique plane ou gauche. *Nouvelles Annales de Mathématiques*, [4]. t. XVIII, novembre 1918, p. 401-402.

seur à la Faculté des Sciences de l'Université de Montpellier, m'a écrit pour me donner sur la question[1] d'intéressants renseignements historiques et bibliographiques, qu'il a ensuite résumés dans une note publiée dans l'*Enseignement mathématique*.

II. Inversement, si on se donne le foyer rationnel et la fonction R de x et y on peut écrire immédiatement l'équation de la courbe C; mais cette équation peut ne pas être irréductible. De plus, on peut obtenir la même courbe C avec un même foyer et une infinité de déterminations de la fonction rationnelle R; seulement les équations obtenues ne sont pas irréductibles; elles représentent la courbe C et d'autres courbes. C'est ce qui résulte de la suite. On voit dès lors pourquoi il importe, dans chaque cas, de limiter les degrés du numérateur et du dénominateur de R. Notamment, pour les coniques, on voit pourquoi il faut réduire R à une fonction linéaire de x et y.

III. D'après la définition, si (α, β) est un foyer rationnel de la courbe (1) en coordonnées rectangulaires, on aura, pour tout point M (x, y) de la courbe (1),

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\mathrm{R}^2(x, y)\,, \tag{2}$$

R (x, y) désignant une fonction rationnelle de x et y. Mais il peut arriver que l'équation (2) étant vérifiée par les coordonnées de tout point de (1), représente la courbe (1) et d'autres courbes.

Par exemple, si l'équation (2) est vérifiée par les coordonnées x et y de tout point de la courbe C, et si elle est irréductible, on a aussi pour tout point de C l'équation analogue

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\left[\mathrm{R}+\frac{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-\mathrm{R}^2}{\lambda}\right]^2 \tag{3}$$

λ étant une fonction rationnelle quelconque de x et y, assujettie à ne pas contenir au numérateur le facteur

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-\mathrm{R}^2\,.$$

Cette équation (3) développée s'écrit

$$\left[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-\mathrm{R}^2\right]\left[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-(\mathrm{R}-\lambda)^2\right]=0\,. \tag{4}$$

[1] Voir l'*Enseignement mathématique*, t. XX, 1919, p. 433-436.

Elle représente donc la courbe C avec une autre courbe Γ dépendant de λ et ayant le même point (α, β) pour foyer rationnel; seulement pour Γ la fonction rationnelle R(x, y) est remplacée par une autre fonction rationnelle quelconque R — λ. Le même point (α, β) est donc, d'une infinité de façons, foyer rationnel de C. Si *r* désigne la distance d'un point M(x, y) au foyer (α, β), et si on a, pour tout point de C

$$r = \mathrm{R}(x, y)$$

on a aussi, pour tout point M de C,

$$r = \mathrm{R} + \frac{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 - \mathrm{R}^2}{\lambda};$$

résultat évident; mais la nouvelle équation n'est pas irréductible.

Je n'insiste pas sur l'application aux coniques qui est immédiate. Par exemple si l'équation d'une ellipse est

$$(x-c)^2 + y^2 = \left(\frac{c}{a}x - a\right)^2,$$

on a aussi, pour tout point de la courbe,

$$(x-c)^2 + y^2 = \left[\frac{c}{a}x - a + \frac{(x-c)^2 + y^2 - \left(\frac{c}{a}x - a\right)^2}{\lambda}\right]^2. \quad (6)$$

Si on suppose λ *constant*, cette dernière équation représente une courbe du quatrième ordre, composée de l'ellipse donnée et d'une deuxième ellipse

$$(x-c)^2 + y^2 = \left(\frac{c}{a}x - a - \lambda\right)^2.$$

Le même traitement appliqué à l'équation (6) donnera les deux coniques et une quadrique, etc...

Cas des quadriques. — Je demande la permission d'attirer l'attention sur le sujet suivant: « *Peut-il exister, pour des quadriques non de révolution, des foyers rationnels* (α, β, γ) ? »

En d'autres termes, peut-on avoir, pour tout point M(x, y, z) d'une quadrique

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} - 1 = 0 \quad (Q)$$

ou

$$\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}-z=0 .$$

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=\left[\frac{f_{n+1}(x,y,z)}{f_n(x,y,z)}\right]^2$$

f_k étant un polynôme en x, y, z de degré k.

Algébriquement, cela revient, pour Q par exemple, à déterminer α, β, γ et les

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}+\frac{(n+2)(n+3)(n+4)}{6}$$

coefficients des deux polynômes f_n et f_{n+1}, de façon que l'on ait l'identité

$$\left[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2\right]f_n^2-f_{n+1}^2\equiv\left(\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}-1\right)f_{2n}$$

où f_{2n} est un polynôme de degré $2n$ avec

$$\frac{(2n+1)(2n+2)(2n+3)}{6}$$

coefficients. L'identification des deux polynômes de degrés $2n+2$, qui sont dans les deux membres, donne

$$\frac{(2n+3)(2n+4)(2n+5)}{6}$$

équations. En écrivant que le nombre des coefficients à déterminer est supérieur au nombre des équations, on a

$$3+\frac{(n+2)(n+3)(2n+5)}{6}+\frac{(2n+1)(2n+2)(2n+3)}{6}$$
$$>\frac{(2n+3)(2n+4)(2n+5)}{6},$$

$$-3(n+1)(n+2)(2n+5)+2(n+1)(2n+1)(2n+3)+18>0$$

ou, en faisant $n+1=\nu$

$$2\nu^3-15\nu^2-11\nu+18>0$$

inégalité vérifiée pour $\nu=9$, $n=8$.

SUR LES FOYERS RATIONNELS DES COURBES PLANES

PAR

M. Emile TURRIÈRE (Montpellier).

A l'occasion de l'article *Sur les foyers rationnels d'une courbe algébrique* de M. P. APPELL, que publie ci-dessus l'*Enseignement Mathématique*, je crois devoir ajouter quelques indications à l'article *Sur les foyers rationnels d'une courbe algébrique* que j'avais publié ici-même en 1919 [1].

L'équation polaire d'une courbe algébrique douée d'un foyer rationnel O, lorsque ce point est pris pour pôle, peut être mise sous la forme:

$$r = f\left(\text{tang}\,\frac{\theta}{2}\right),$$

f étant une fonction rationnelle de $\text{tang}\,\frac{\theta}{2}$.

1. Cette remarque rappelée, je considère une *courbe de direction* de LAGUERRE. La tangente de cette courbe étant représentée par l'équation

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = \omega(\alpha),$$

les cosinus directeurs de cette tangente, c'est-à-dire $\cos \alpha$ et $\sin \alpha$, sont fonctions rationnelles de $\text{tang}\,\frac{\alpha}{2}$. Par définition, d'autre part, x et y sont des fonctions rationnelles d'un paramètre t, telles que $\frac{dx}{ds}$ et $\frac{dy}{ds}$ soient aussi des fonctions rationnelles de t. Il en résulte que, pour une représentation propre ou rendue propre, t est une fonction rationnelle de $\text{tang}\,\frac{\alpha}{2}$.

La fonction $\omega(\alpha)$ est donc fonction rationnelle de $\text{tang}\,\frac{\alpha}{2}$.

Par suite:

La podaire, par rapport à un point quelconque du plan, d'une courbe algébrique de direction est une courbe admettant ce point pour foyer rationnel.

Réciproquement, si on considère une courbe (T) admettant

---

[1] *L'Enseignement Mathématique*, 20e année, 1919, p. 433-436.

O pour foyer rationnel, sa podaire négative est définie par une équation polaire tangentielle:

$$\omega = f\left(\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}\right);$$

$\frac{d\omega}{d\alpha}$ et $\frac{d^2\omega}{d\alpha^2}$ sont alors des fonctions rationnelles de tang $\frac{\alpha}{2}$; les coordonnées du point courant de cette podaire négative et le rayon de courbure $R = \frac{ds}{d\alpha} = \omega + \frac{d^2\omega}{d\alpha^2}$ sont fonctions rationnelles de ce paramètre. Par suite:

La podaire négative d'une courbe plane, algébrique, admettant le pôle pour foyer rationnel, est une courbe de direction.

2. En menant par un point O, fixe, un vecteur $O\rho$ équivalent au rayon de courbure R au point courant M d'une courbe (C). le lieu de l'extrémité ρ de ce vecteur est la courbe nommée *la radiale* de la courbe (C). Le point ρ a pour coordonnées polaires R et α, en prenant O pour pôle avec un axe azimutal convenable. Si la courbe (C) est de direction, R est, d'après ce qui vient d'être indiqué, une fonction rationnelle de tang $\frac{\alpha}{2}$. Par suite:

La radiale d'une courbe de direction plane et algébrique, est une courbe admettant le pôle pour foyer rationnel.

Réciproquement, si on impose la radiale (R) d'une courbe inconnue (C), en supposant que (R) soit une courbe algébrique admettant le pôle O pour foyer rationnel, l'équation naturelle de la courbe inconnue (C) est:

$$R = f\left(\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}\right).$$

f étant rationnel en tang $\frac{\alpha}{2}$. Les coordonnées cartésiennes d'un point courant de (C) sont déterminées par deux quadratures,

$$\int R\cos\alpha\, d\alpha \qquad \text{et} \qquad \int R\sin\alpha\, d\alpha,$$

portant toutes deux sur des fonctions rationnelles de tang $\frac{\alpha}{2}$. Si l'intégration s'effectue au moyen de seules fonctions rationnelles, la courbe (C) est une courbe de direction de Laguerre. Mais, généralement, la courbe (C) ainsi obtenue est transcendante (panalgébrique comme la chaînette, ou d'ordre deux de

transcendance comme la chaînette d'égale résistance de Coriolis) C'est une courbe *transcendante de direction*, au sens de la généralisation de la notion de courbe de direction qui avait été indiquée par M. P. Appell [1] en 1896.

Comme les propositions de cette nature de la géométrie générale ne valent que par les applications qu'il est possible d'en faire, je signalerai en plus de la chaînette d'égale résistance de Coriolis dont la radiale est une droite, les courbes suivantes transcendantes et de direction :

la cycloïde dont la radiale est le cercle $R = a \cos \alpha$; la chaînette ordinaire dont la radiale est le campyle ; la tractrice d'Huygens dont la radiale est la courbe Cappa ; la courbe d'égale pression pour un point matériel pesant (courbe qui a été étudiée par M. L. Lecornu, mais qui avait été considérée dès 1700 par le marquis de l'Hospital, par Jean Bernoulli et par Leibniz (?)), la courbe du pendule à tension constante (intimement liée à la courbe de pression constante), la chaînette élastique considérée par Bernoulli, par Bobillier et Finck et citée par A.-G. Greenhill qui fait remarquer que cette courbe d'équations paramétriques

$$x = t + 2k \operatorname{sh} t ,$$

$$y = \operatorname{ch} t + k \operatorname{ch}^2 t .$$

se construit par additions des coordonnées de la chaînette ordinaire et d'une parabole, les tangentes en des points correspondants étant parallèles ; la radiale de cette courbe s'obtient en ajoutant les rayons vecteurs de la multiplicatrice, radiale de la parabole, et du campyle d'Eudoxe, radiale de la chaînette ordinaire.

Comme courbe moins simple, mais intervenant en dynamique (tautochronisme avec résistance de milieu), je citerai la courbe :

$$y + s = e^{2s} ,$$

$$x = \omega + \frac{\sin 2\omega}{2} , \qquad y = \sin^2 \omega - \operatorname{Log} \sin \omega , \qquad e^s = \sin \omega ,$$

dont la radiale est la strophoïde droite.

---

[1] P. Appell. Exercice sur les courbes de direction, *Nouvelles Annales de mathématiques* [3], t. XV. 1896, p. 491-495.

SUR LES TRACTRICES
ET LES COURBES ÉQUITANGENTIELLES

PAR

C. De Jans (Gand).

1. La présente Note a pour but, non d'apporter des résultats nouveaux dans la solution du problème général des tractrices et des courbes équitangentielles, mais de montrer que l'usage des coordonnées intrinsèques rend pour ainsi dire intuitive la démonstration des formules fondamentales, et permet d'établir d'une manière facile certaines propriétés des tractrices du cercle.

On définit la tractrice d'une courbe plane (C) comme la trajectoire d'un point P, susceptible de glisser avec frottement sur le plan de la courbe, sous la condition d'être maintenu à une distance invariable k d'un point M décrivant (C).

La tractrice dépend donc, en général, de deux éléments arbitraires: la longueur du segment rectiligne k et l'orientation de ce segment pour une position donnée M_0 de M.

La définition qui vient d'être donnée est équivalente à la suivante: la tractrice d'une courbe (C) est une courbe (C′) telle, qu'à chaque point P de (C′) corresponde un point M de (C), situé sur la tangente de (C′) au point P, de manière que la longueur P M soit constante.

C'est cette deuxième définition dont on déduit généralement les propriétés géométriques des tractrices. Elle montre qu'une courbe quelconque est tractrice de toutes ses courbes équitangentielles; le problème des tractrices et celui des équitangentielles sont ainsi réciproques.

2. Désignons par σ l'arc de la courbe (C), compté à partir d'une origine arbitraire M_0 sur cette courbe; par r, le rayon de

courbure correspondant. Soient de même R, s les coordonnées intrinsèques du point correspondant P de la tractrice (C'). Soient encore M, M' deux positions infiniment voisines de M, se suivant dans le sens des arcs croissants: P, P', les positions correspondantes de P ; $d\tau$, l'angle compris entre les droites M P, M' P'; α, l'angle de M P avec la tangente à (C) en M, compté dans un sens convenable. On a

$$ds = d\sigma \cos \alpha \ , \qquad k d\tau = d\sigma \sin \alpha \ .$$

En tenant compte de la relation $ds = R d\tau$, on déduit de ces formules les relations bien connues

$$d\sigma = \pm \left(1 + \frac{k^2}{R^2}\right)^{\frac{1}{2}} ds \ , \tag{1}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{k}{R} \ . \tag{2}$$

Dans la première, le signe ambigu du radical a été mis en évidence. La seconde exprime que le centre de courbure de la tractrice est l'intersection des normales aux points M et P qui se correspondent sur leurs courbes respectives.

Il en résulte que R s'annule en tous les points P où P M est normale à (C), et devient infini en tous les points P où P M est tangente à (C).

3. Si α, au point M', devient $\alpha + d\alpha$, et si nous appelons $d\lambda$ l'angle de contingence de (C) au point M, nous avons encore

$$d\lambda = d\tau + d\alpha \ , \qquad d\sigma = r d\lambda \ ;$$

d'où, en tenant compte de (1) et de l'équation (2) différentiée,

$$\pm \frac{\sqrt{R^2 + k^2}}{r} = 1 - \frac{kR}{R^2 + k^2} \frac{dR}{ds} \ . \tag{3}$$

Pour obtenir l'équation intrinsèque de la tractrice, il faudra éliminer r et σ entre les équations (1), (3) et l'équation intrinsèque $\sigma = f(r)$ de la courbe (C). En général, on sera conduit ainsi à définir la tractrice par une équation différentielle du

second ordre. Nous verrons cependant que, comme dans le cas où l'on emploie les coordonnées cartésiennes ou polaires, les équations intrinsèques des tractrices de la ligne droite et du cercle s'obtiennent par l'intégration d'équations du premier ordre, se ramenant immédiatement aux quadratures.

L'équation différentielle qui définit les tractrices d'une courbe (C) peut admettre des intégrales singulières correspondant elles-mêmes à des tractrices; on peut appeler celles-ci des *tractrices singulières*.

4. Réciproquement, pour obtenir l'équation intrinsèque de la courbe équitangentielle de (C′), pour la valeur $|k|$ du segment constant, on éliminera R et s entre les équations (1), (3) et l'équation intrinsèque $R = \varphi(s)$ de (C′). Comme le segment $|k|$ doit être porté sur la tangente, en deux sens opposés à partir du point de contact, il faut donner à k le double signe; on aura ainsi à éliminer s entre les équations

$$r = \frac{(\varphi^2 + k^2)^{\frac{3}{2}}}{\varphi^2 + k^2 \pm k\varphi\varphi'}, \qquad \sigma = \int \frac{\sqrt{\varphi^2 + k^2}}{\varphi}\, ds. \qquad (4)$$

où l'on a posé $\varphi' = \dfrac{d\varphi}{ds}$.

L'équitangentielle ainsi déterminée peut, d'ailleurs, être décomposable en deux courbes distinctes.

5. Pour une valeur donnée de $|k|$, une courbe n'a qu'une équitangentielle, tandis qu'elle a une infinité de tractrices. L'équation de ces dernières peut changer suivant qu'on prend k avec l'un ou l'autre signe. Nous ferons à ce sujet la convention suivante, qui s'accorde avec la règle usuelle des signes. Au point initial M_0, pris sur la courbe de base, l'orientation de la droite sur laquelle sont portés les segments k, $-k$, est définie par la valeur α_0 de l'angle α, déterminé d'une manière univoque (n°s 1 et 2). Les segments opposés M_0P_0, M_0Q_0, égaux à $|k|$, définissent deux points initiaux P_0, Q_0, à partir desquels, lorsqu'un point M décrivant la courbe (C) passe en M_0, deux points P, Q tracent chacun une branche de tractrice. Nous convenons de dire que les trajectoires de ces deux points forment une *tractrice complète*. Celle-ci peut être indécomposable ou non.

Au point de vue envisagé, la tractrice ordinaire de la ligne droite n'est pas une tractrice complète [1].

La tractrice complète dépend donc des arbitraires $|k|$ et α_0, ce qui s'accorde avec sa définition par une équation différentielle du second ordre. L'angle α_0 varie de 0 à π.

6. *Développée de la tractrice.* — Désignons par R_1, s_1 les coordonnées intrinsèques des points de cette développée qui correspondent aux points R, s de la tractrice; nous choisissons l'origine des arcs s, en un point de rebroussement de cette dernière courbe; des relations

$$s_1 = R\ , \qquad R_1 d\tau = dR\ ,$$

il suit immédiatement

$$R = s_1\ , \qquad ds = \frac{s_1 ds_1}{R_1}\ ; \tag{5}$$

par substitution dans l'équation de la tractrice, on aura l'équation de la développée.

On peut encore écrire, en partant de la courbe (C) et en utilisant les formules (1), (3), (5),

$$\sqrt{s_1^2 + k^2}\,.\,ds_1 = R_1 d\sigma\ , \qquad \frac{\sqrt{s_1^2 + k^2}}{r} = 1 - \frac{kR_1}{s_1^2 + k^2}\ . \tag{6}$$

7. *Application à la tractrice ordinaire.* — Dans ce cas, (C) a pour équation $r = \infty$; la formule (3) donne

$$\frac{ds}{k} = \frac{RdR}{R^2 + k^2}\ .$$

En comptant les arcs à partir du point où $R = 0$, on obtient l'équation bien connue de la tractrice:

$$R^2 = k^2\left(e^{\frac{2s}{k}} - 1\right) = 2k^2 e^{\frac{s}{k}}\,\mathrm{sh}\,\frac{s}{k}\ .$$

---

[1] La tractrice complete de la droite, pour $|k|$ arbitraire et $\sigma_0 = \frac{\pi}{2}$, se compose de deux tractrices ordinaires, symétriques par rapport à la droite de base ; c'est peut-être ce qui a fait dire à SALMON (*Traité de géométrie analytique (courbes planes)*, trad. O. Chemin, Paris, 1884; p 405) que la tractrice ordinaire doit être complétée par sa symétrique.

La deuxième formule (6), pour $r = \infty$, fournit l'équation de la développée:

$$R_1 = \frac{s_1^2}{k} + k ,$$

qui représente une chaînette.

Déterminons encore les équitangentielles de la tractrice

$$R^2 = a^2 \left(e^{\frac{2s}{a}} - 1\right) .$$

En posant

$$\frac{a^2 - k^2}{a^2} = c^2 , \qquad e^{\frac{2s}{a}} = \frac{t^2 - c^2}{t^2 - 1} ,$$

on trouve, au moyen des équations (4), la représentation paramétrique suivante:

$$r = \frac{ak^2}{a \mp k} \cdot \frac{t^3}{(a \pm k - at^2)\sqrt{t^2 - 1}} , \qquad \sigma = \frac{a}{2} \log \frac{(t - c)^c (t + 1)}{(t + c)^c (t - 1)} .$$

Les courbes qu'elle définit sont toujours décomposables en deux syntractrices. Un cas remarquable correspond à $k = a$; une branche est la droite asymptote, l'autre a pour équation intrinsèque

$$r = \frac{a}{2} \cosh \frac{\sigma}{a} ,$$

c'est une courbe bien connue.

8. *Application aux tractrices du cercle.* — Soit a le rayon du cercle donné. L'équation (3) devient, pour $r = a$,

$$a \mp \sqrt{R^2 + k^2} = \frac{akR}{R^2 + k^2} \frac{dR}{ds} . \tag{7}$$

En excluant la solution

$$R = \pm \sqrt{a^2 - k^2} , \tag{8}$$

on peut séparer les variables et écrire

$$ds = \frac{akR\,dR}{(R^2 + k^2)\left(a \mp \sqrt{R^2 + k^2}\right)} . \tag{9}$$

L'équation (8) est une intégrale singulière de (7); elle montre que, parmi les tractrices du cercle $r = a$, pour une valeur donnée de k, se trouve comme tractrice singulière un cercle de rayon $\sqrt{a^2 - k^2}$. Ce cercle est évidemment unique et concentrique au cercle donné; il est réel si $|k| < a$.

Dans l'équation (7), on peut toujours admettre que k est positif; car, dans l'hypothèse $k < 0$, il suffirait de compter les arcs en sens inverse pour être ramené à ce cas. D'autre part, l'équation étant du premier ordre, son intégrale générale dépend d'une seule constante arbitraire, qui sera fixée par le choix de l'origine des arcs; donc, lorsque k est donné, (9) définit une courbe unique pour chacun des signes attribués à $\sqrt{R^2 + k^2}$. En d'autres termes, les deux tractrices, celle qui répond au signe — comme celle correspondant au signe +, sont déterminées en forme et en grandeur par la valeur de k; l'orientation, au point M_0, de la droite $P_0\,Q_0$ n'influe que sur leur position. Par conséquent, il y aura toujours au moins un point de ces courbes où la droite PM (ou la droite QM) passe par le centre du cercle de base, c'est-à-dire où $R = 0$. Nous compterons les arcs à partir d'un tel point.

On obtiendra aisément l'intégrale générale en posant dans l'équation (9) $R^2 + k^2 = u^2$; il vient ainsi, avec la condition que $s = 0$ donne $u = k$,

$$R^2 = k^2(\pm a - k)\frac{(\pm a + k)e^{\frac{2s}{k}} - 2ke^{\frac{s}{k}} - (\pm a - k)}{\left(\pm a - k + ke^{\frac{s}{k}}\right)^2}, \qquad (10)$$

ou

$$R^2 = 4k^2(\pm a - k)\frac{\left(\pm a \operatorname{ch}\frac{s}{2k} + k \operatorname{sh}\frac{s}{2k}\right)\operatorname{sh}\frac{s}{2k}}{\left[(2k \mp a)\operatorname{sh}\frac{s}{2k} \pm a \operatorname{ch}\frac{s}{2k}\right]^2}.$$

pour l'équation intrinsèque de la tractrice. Elle peut représenter deux courbes, à cause des doubles signes; les signes supérieurs, ainsi que les signes inférieurs, se correspondent.

On voit que R s'annule pour $s = 0$ et pour $s = k \log\frac{k \mp a}{k \pm a}$. Ces dernières valeurs sont réelles si $k > a$; elles mesurent la

longueur de l'arc compris entre deux points de rebroussement consécutifs. De même, on a $R = \infty$ pour $s = k \log \frac{k \mp a}{k}$; les points correspondants sont réels sur les tractrices qui correspondent à $k > a$, et sur une branche des tractrices qui correspondent à $k < a$. Enfin, lorsque s tend vers l'infini, R a pour limite $\sqrt{a^2 - k^2}$; et l'on sait en effet que la tractrice pour $k < a$ a une longueur infinie et possède un cercle asymptotique réel de rayon $\sqrt{a^2 - k^2}$, concentrique au cercle de base et asymptotique pour les deux branches de la tractrice complète ; il coïncide d'ailleurs avec la tractrice singulière. Si $k = a$, ce cercle a un rayon nul ; l'équation (10) donne d'une part $R = 0$, et de l'autre

$$R = \frac{2a\sqrt{e^{\frac{s}{a}} - 1}}{e^{\frac{s}{a}} - 2}\,; \tag{11}$$

c'est l'équation connue de la tractrice polaire (*tractrix complicata* de Cotes). Dans ce cas, l'arc entre le point de rebroussement et un point d'inflexion mesure $a \log 2$.

Remarquons que la courbe (10), où l'on prend a avec le signe $-$, s'identifie avec celle où a est pris avec le signe $+$, si l'on remplace s par $s - k \log \frac{k - a}{k + a}$, ce qui revient à transporter l'origine des arcs du point de rebroussement primitivement choisi en un des points de rebroussement immédiatement voisins. En n'introduisant que des arcs réels, ce transport de l'origine n'est possible que pour les tractrices qui correspondent à $k > a$. Donc les deux courbes représentées par l'équation (10) sont congruentes si $k > a$; elles ne le sont pas si $k < a$. En d'autres termes, il n'y a qu'une tractrice dans le premier cas ; il existe deux tractrices différentes dans le second.

9. *La tractrice du cercle peut-elle être une courbe fermée ?* — Puisque les tractrices, pour $k < a$, possèdent un cercle asymptotique, et ont, par conséquent, la forme de spirales à une infinité de spires, seules les tractrices qui correspondent à $k > a$ pourront éventuellement se fermer sur elles-mêmes. On sait que ces courbes présentent deux séries de points de rebroussement, répartis sur deux cercles concentriques au cercle de base,

de rayons $k + a$ et $k - a$. En s'appuyant sur d'évidentes raisons de symétrie, on s'assure que, en désignant par O le centre du cercle, et par A, B, C, trois rebroussements consécutifs sur la tractrice, la condition pour que cette courbe se ferme est que l'angle au centre A O C soit commensurable avec 2π, ou, en d'autres termes, que l'angle A O B soit commensurable avec π. Or, si nous connaissons l'arc σ' du cercle qui correspond à l'arc s' de la tractrice, d'extrémités A, B, il est clair — vu que le segment k aux points A et B est normal au cercle, et passe ainsi par O — que l'angle AOB est congru à $\frac{\sigma'}{a}$ suivant le module π. La tractrice sera donc fermée, si le rapport $\frac{\sigma'}{a\pi}$ est commensurable, et cette condition est aussi suffisante.

Posant $e^{\frac{s}{k}} = x$, on a, par (10),

$$\sqrt{1 + \frac{k^2}{R^2}} = \pm \frac{ax}{\Delta} ,$$

avec

$$\Delta^2 = (\pm a - k) [(\pm a + k) x^2 - 2kx - (\pm a - k)] .$$

Nous pouvons supposer que a est affecté du signe $+$; nous avons vu, en effet, (nº 8) que si a était précédé du signe —, on serait ramené au premier cas par un simple changement d'origine des arcs. L'équation (1) donne alors

$$d\sigma = ak \frac{dx}{\Delta} .$$

En fixant l'origine des arcs de manière qu'à $s = 0$ corresponde $\sigma = 0$, et en nous rappelant que l'arc s' compris entre deux rebroussements consécutifs A, B vaut $k \log \frac{k - a}{k + a}$, l'intégration donne, pour l'arc correspondant du cercle de base,

$$\sigma' = \frac{(2p + 1) ak\pi}{\sqrt{k^2 - a^2}} ,$$

p étant un entier.

La condition de fermeture sera que le rapport positif

$$\frac{(2p + 1) k}{\sqrt{k^2 - a^2}}$$

soit égal à un nombre commensurable. Représentons celui-ci par une fraction $\frac{\lambda}{\mu}$, que nous pouvons supposer réduite à sa plus simple expression. Il en résulte

$$\frac{a\lambda}{k} = \sqrt{\lambda^2 - (2p+1)^2\mu^2}\ .$$

Comme nous pouvons donner à μ des valeurs entières quelconques, nous obtiendrons toutes les tractrices envisagées en donnant à p une valeur fixe; en choisissant pour cette dernière la valeur zéro, il vient

$$\frac{a}{k} = \sqrt{1 - \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2}\ . \qquad (12)$$

Cette formule détermine le rapport des longueurs a et k qui définissent une tractrice fermée; elle montre que la fraction $\frac{\lambda}{\mu}$ est au moins égale à 1.

Appelons *foliole* l'arc ABC de la tractrice, A et C étant deux points de rebroussement voisins sur le cercle de rayon $k - a$, et B le rebroussement intermédiaire situé sur le cercle de rayon $k + a$. La tractrice définie par la formule (12) est composée de μ folioles, et l'on fera, pour la décrire, λ fois le tour du cercle de base. En effet, l'angle ω, qui mesure l'arc de cercle décrit par le point M pendant que le point P décrit une foliole, est égal au double de $\frac{\sigma'}{a}$ pris pour $p = 0$; nous aurons donc

$$\frac{\omega}{2\pi} = \frac{\lambda}{\mu}\ ,$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

L'angle sous lequel la foliole est vue du centre du cercle de base est

$$2\pi\left(\frac{\lambda}{\mu} - 1\right),$$

et l'angle sous lequel la tractrice entière est vue a la valeur

$$2\pi(\lambda - \mu)\ .$$

10. Un cas particulier assez intéressant est celui des tractrices à une seule foliole, c'est-à-dire celles qui répondent à $\mu = 1$.

Ces courbes sont pyriformes et possèdent deux points de rebroussement alignés sur le centre du cercle; elles sont, pour $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$, des tractrices complètes indécomposables. Celle pour laquelle $\lambda = 2$ a la forme conventionnelle d'un cœur. A mesure que λ augmente, elles tendent vers la tractrice polaire.

11. Il y a lieu de distinguer les courbes fermées pour lesquelles $k < 2a$, de celles pour lesquelles $k > 2a$.

Si $k < 2a$, on a $\lambda > \frac{2\mu}{\sqrt{3}}$; le minimum du nombre μ est 1. Il y a dans cette catégorie des tractrices à un nombre quelconque de folioles.

Si $k > 2a$, on a

$$1 < \frac{\lambda}{\mu} < \frac{2}{\sqrt{3}} ;$$

l'entier μ minimum qui puisse satisfaire à cette condition est $\mu = 7$, ce qui signifie que cette classe ne comprend pas de tractrices à moins de sept folioles. Avec cette valeur de μ, l'inégalité précédente exige $\lambda = 8$: on fait donc 8 fois le tour du cercle.

12. *Développées des tractrices du cercle.* — Les équations (5) et (9) donnent pour l'équation la développée,

$$R_1 = \frac{(s_1^2 + k^2)\left(a \pm \sqrt{s_1^2 + k^2}\right)}{ak} .$$

Cette courbe se compose de deux branches, à cause du double signe du radical. Si $\mu = 1$, elle appartient aux lignes dites à λ ventres.

En particulier, la développée de la tractrice polaire est

$$R_1 = \frac{(s_1^2 + a^2)\left(a \pm \sqrt{s_1^2 + a^2}\right)}{a^2} .$$

Cette ligne est bien connue; elle n'est autre que la spirale algébrique d'équation polaire $\rho(\omega^2 - 1) = 2a$.

SUR CERTAINES IDENTITÉS GÉOMÉTRIQUES ET LEUR TRADUCTION ALGÉBRIQUE

PAR

P.-C. DELENS (Le Hâvre).

Je me propose ici de montrer les avantages des algèbres géométriques comme intermédiaires entre le raisonnement direct et le calcul analytique. Certaines de ces méthodes s'appliquent particulièrement à l'étude des systèmes articulés plans et gauches et ont déjà été employées avec succès dans ce sens. Je reprends une question traitée par LAISANT et M. FONTENÉ dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (années 1899, 1917), tant par le calcul des quaternions que par la géométrie, et dans le but de rapprocher les deux méthodes. Il s'agit de l'extension au tétraèdre du théorème de BELLAVITIS sur le quadrangle plan.

Soit un tétraèdre *abcd*; en employant le quaternion comme bi-radiale [1], je forme le bi-rapport:

$$(abcd) = \frac{\frac{ca}{cb}}{\frac{da}{db}} = \left(\frac{ca}{cb}\right)\left(\frac{da}{db}\right)^{-1} = ca \,.\, cb^{-1} .\, db \,.\, da^{-1} \;,$$

les facteurs étant ordonnés. (*ca*, etc. désignant des vecteurs, et même des vecteurs quaternions de Hamilton dans le dernier membre de l'égalité.)

Soit maintenant *efg* une section anti-parallèle de *bcd* par rapport à *a* sur le tétraèdre; sur la face *abc*, les vecteurs *ef* et

---

[1] Cf. G. KŒNIGS. *Cinématique*, p. 464.
R. LEVEUGLE. *Calcul géométrique*, p. 107.

cb sont anti-parallèles et on obtient, sur simple inspection de la figure, l'égalité entre quaternions:

$$\frac{ca}{cb} = K\frac{ea}{ef} \qquad (K = \text{conjugué de})$$

De même sur la face *abd*:

$$\frac{da}{db} = K\frac{ea}{eg}$$

donc:

$$(abcd) = K\frac{eg}{ef} .$$

Evaluons de même le bi-rapport (*acbd*):

$$(acbd) = K\frac{gf}{ef} .$$

Mais les vecteurs *eg*, *gf*, *fe* forment un contour triangulaire, donc:

$$eg + gf + fe = 0 \qquad (1)$$

et par suite:

$$K\frac{eg}{ef} + K\frac{gf}{ef} = K\frac{ef}{ef} = 1 .$$

Il en résulte que dans le calcul des quaternions comme dans le calcul algébrique usuel, on conserve l'identité:

$$(abcd) + (acbd) = 1 . \qquad (2)$$

C'est cette identité qui, rapprochée de (1), traduit le théorème de Bellavitis pour le tétraèdre. Avant d'en tirer quelques conséquences, ajoutons quelques mots sur les propriétés du bi-rapport (*abcd*). Une telle expression est un quaternion, soit λ, défini de manière unique par son module, son angle d'ouverture et son axe. Or il est facile d'exprimer en fonction de λ les expressions:

$$(abcd) = \lambda , \qquad (abdc) = \frac{1}{\lambda} , \qquad (acbd) = 1 - \lambda ,$$

$$(acdb) = \frac{1}{1-\lambda} , \qquad (adcb) = \frac{\lambda}{\lambda - 1} , \qquad (adbc) = \frac{\lambda - 1}{\lambda}$$

qui représentent toutes les quaternions co-axiaux, et dont l'interprétation est immédiate dans le triangle *efg*.

Si on évalue au contraire les expressions:

$$(badc) = \mu \qquad (cdab) = \nu \qquad (dcba) = \rho$$

on trouve leur représentation appropriée dans les triangles sections du tétraèdre par les plans anti-parallèles aux faces *cda*, *dab*, *abc*, par rapport aux sommets opposés. Ces quaternions ont du reste même module et même ouverture que λ et de chacun d'eux on déduit, comme précédemment, cinq autres quaternions co-axiaux [1]. En ce qui concerne l'invariance de la forme du triangle représentatif d'un tétraèdre par rapport au groupe des inversions, cela résulte de la constance du module de λ (ou μ, ν, ρ).

En définitive, on a obtenu 24 bi-rapports vectoriels, formant 4 groupes de 6 éléments, groupes se correspondant par l'échange de λ en μ, ν ou ρ. Les propriétés usuelles des rapports anharmoniques ne sont donc pas toutes conservées pour ces bi-rapports, mais celles qui subsistent traduisent des analogies entre ensembles de 4 points de la droite, du plan, ou de l'espace.

On aurait du reste pu envisager d'autre manière l'extension du rapport anharmonique, par exemple considérer $\frac{ca.db}{cb.da} = ca.db.cb^{-1}.da^{-1}$, et établir les relations entre ces expressions et les précédentes.

A noter encore que le quaternion $\lambda = (abcd)$ peut servir à fixer dans l'espace la position d'un point *d* par rapport à un triangle de référence *abc*.

Revenons à l'étude de la relation (2):

$$(abcd) + (acbd) = 1 \tag{2}$$

ou:

$$ca \,.\, cb^{-1} \,.\, db \,.\, da^{-1} + ba \,.\, bc^{-1} \,.\, dc \,.\, da^{-1} = 1 \,.$$

Si le tétraèdre est aplati suivant un quadrangle sur un plan, la démonstration donnée reste valable; mais entre quaternions

[1] L'étude du mécanisme de M. BENNETT (isogram) (Cf. R. BRICARD, *Cinématique et Mécanismes*, p. 159) se base directement sur ces remarques.

co-axiaux (ou opérateurs complexes), la commutativité de la multiplication permet d'écrire l'équation précédente sous la forme:

$$ab \cdot cd + ac \cdot db + ad \cdot bc = 0 . \qquad (3)$$

Ce n'est cependant pas sous cette forme (3), mais sous la forme (2) qu'on peut généraliser le théorème de Bellavitis.

La relation (3), comme l'a rappelé M. Fontené, est une identité algébrique entre vecteurs, à savoir:

$$x(y - z) + y(z - x) + z(x - y) = 0$$

dès qu'on emploie entre les vecteurs une multiplication distributive et commutative.

Or soit pq le produit de deux éléments — ici des vecteurs — dans une telle multiplication. Il résulte de l'œuvre de Grassmann qu'un tel produit peut se ramener à une fonction linéaire et homogène du produit « algébrique » (pq) des mêmes éléments. L'opération de la division généralisée permet aussi de substituer à ces produits des *équivalences algébriques* suivant un module convenable. Ainsi Grassmann a défini dans le plan le produit « complexe » de deux vecteurs, qui se peut traiter comme une équivalence algébrique suivant le module $(u^2) + (v^2)$, u et v étant deux vecteurs unitaires rectangulaires (de même que le produit des nombres complexes est une équivalence suivant le module $1 + i^2$).

On confond trop souvent ce produit complexe des vecteurs du plan avec le produit des nombres complexes, qui lui est seulement isomorphe: l'exemple du théorème de Bellavitis va encore montrer la différence des méthodes.

Deux produits complexes de vecteurs d'un plan, pq et $p'q'$, étant égaux quand leurs produits algébriques (pq) et $(p'q')$ sont congrus suivant le module $(u^2) + (v^2)$, on voit que l'égalité:

$$pq = p'q'$$

signifie:

1° les produits des modules des vecteurs p, q et p', q' sont égaux

2° les couples de vecteurs p, q et p', q' ont même direction de bissectrice intérieure, même direction de bissectrice extérieure.

Dans le produit complexe ainsi défini, la multiplication est commutative, le produit ne s'annule qu'avec un de ses facteurs, la division est possible et unique. On peut donc définir, à partir d'un vecteur u, un second vecteur u' tel que:

$$u' = \frac{pq}{u} = \frac{p}{u} q = \frac{q}{u} p$$

par:

$$uu' = pq$$

$\frac{p}{u}$, $\frac{q}{u}$, sont alors les nombres (opérateurs) complexes mesurant les rapports de p, q à un vecteur arbitraire u, choisi comme unité dans le plan. Alors:

$$\frac{pq}{u^2} = \frac{p}{u}\frac{q}{u}$$

est le produit de ces nombres complexes.

Partons alors de l'identité (3), la multiplication étant complexe. De

$$ab \,.\, cd + ac \,.\, db + ad \,.\, bc = 0 \tag{3}$$

on déduit:

$$\frac{ab \,.\, cd}{u} + \frac{ac \,.\, db}{u} + \frac{ad \,.\, bc}{u} = 0\ , \tag{4}$$

soit:

$$u_1 + u_2 + u_3 = 0$$

c'est-à-dire qu'à tout vecteur u du plan correspond, par rapport au quadrangle *abcd*, un contour triangulaire U formé des vecteurs u_1, u_2, u_3.

En divisant par u^2 les termes de (3) on obtient la relation entre nombres complexes comme elle est habituellement employée [1]. La relation (3) elle-même indique en outre que les directions des bissectrices des couples de côtés opposés du quadrangle forment une involution.

---

[1] Il est utile de remarquer que, réciproquement, toute équation entre nombres complexes. rendue homogène, s'interprete comme équation entre produits complexes de vecteurs, par suite de l'isomorphisme signalé.

Enfin, comme évidemment:

$$\frac{ab \cdot cd}{\frac{ab \cdot cd}{u}} = \frac{ac \cdot db}{\frac{ac \cdot db}{u}} = \frac{ad \cdot bc}{\frac{ad \cdot bc}{u}}$$

ou:

$$\frac{ab \cdot cd}{u_1} = \frac{ac \cdot db}{u_2} = \frac{ad \cdot bc}{u_3}$$

et les égalités qui s'ensuivent entre modules et angles, le triangle U reste semblable à lui-même quand u varie: c'est le théorème de Bellavitis.

Si on développait un produit complexe analogue entre vecteurs de l'espace, on aurait à considérer des congruences géométriques suivant un module $(u^2) + (v^2) + (w^2)$ (u, v, w étant 3 vecteurs égaux, 2-à-2 rectangulaires).

Mais une égalité telle que:

$$pq = p'q'$$

ne serait possible que si les 4 vecteurs étaient coplanaires. Autrement dit, une expression $\frac{pq}{u}$ ne pourrait en général représenter un vecteur, la division ne serait plus possible. De l'identité (3) étendue au tétraèdre, car la multiplication reste commutative, on ne pourrait en général déduire l'existence d'un triangle U correspondant à un vecteur u. Ce triangle n'existerait plus que pour des positions particulières de u. Nous allons tourner cette difficulté.

Soit $\varphi[(pq), u]$ une fonction linéaire et homogène *à la fois* par rapport au produit *algébrique* (pq) et au vecteur u, et qui représente elle-même un vecteur. Alors, en posant:

$$\varphi[(ab \cdot cd), u] = u_1 , \quad \varphi[(ac \cdot db), u] = u_2 , \quad \varphi[(ad \cdot bc), u] = u_3$$

l'identité (3) entraîne:

$$u_1 + u_2 + u_3 = 0 .$$

Mais nous devons maintenant rendre la fonction précédente apte à traduire des relations de similitude afin de retrouver le théorème de Bellavitis dans le tétraèdre. Si le triangle U formé

de u_1, u_2, u_3 doit garder ses côtés proportionnels à trois nombres l^2, m^2, n^2, on devra avoir:

$$\frac{u_1 \times u_1}{l^2} = \frac{u_2 \times u_2}{m^2} = \frac{u_3 \times u_3}{n^2}$$

(le signe $\times$ caractérisant ici le produit scalaire des vecteurs).

C'est, comme on le voit, imposer au vecteur u, de satisfaire à deux équations numériques. Ces équations étant du 2me degré en u, on trouve comme solutions quatre directions de vecteurs u. Et si les nombres l^2, m^2, n^2 ont été pris proportionnels aux produits des longueurs des arètes opposées du tétraèdre, ces directions sont perpendiculaires aux sections anti-parallèles des faces, et nous retrouvons là seulement l'équivalent du théorème plan de Bellavitis.

Décembre 1921.

SUR LE DÉPLACEMENT D'UN POINT DANS L'ESPACE A n DIMENSIONS GÉOMÉTRIE DU n-ÈDRE

PAR

Georges Tiercy (Genève).

---

1. — On sait qu'en mécanique analytique, on peut ramener l'étude du mouvement d'un système dans l'espace ordinaire à l'étude du mouvement d'un point dans un hyperespace. Il n'est donc pas dépourvu d'intérêt d'examiner de très près les propriétés des variétés à une dimension dans l'espace E_n. Dans la présente étude, on utilise la notion de *vecteur* de E_n.

On appellera *vecteur* V le système de *n nombres réels*:

$$v_1 , v_2 , \ldots , v_n ;$$

nous dirons que les vecteurs d'un ensemble sont indépendants les uns des autres s'il n'y a entre eux aucune relation linéaire.

Les n nombres d'un vecteur apparaissent comme les n projections, sur n axes de coordonnées, d'un segment de droite V. Il en résulte que l'espace E_n à n dimensions pourra être envisagé comme l'ensemble des vecteurs se déduisant linéairement de n vecteurs indépendants. En réalité, on se meut dans le domaine de l'algèbre.

Désignons par $V_1, V_2, \ldots, V_n$ les n vecteurs indépendants ; et par $(v_{k,i})$ les n *projections* du vecteur V_k; la condition d'indépendance s'écrit :

$$\| v_{k,i} \| \neq 0 \ ;$$

si alors on désigne par X un vecteur quelconque déduit des n premiers, on aura :

$$X = \sum_{i=1}^{i=n} \rho_i V_i \ ;$$

ou bien, pour les projections x_k de X :

$$x_k = \sum_{i=1}^{i=n} \rho_i v_{k,i} \ ,$$

où les ρ_i sont des nombres réels.

S'il arrive qu'un système de n nombres ne puisse être déduit linéairement de n systèmes V_i, on dira que ce vecteur est en dehors de l'espace E_n.

Les n vecteurs indépendants qui définissent un espace E_n constituent ce que nous appellerons la *base* de cet espace. Mais, de cette base, on pourra déduire une infinité d'autres ensembles de n vecteurs indépendants les uns des autres; et pour chacun, de ces nouveaux ensembles, chaque vecteur se déduira linéairement du premier ensemble. Tous ces ensembles seront dits *équibases*.

Nous supposerons connues les propriétés fondamentales de ces systèmes de nombres, nous réservant de revenir sur quelques détails essentiels. En particulier, nous supposerons le lecteur averti de tout théorème relatif à la composition ou à la décomposition des vecteurs, aux cosinus directeurs d'un vecteur, à l'angle de deux vecteurs, etc., etc.

2. — Soit, dans E_n, un vecteur variable $\overline{OP_1}$, dont les composantes s'écrivent x_i ($i = 1, 2, ..., n$). Supposons que les nombres x_i varient d'une façon continue; au bout d'un temps très court, le vecteur X est devenu $(X + dX)$ dont les composantes sont $(x_i + dx_i)$; ce vecteur est le résultant du système x_i et du système dx_i; nous dirons alors que l'extrémité du vecteur X a *parcouru un chemin*, dont les composantes sont les quantités dx_i; la *longueur* de ce chemin infiniment petit est donnée par:

$$ds^2 = \Sigma\, dx_i^2 .$$

Supposons que ce déplacement se continue pendant un certain temps; dans chaque instant dt, l'extrémité du vecteur décrit un petit chemin ds; au bout du temps t, nous dirons que le point X a parcouru un *arc* s *d'une courbe* $\mathcal{C}$.

Le *nombre s* ainsi défini est fonction du temps t; comme d'autre part les composantes x_i sont aussi fonctions de t, on pourra les exprimer en fonction du nombre s.

Cela posé, considérons $(n - 1)$ autres positions $\overline{OP_2}$, $\overline{OP_3}$, ..., $\overline{OP_n}$ du vecteur, voisines de la position $\overline{OP_1}$; les composantes du vecteur OP_{k+1} étant:

$$(y_k)_i = x_i + dx_i + d^2x_i + ... + d^kx_i .$$

Par le point P_1, imaginons un vecteur unité (1_{p_1}), dont l'orientation varie, suivant une loi connue, en fonction du temps t ou de l'arc s de la courbe $\mathcal{C}$. Les projections de ce vecteur $(1_{p_1})_i$ sont fonctions continues de t; autrement dit, par P_1 passe une droite (p_1) dont les cosinus directeurs sont les quantités $(1_{p_1})_i$. De chacun des points P_i part donc un vecteur unité déterminé; soient (1_{p_i}) ces vecteurs.

Par P_1, menons une *parallèle* h_k à chacune des droites p_k; on détermine ainsi ce que nous appellerons des éléments *pseudo-osculateurs*; p_1 et h_2 définissent un *plan pseudo-osculateur* Π_2: $p_1, h_2, h_3, ..., h_k$ définissent un *k-plan pseudo-osculateur* Π_k.

Soit alors, dans Π_k, un point M quelconque; et soient ξ_i les composantes du vecteur OM. En appelant A_m les projections du

vecteur P_1M sur les k axes de Π_k, il vient:

$$\xi_i = x_i + \sum_{m=1}^{m=k} A_m \left(1_{p_m}\right)_i \cdot$$

ce qui peut s'écrire sous la forme:

$$\xi_i = x_i + \sum_{m=1}^{m=k} B_m \left(1_{p_1}\right)_i^{(m)} :$$

les coefficients B_m sont évidemment les mêmes dans les n relations $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$.

3. — Construisons maintenant le « *n-èdre n-rectangle* » de la courbe $\mathcal{C}$, attaché au point P_1 et relatif à la direction (p_1).

Pour cela, considérons:

dans Π_2, une droite $g_2 \perp$ à p_1 :
dans Π_3, une droite $g_3 \perp$ à Π_2 :
. . . .
dans Π_k, une droite $g_k \perp$ à Π_{k-1} ;
. . . .

Nous savons que cela est possible. Ces n droites ($g_1 = p_1$, g_2, ..., g_n) forment un *n-èdre n-rectangle;* c'est le *n-èdre relatif à la direction p_1*. Les cosinus directeurs des arêtes de ce n-èdre, ou projections des vecteurs-unités portés sur ces arêtes, seront les systèmes de nombres $(1_k)_i$: pour $k = 1$, on a:

$$(1_1)_i = (1_{p_1})_i \cdot$$

En outre, on posera:

$$\left\| (1_k)_i \right\| = +1 :$$

le n-èdre n-rectangle relatif à (p_1) est alors dit *applicable* sur le n-èdre de référence de E_n. Et l'on connaît la propriété fondamentale du déterminant ci-dessus: chaque terme est égal à son mineur.

4. — Nous nous sommes placés dans le cas tout à fait général où le vecteur (1_{p_1}) a une direction quelconque. On passera sans difficulté au cas le plus important, qui est un cas particulier:

celui où la droite (p_1) se confond avec *la tangente* (t_1) en (P_1); on appelle *tangente* la droite passant par P_1 et portant le petit vecteur dx_i. Dans ce cas, les éléments pseudo-osculateurs en P_1 deviennent les *éléments osculateurs;* et le n-èdre rectangle attaché à P_1 et relatif au vecteur (1_{p_1}) devient le *n-èdre principal.*

5. — Prenons alors le cas du n-èdre principal; et supposons que le n-èdre de référence soit la position initiale du n-èdre mobile attaché au point P_1 de $\mathcal{C}$.

Considérons un n-èdre auxiliaire, mobile autour de l'origine fixe, et dont les arêtes soient données par les vecteurs (1_k).

Soit X un vecteur $\overline{OM}$ rapporté au n-èdre fixe; et soit Ξ le même vecteur rapporté au n-èdre mobile; on a les relations:

$$X_i = \sum_{k=1}^{k=n} (1_k)_i \xi_k \;; \qquad X = \sum_{k=1}^{k=n} 1_k \xi_k = \Xi \;. \tag{1}$$

Dérivons ces relations par rapport au temps t, les composantes ξ_k étant considérées comme constantes; il vient:

$$\frac{dX_i}{dt} = \sum_{k=1}^{k=n} \xi_k \frac{d(1_k)_i}{dt} \;. \tag{2}$$

Ces expressions donnent les projections de la vitesse du point M considéré, sur les axes fixes; les projections de cette vitesse sur les axes mobiles seront données par:

$$V_m = \sum_{i=1}^{i=n} (1_i)_m \frac{dX_i}{dt} \;. \tag{3}$$

Tenons compte des relations existant entre les cosinus directeurs des arêtes mobiles; et posons:

$$p_{k,h} = \sum_{i=1}^{i=n} (1_i)_k \frac{d(1_i)_h}{dt} \;, \qquad \text{où} \qquad p_{k.h} = -p_{h.k} \;; \qquad p_{h.h} = 0 \;: \tag{4}$$

on obtient, à la place de (3), les formules:

$$V_m = \sum_{k=1}^{k=n} p_{m.k} \xi_k \;: \tag{5}$$

le déterminant des quantités $p_{k,h}$ est symétrique gauche; nous appellerons ces coefficients $p_{k,h}$ les *rotations instantanées*.

6. — Supposons maintenant que l'origine du n-èdre mobile se meuve en translation; et désignons par (t_i) les translations composantes par rapport aux axes mobiles. Dans le cas où l'on considère le n-èdre principal, seule la translation (t_1) est différente de zéro.

Soit alors le déplacement le plus général d'un point, mobile lui-même par rapport au polyèdre mobile. Les projections de la vitesse sur les arêtes mobiles seront :

$$V_m = \frac{d\xi_m}{dt} + t_m + \sum_{k=1}^{k=n} p_{m.k}\xi_k \ ; \tag{6}$$

avec, dans le cas principal :

$$t_1 = \frac{ds}{dt} = s' \ ; \qquad t_i = 0 \ , \qquad i \neq 1 \ .$$

On a d'ailleurs les relations :

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^{k=n} t_k (1_i)_k \ . \tag{7}$$

qui s'écrivent comme suit dans le cas principal :

$$\frac{dx_i}{dt} = t_1 (1_i)_1 = s'(1_i)_1 \ . \tag{8}$$

où s' est donné en fonction du temps t. On voit qu'on retrouvera les coordonnées x_i par de simples quadratures, dès qu'on aura déterminé les vecteurs (1_i) en fonction du temps.

7. — Reprenons les formules (6), et faisons-y les (t_m) nuls; c'est donc le cas où l'origine est fixe. Prenons comme vecteur Ξ le vecteur 1_i; les équations (6) deviennent :

$$0 = \frac{d(1_i)_m}{dt} + \sum_{k=1}^{k=n} p_{m.k}(1_i)_m \ ; \tag{9}$$

On a ainsi n groupes de n équations.

8. — Venons-en à la question suivante: Supposons que, d'une

façon ou d'une autre, on ait connaissance de s' et des rotations en fonction du temps; y a-t-il un mouvement correspondant à ces données?

Cela revient à déterminer les n^2 cosinus directeurs du n-èdre mobile; car alors, grâce à (8), on aura les coordonnées x_i du point P_1. Or, chacun des n groupes de n cosinus satisfait aux équations:

$$0 = \frac{d(u)_m}{dt} + \sum_{k=1}^{k=n} p_{m,k}(u)_m \quad (10)$$

On vérifiera aisément la propriété suivante: si (u) et (u') sont deux vecteurs solutions de (10), les expressions

$$|u|^2 , \quad |u'|^2 , \quad \text{et} \quad u \cdot u' . \quad (11)$$

sont des constantes; il suffit de dériver ces quantités par rapport à t, en tenant compte de (10) et de (4); les dérivées sont nulles.

Cette propriété permet de répondre par l'affirmative à la question posée. Soit en effet un n-èdre n-rectangle de même disposition que le n-èdre fixe; ses vecteurs-unités sont:

$$\left(u_i^t\right) \quad (12)$$

Cherchons alors les solutions de (10) qui ont les valeurs (12) pour valeurs initiales. Les expressions $|u_i|^2$ et $u_i . u_k$ étant constantes (expression 11) et valant respectivement 1 et 0 (valeurs 12), on a chaque instant les vecteurs-unités du n-èdre mobile.

La position initiale (12) est arbitraire; il y a donc une infinité de solutions; au fond, c'est un même déplacement, rapporté à des n-èdres différents.

Conclusion: les fonctions s' et $p_{m.k}$ étant données, il y correspond un seul mouvement dans E_n.

9. — *Remarque :* Quel est, par rapport au n-èdre mobile, le lieu des points de vitesse minima (si ce lieu existe) ?

Le vecteur Ξ de chaque point est alors constant; on a:

$$V^2 = \sum_{i=1}^{i=n} \left[t_i + \sum_{k=1}^{k=1} p_{i.k} \xi_k \right]^2 ;$$

égalant à zéro les dérivées de V^2 par rapport aux lettres ξ, on obtient les n équations homogènes:

$$\sum_{k=1}^{k=n} p_{k.i} V_k = 0 , \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) . \tag{13}$$

Si le déterminant de (13) est différent de zéro, la solution se réduit à un point de vitesse nulle. Si le déterminant de (13) est nul, les équations (13) se réduisent à $(n - 1)$ équations distinctes (les mineurs du déterminant n'étant pas tous nuls); le lieu est alors une *variété rectiligne.*

Or, le déterminant Δ de (13) est symétrique gauche; si n est pair, ce déterminant est en général non nul; si n est impair, il est toujours nul. Si, exceptionnellement, Δ était nul, avec n pair, le lieu serait une variété linéaire à plusieurs dimensions.

10. — Revenons au cas général du polyèdre des (g_i). Et définissons ce que nous appellerons *courbures de la courbe $\mathcal{C}$ relatives au* n*-èdre des* (g_i), ou *pseudo-courbures.*

Appelons dv_i les angles de contingence formés respectivement par les axes de même indice de deux n-èdres rectangles voisins. Si ds est l'élément d'arc de $\mathcal{C}$, la pseudo-courbure en P_1 relative à $p_1 = g_1$ sera définie par:

$$C_1 = \frac{1}{R_1} = \frac{dv_1}{ds} = \frac{v'_1}{s'} ; \tag{14}$$

de même, la pseudo-courbure relative à g_i sera définie par:

$$C_i = \frac{1}{R_i} = \frac{dv_i}{ds} = \frac{v'_i}{s'} . \tag{15}$$

D'ailleurs, l'angle dv_i étant infiniment petit, on a:

$$dv_i = \sqrt{\sum_{m=1}^{m=n} [d(1_i)_m]^2} = d(1_i) ; \tag{16}$$

d'où l'on tire:

$$C_i = \frac{dv_i}{ds} = \frac{\sqrt{\sum (1_i)'^2_m}}{\sqrt{\sum x'^2_k}} = \frac{(1'_i)}{s'} . \tag{17}$$

On définit ainsi n pseudo-courbures pour $\mathcal{C}$ en P_1 ; nous verrons plus loin les relations qui existent entre ces différentes courbures.

Il suffira de supposer que $(1_{p_1}) = (1_{g_1})$ coïncide avec le vecteur unité *tangent* à $\mathcal{C}$ en P_1 pour obtenir les *courbures principales*, c'est-à-dire les courbures relatives au n-èdre principal.

11. — D'autre part, on a

$$|1_i|^2 = 1 ; \tag{18}$$

d'où

$$(1_i) . (1_i') = 0 ; \tag{19}$$

donc, le vecteur $(1_i')$ est perpendiculaire à la droite g_i du n-èdre relatif à p_1.

En particulier, pour $i = 1$, c'est-à-dire en considérant la droite p_1 elle-même, on obtient les formules

$$(1_1) . (1_1') = 0 , \qquad C_1 = \frac{1}{R_1} = \frac{(1_1')}{s'} . \tag{20}$$

Remarquons que le vecteur $(1_1')$ est, dans π_2, porté sur la droite g_2 : donc, on a:

$$(1_1') = \frac{(1_2)}{k} ;$$

d'où:

$$k = \frac{R_1}{s'} ; \qquad (1_2) = \frac{R_1}{s'} (1_1)' . \tag{21}$$

La relation (21) contient un premier groupe de n formules.

Dans le cas où $p_1 = g_1$ est la tangente à $\mathcal{C}$, on écrira, avec s comme variable indépendante:

$$(\alpha_2) = \rho_1 (\alpha_1') ; \tag{22}$$

c'est là le cas principal. Si on y fait $n = 3$, on retrouve le premier groupe des formules fondamentales de Frenet.

12. — Considérons maintenant les autres vecteurs du n-èdre rectangle attaché à P_1 ; et cherchons à établir, pour chacun

d'eux, des formules analogues à (21). Celles-ci peuvent s'écrire:

$$(1_1)' = \frac{(1_2)}{\left(\frac{R_1}{s'}\right)} \; ; \tag{23}$$

les dérivées $(1_1)'_m$ sont donc linéaires en $(1_i)_m$:

$$(1_1)' = \sum_i A_i (1_i) \; , \quad \text{avec} \quad A_2 = \frac{1}{\left(\frac{R_1}{s'}\right)} \quad \text{et} \quad A_i = 0 \quad (i \neq 2) \; . \tag{23'}$$

Il est facile d'établir que toutes les dérivées $(1_i)'_m$ sont linéaires en $(1_k)_m$, k ne pouvant dépasser $(i + 1)$.

Remarquons tout d'abord que le vecteur (1_{g_k}) appartient au $(k + 1)$ — plan π_{k+1}; et, d'après la façon dont nous avons choisi les vecteurs du n-èdre rectangle en P_1, il vient la forme:

$$(1_k) = \sum_{i=0}^{i=k} B_i (1_1)^{(i} \; ; \tag{24}$$

en effet, le n-èdre rectangle en P_1 est une *équibase* du n-èdre formé par les vecteurs (1_{p_i}).

Supposons alors que la forme linéaire de $(1_i)'$ ait été établie jusqu'à la valeur i de l'indice; et démontrons que la propriété s'étend au cas de $(i + 1)$. On a par hypothèse:

$$(1_i)' = \sum_{k=1}^{k=i+1} D_k (1_k) \; . \tag{25}$$

Par différentiations successives de (23'), on tire, à cause de (25):

$$(1_1)^{(i+1)} = \sum_{k=1}^{k=i+1} E_k (1_k) \; ; \tag{26}$$

relations d'ailleurs équivalentes aux équations (24). D'autre part, l'équation (24) donne, avec $k = i + 2$:

$$(1_{i+2}) = \sum_{s=0}^{s=i+2} B_s (1_1)^s \; ;$$

portons dans le deuxième membre les valeurs (26); il reste le dernier terme en $(1_1)^{(i+2)}$; on obtient la forme :

$$(1_{i+2}) = \sum_{s=0}^{s=i+1} b_s(1_{s+1}) + B_{i+2}\,(1_1)^{(i+2)}\ . \tag{27}$$

Mais, en dérivant (26), on trouve justement $(1_1)^{(i+2)}$:

$$(1_1)^{(i+2)} = \sum_{k=1}^{k=i+1} F_k(1_k) + E_{i+1}(1_{i+1})'\ . \tag{28}$$

Portons cette valeur (28) dans (27); explicitant $(1_{i+1})'$, il vient:

$$(1_{i+1})' = \sum_{k=1}^{k=i+2} Q_k(1_k)\ . \tag{29}$$

La forme (25) est donc vraie pour toute valeur de l'indice i; nous écrirons plus en détail:

$$(1_i)' = \sum_{k=1}^{k=i+1} \frac{(1_k)}{q_{i,k}}\ ; \tag{30}$$

et on sait que:

$$q_{1.1} = \infty \qquad \text{et} \qquad q_{1.2} = \frac{R_1}{s'}\ .$$

13. — Il s'agit maintenant de trouver la valeur des coefficients $\left(\frac{1}{q_{\alpha.\beta}}\right)$.

On a les relations connues:

$$|1_i|^2 = 1 \qquad \text{et} \qquad (1_i)\,.\,(1_k) = 0\ ,$$

d'où l'on tire:

$$(1_i)\,.\,(1_i)' = 0 \qquad \text{et} \qquad (1_i)'\,.\,(1_k) + (1_i)\,.\,(1_k)' = 0\ ;$$

avec les relations (30), on obtient immédiatement les égalités:

$$\frac{1}{q_{i.i}} = 0\ ; \quad q_{i,j} = -\,q_{j,i} \qquad (i \neq j)\ ; \tag{31}$$

le déterminant des quantités $\left(\frac{1}{q_{\alpha.\beta}}\right)$ est donc symétrique gauche.

Or, nous avons établi (formule 30) que le deuxième indice ne peut dépasser le premier de plus d'une unité; il résulte alors de (31) que le deuxième membre de (30) se réduit à deux termes:

$$(1_i)' = -\frac{(1_{i-1})}{q_{i-1.i}} + \frac{(1_{i+1})}{q_{i.i+1}}; \qquad (32)$$

lorsque $i = n$, on a : $\frac{1}{q_{n.n+1}} = 0.$

Il reste donc à déterminer la valeur de deux coefficients. Pour cela, partons des définitions (15) des pseudo-courbures et rayons de courbure:

$$C_i = \frac{1}{R_i} = \frac{(1_i)'}{|s'|}; \qquad \frac{1}{R_i^2} = \frac{|1_i'|^2}{s'^2}; \qquad (33)$$

à cause de (32), on trouve la formule de récurrence:

$$1_i'^2 = \frac{1}{q_{i-1.i}^2} + \frac{1}{q_{i.i+1}^2} = \frac{s'^2}{R_i^2};$$

$$\frac{1}{q_{i.i+1}^2} = \frac{s'^2}{R_i^2} - \frac{1}{q_{i-1,i}^2}. \qquad (34)$$

On a donc finalement:

$$\begin{cases} \frac{1}{q_{1,2}^2} = \frac{s'^2}{R_1^2}; \qquad \frac{1}{q_{i.i+1}^2} = s'^2 \sum_{k=i}^{k=1} (-1)^{i-k} \frac{1}{R_k^2}; \\ \frac{1}{q_{n-1,n}^2} = s'^2 \sum_{k=n-1}^{k-1} (-1)^{n-1-k} \frac{1}{R_k^2} = \frac{s'^2}{R_n^2}. \end{cases} \qquad (35)$$

On connaît ainsi tous les coefficients des formules (32); (voir encore les paragraphes 14 et 16).

La dernière formule (35) montre que la n^e pseudo-courbure dépend des $(n-1)$ pseudo-courbures précédentes:

$$\frac{1}{R_n^2} = \sum_{k=n-1}^{k=1} (-1)^{n-1-k} \frac{1}{R_k^2}. \qquad (36)$$

Remarque : Dans le cas où (1_{p_1}) est le vecteur-unité tangent à

la courbe $\mathcal{C}$, on écrira ρ au lieu de R; ou bien, en désignant par $_t C_i$ les courbures principales:

$$ {}_t C_n^2 = \sum_{k=n-1}^{k=1} (-1)^{n-1-k} \, {}_t C_k^2 \; ; \tag{37} $$

on retrouve là une formule donnée par Hoppe [1] et Cesaro [2].

14. — On a donc en définitive les relations suivantes:

$$ \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{q_{1,1}} = 0 \; ; \qquad \frac{1}{q_{1,2}} = \frac{s'}{R_1} \; ; \qquad \frac{1}{q_{n,n+1}} = 0 \; ; \\ & \frac{1}{q_{i,i+1}} = + s' \sqrt{\sum_{k=i}^{k=1} (-1)^{i-k} \frac{1}{R_k^2}} \; ; \end{aligned} \right. \tag{38} $$

où l'on a choisi le signe (+) pour le radical, ce qui correspond à la *direction positive* sur les axes g_i. Pour le dernier coefficient, par contre, on a:

$$ \frac{1}{q_{n-1,n}} = \pm s' \sqrt{\sum_{k=n-1}^{k=1} (-1)^{n-k-1} \frac{1}{R_k^2}} = \frac{s'}{R_n} \; ; \tag{39} $$

nous indiquerons au nº 16 comment décider entre les deux signes.

Pour simplifier l'écriture, posons maintenant:

$$ \frac{1}{q_{i,i+1}} = \frac{1}{T_i} \; ; $$

les formules (32) deviennent:

$$ (1_i)' = - \frac{(1_{i-1})}{T_{i-1}} + \frac{(1_{i+1})}{T_i} \; , \tag{40} $$

avec

$$ \frac{1}{T_1} = \frac{s'}{R_1} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{T_n} = 0 \; . $$

Rappelons que, réciproquement, connaissant tous les vecteurs

---

[1] Hoppe. *Archiv der Math. u. Phys.*, 1888.
[2] Cesaro. *Natürliche Geometrie*, Leipzig, 1891.

(1_i) en fonction du temps, on trouvera vite la courbe du point P_1 (voir § 6).

15. — Passons au cas remarquable ou (1_{p_1}) est le vecteur tangent à $\mathcal{C}$. On a pour le vecteur-unité tangent :

$$(\alpha_1)_m = \frac{dx_m}{ds} = \frac{x'_m}{s'} ;$$

d'où :

$$_tC_1 = \frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{s'} \sqrt{\sum_{m=1}^{m=n} (\alpha_1)'^2_m} = \frac{d\nu_1}{ds} ;$$

donc ρ_1 est connu. La formule (22) donne alors, avec t comme variable :

$$s' . (\alpha_2) = \rho_1 (\alpha_1)' ;$$

le deuxième vecteur-unité est donc connu. Cela permet d'obtenir la deuxième courbure principale :

$$_tC_2 = \frac{(\alpha_2)'}{s'} = \frac{1}{\rho_2} .$$

D'autre part, les formules (40) deviennent :

$$(\alpha_i)' = - \frac{(\alpha_{i-1})}{\tau_{i-1}} + \frac{(\alpha_{i+1})}{\tau_i} , \qquad (40')$$

avec

$$\frac{1}{\tau_1} = \frac{s'}{\rho_1} , \qquad \frac{1}{\tau_n} = 0 , \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{\tau_i} = s' \sqrt{\sum_{k=i}^{k=1} (-1)^{i-k} \frac{1}{\rho_k^2}} ;$$

on aura donc tous les τ_i, et partant tous les vecteurs-unités du n-èdre mobile (réciproque, voir § 6).

Si, dans ces formules, on fait $n = 3$, on retrouve les formules fondamentales de Frenet.

16. — Il reste à fixer le signe du radical de la formule (39).

Etudions le déterminant :

$$D = \left\| (1_1)_m \, (1_1)'_m \, (1_1)''_m \dots (1_1)^{(n-1)}_m \right\| ;$$

il possède un signe bien déterminé; les différents termes en sont donnés par l'expression (26):

$$(1_1)^{(i)} = \sum_{k=1}^{k=i} E_k (1_k) ;$$

écrivons-la comme suit:

$$(1_1)^{(i)} = \sum_{k=1}^{k=i-1} B_k (1_k) + E_i (1_i) ; \tag{41}$$

une nouvelle dérivation donne la forme:

$$(1_1)^{(i+1)} = \sum_{k=1}^{k=i} A_k (1_k) + E_i (1_i)' ;$$

et, si l'on tient compte de la formule (32), on trouve pour le dernier coefficient, E_i, la formule de récurrence:

$$E_{i+1} = E_i \left(\frac{1}{q_{i,i+1}} \right) ; \tag{42}$$

Or, on a [1]:

$$E_1 = \frac{1}{q_{1.2}} \qquad \text{et} \qquad E_2 = \frac{1}{q_{1.2}\, q_{2.3}} ;$$

d'où pour E_i:

$$E_i = \frac{1}{q_{1.2}} \cdot \frac{1}{q_{2.3}} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{q_{i-1.i}} . \tag{43}$$

Portons les formules (41) dans le déterminant D; combinant linéairement les colonnes, il vient l'expression:

$$D = \left(\prod_{i=1}^{i=n-1} E_i \right) \cdot \| (1_k)_m \| = \prod_{i=1}^{i=n-1} E_i ;$$

---

[1] En effet :

$$(1_1)' = \frac{s'}{B_1}(1_2) = \frac{(1_2)}{q_{1,2}} ; \qquad \text{puis} \qquad (1_1)'' = \left(\frac{1}{q_{1,2}} \right)' (1_2) + \frac{(1_2)'}{q_{1,2}} ;$$

or $\quad (1_2)' = - \dfrac{(1_1)}{q_{1,2}} + \dfrac{(1_3)}{q_{2,3}} \quad$ à cause de (32); donc finalement :

$$(1_1)'' = \left(\frac{1}{q_{1,2}} \right)' (1_2) + \frac{1}{q_{1,2}} \cdot \left[- \frac{(1_1)}{q_{1,2}} + \frac{(1_3)}{q_{2,3}} \right] .$$

et, à cause de (43):

$$D = \prod_{i=1}^{i=n-1} \left(\frac{1}{q_{i-1,i}^{n-i}} \right); \qquad (44)$$

or, toutes les quantités $\left(\frac{1}{q_{k,k+1}}\right)$ sont positives, jusqu'à la valeur $k=n-2$; seul, le signe de la dernière de ces quantités, $\left(\frac{1}{q_{n-1,n}}\right)$, est encore inconnu; la formule (44) le détermine, puisque le signe de D est déterminé. On définit ainsi complètement la *direction* positive sur le dernier axe g_n du n-èdre rectangle qui accompagne (1_{p_1}).

Remarque. — Il est évident qu'on pourrait étudier la courbe $\mathcal{C}$ au moyen des représentations sphériques des n arêtes du n-èdre attaché au point P_1, soit pour le cas général de (1_{p_1}), soit pour le cas fondamental de (1_{g_1}). Cela reviendra encore à porter, sur chaque axe du n-èdre rectangle mobile autour de l'origine, un vecteur-unité (1_i). (Nos 5, 7, 8.)

SUR LES FORMULES DE LORENTZ

PAR

B. Niewenglowski (Paris).

Je me propose d'établir les hypothèses nécessaires et suffisantes pour conduire aux formules de la relativité restreinte.

Je conserve les notations de M. E. Picard dans sa très intéressante Notice de l'Annuaire du Bureau des Longitudes pour 1922. La droite $X'\Omega X$ glisse sur la droite $x'Ox$ avec une vitesse constante v; ces deux droites sont de même sens. Un observateur est lié à chacune de ces droites; il y a pour chacun d'eux un temps local: t pour l'observateur fixe, T pour le second. On suppose $t = T = 0$ quand Ω coïncide avec O. Un même point

M pris sur l'axe des x a une abscisse que le premier observateur évalue en nombre x; le même point considéré comme appartenant à l'axe $X'\Omega X$ a pour abscisse X, d'après le second observateur, et cela à l'époque t pour le premier T pour le second. Nous admettrons qu'une même longueur étant mesurée par un observateur mobile verra sa mesure multipliée par un cœfficient α par l'observateur fixe. Cela posé, on a

$$\overline{O\Omega} + \overline{\Omega M} = \overline{OM} .$$

Pour le premier observateur : $\overline{O\Omega} = vt$, $\overline{\Omega M} = \alpha X$, $\overline{OM} = x$ donc

$$vt + \alpha X = x . \tag{1}$$

Remarquons maintenant qu'on peut laisser le second observateur fixe, à condition que la droite $x'Ox$ glisse sur $X'\Omega X$ avec la vitesse $-v$; dans ces conditions le second observateur écrira:

$$vT + X = \alpha x . \tag{2}$$

Acceptant la collaboration des deux observateurs, nous regarderons les équations (1) et (2) comme simultanées; en résolvant le système de ces équations on trouve

$$X = \frac{x - vt}{\alpha} \qquad T = \frac{vt + (\alpha^2 - 1)x}{v\alpha} \tag{3}$$

ou, si l'on préfère:

$$x = \frac{X + vT}{\alpha} \qquad t = \frac{T + (1 - \alpha^2)X}{v\alpha} \tag{3'}$$

Pour déterminer le coefficient α, nous admettrons qu'il existe un phénomène physique se traduisant par l'égalité des vitesses du point M mesurées par les deux observateurs, ce qui revient à supposer qu'il existe un nombre c tel que l'on ait:

$$c\,dt = dx , \qquad c\,dT = dX . \tag{4}$$

En différentiant les équations (1) et (2) et tenant compte des relations (4) on obtient

$$(c - v)\,dt = c\alpha\,dT$$
$$(c + v)\,dT = c\alpha\,dt$$

d'où

$$c^2 - v^2 = c^2 \alpha^2$$

et par suite

$$\alpha = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} .$$

Nous aurons donc, enfin:

$$X = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad T = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} , \tag{5}$$

ou

$$x = \frac{X + vT}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad t = \frac{T + \frac{vX}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} . \tag{5'}$$

Si l'on suppose que c soit la vitesse de la lumière on aura les formules de Lorentz.

Remarques. — 1° Si l'on adopte les formules (5) ou (5′) on doit accepter les équations (1) et (2) qui leur sont équivalentes pour $\alpha = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$.

2° Pour que les formules (5) ou (5′) soient *acceptables* il faut supposer $v < c$. On ne peut rien conclure de plus, de ce qui précède. Pour établir qu'aucune vitesse ne peut surpasser celle de la lumière, il faut invoquer d'autres raisons.

3° Des équations (5) ou (5′) on tire:

$$c^2 t^2 - x^2 = c^2 T^2 - X^2$$

et aussi,

$$dX = \frac{dx - vdt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad dT = \frac{dt - \frac{v}{c^2} dx}{\sqrt{1 - \frac{v'}{c^2}}} ,$$

d'où

$$c^2 dT^2 - dX^2 = c^2 dt^2 - dx^2 .$$

On en conclut que pour une translation constante de direction quelconque on aura l'invariance définie par

$$c^2 dT^2 - dX^2 - dY^2 - dZ^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 .$$

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES

DE LA

CRISTALLOGRAPHIE [1]

PAR

Marcel WINANTS (Liége).

CHAPITRE II.

Etude succincte d'une surface cubique à quatorze ombilics et d'une surface quadratique.

§ 1. — Etude sommaire de deux quartiques planes.

48. — Sauf expresse indication du contraire, les axes coordonnés formeront des angles droits.

Soit d'abord la courbe:

$$x^4 + y^4 = a^4 .$$

Elle admet un centre à l'origine. Les axes coordonnés et les bissectrices de leurs angles sont quatre axes de symétrie. Il existe un Λ^4 perpendiculaire au plan de la courbe.

La courbe est extérieure au cercle $X^2 + Y^2 = a^2$, sauf qu'elle le touche aux points où elle rencontre les axes coordonnés. En effet, on a:

$$(x^2 + y^2)^2 \geqq x^4 + y^4 = (X^2 + Y^2)^2 .$$

49. — Appelons δ la distance de l'origine au point (x, y) de la courbe:

$$\delta^2 = x^2 + y^2 , \qquad \delta^4 = a^4 + 2x^2y^2 ;$$

δ sera maximum pour $x = \pm y$.

---

[1] Voir l'*Enseign. mathém.*, t. XXII, n°s 1-2, p. 5-29.

50. — Nous allons étudier la courbure de cette quartique. Deux dérivations successives de son équation conduisent à :

$$x^3 + y^3 y' = 0 , \qquad 3x^2 + 3y^2 y'^2 + y^3 y'' = 0 .$$

On en tire :

$$y' = -\frac{x^3}{y^3} , \qquad y'' = -\frac{3a^4 x^2}{y^7} .$$

La courbe tourne sa concavité vers le bas ou vers le haut suivant que l'ordonnée est positive ou négative. Ensuite, on a :

$$1 + y'^2 = \frac{x^6 + y^6}{y^6} ;$$

le rayon de courbure est donc égal à :

$$\rho = \pm \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = \frac{(x^6 + y^6)^{\frac{3}{2}}}{3a^4 x^2 y^2} .$$

En annulant l'abscisse ou l'ordonnée, (elles ne peuvent d'ailleurs pas s'annuler en même temps), on trouve :

$$\rho = \infty .$$

Le quartique a donc quatre points d'ondulation. De l'équation même de la courbe, il résulte d'ailleurs qu'elle est rencontrée par chacune des droites $y = \pm a$, $x = \pm a$, en quatre points confondus.

51. — La quartique précédente a la symétrie d'un carré.

52. — Passons à la quartique : $\frac{x^4}{a^4} + \frac{y^4}{b^4} = 1$. On raisonnera comme pour la précédente. Elle est extérieure à l'ellipse : $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$, sauf qu'elle la touche aux points où elle rencontre les axes coordonnés. Ces quatre sommets sont des points d'ondulation.

53. — Cette quartique possède, comme l'ellipse, la symétrie d'un rectangle. Les deux courbes admettent tous les éléments de symétrie du système orthorhombique. Le plan d'une courbe plane peut être envisagé comme un plan de symétrie de la figure.

§ 2. — Une surface ayant la symétrie d'un cube.

54. — Nous allons nous occuper de la surface:

$$x^4 + y^4 + z^4 = p^4 .$$

Elle est extérieure à la sphère:

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = p^2 ,$$

sauf qu'elle la touche aux six points où les deux surfaces coupent les axes coordonnés (qui sont rectangulaires).

La forme même de l'équation montre que la surface admet la symétrie du cube:

$$C , 3A^4 , 4A^3 , 6A^2 ,$$

$$3P , \qquad 6P' .$$

Les axes quaternaires de symétrie sont les axes coordonnés; et les plans P sont les plans coordonnés. Les axes ternaires ont pour équations: $x = \pm y = \pm z$. Les axes binaires sont les bissectrices des angles que font les axes coordonnés; et les plans P' bissèquent les dièdres coordonnés.

55. — Les points où cette surface est rencontrée par ses axes ternaires et ses axes quaternaires, sont des ombilics (21). Nous allons essayer de le vérifier par un calcul direct. Nous avons rappelé plus haut (22) les équations auxquelles doivent satisfaire les coordonnées des ombilics:

$$\frac{\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}}{1 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2} = \frac{\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}}{\dfrac{\partial z}{\partial x} \times \dfrac{\partial z}{\partial y}} = \frac{\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}}{1 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2} .$$

Pour la surface actuelle, calculons les dérivées premières et secondes de z. On a:

$$x^3 + z^3 \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \ ; \qquad y^3 + z^3 \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \ ;$$

$$3x^2 + 3z^2 \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + z^3 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0 \ ;$$

$$3z^2 \frac{\partial z}{\partial x} . \frac{\partial z}{\partial y} + z^3 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0 .$$

De ces équations, on tire successivement:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x^3}{z^3}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y^3}{z^3}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{3x^3 y^3}{z^7};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{3x^2(x^4 + z^4)}{z^7}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{3y^2(y^4 + z^4)}{z^7}.$$

Les équations aux coordonnées des ombilics sont donc:

$$\frac{x^2(x^4 + z^4)}{x^6 + z^6} = \frac{x^3 y^3}{x^3 y^3} = \frac{y^2(y^4 + z^4)}{y^6 + z^6}.$$

c'est-à-dire: $x^2 = y^2 = z^2$.

Cette méthode semble ne donner que les extrémités des axes ternaires. Mais, à un certain moment, on a simplifié par une puissance de z. D'ailleurs, les ombilics, extrémités des axes quaternaires, ont, chacun, deux coordonnées nulles. Il peut donc arriver que notre méthode l'emporte sur la méthode classique.

N'existe-t-il pas d'autres ombilics ? Une transformation des coordonnées rectilignes fournirait la réponse à cette question.

56. — La courbure totale (43) est ici:

$$k = \frac{\frac{9x^2 y^2 (x^4 + z^4)(y^4 + z^4)}{z^{14}} - \frac{9x^6 y^6}{z^{14}}}{\left\{1 + \frac{x^6}{z^6} + \frac{y^6}{z^6}\right\}^2} = \frac{9p^4 x^2 y^2 z^2}{(x^6 + y^6 + z^6)^2}.$$

Par raison de continuité, cette formule s'applique également aux points où la surface rencontre les plans coordonnés.

La courbure est ordinairement positive; mais elle s'annule tout le long des trois sections principales. Cette propriété est entièrement conforme à la symétrie.

§ 3. — Une surface quadratique.

57. — Il va s'agir de la surface: $\frac{x^4 + y^4}{a^4} + \frac{z^4}{c^4} = 1$, où l'on suppose $a \neq c$. Cette surface n'est pas de révolution; elle est extérieure à l'ellipsoïde de révolution: $\frac{X^2 + Y^2}{a^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1$, sauf qu'elle le touche en six points (52).

58. — En recherchant les ombilics par la méthode indiquée (22), on trouve:

$$c^2 x = \pm c^2 y = \pm a^2 z \ .$$

ce qui donne huit ombilics. Mais il y en a certainement deux autres aux extrémités de l'axe quaternaire (21), d'équations: $x = y = 0$.

La surface semble donc admettre dix ombilics.

59. — La courbure totale (43) est:

$$k = \frac{9\, a^8 c^{12} x^2 y^2 z^2}{\left\{ a^8 z^6 + c^8 (x^6 + y^6) \right\}^2} \ .$$

La courbure totale est constamment positive, sauf qu'elle s'annule le long des trois sections principales.

60. — Toutes les propriétés précédentes (57, 58, 59) sont conformes à la symétrie quadratique (ou tétragonale), ayant pour symbole (15):

$$\mathrm{C}\,,\ \Lambda^4,\ 2\Lambda'^2,\ 2\Lambda''^2,$$
$$\mathrm{P},\ \ 2\mathrm{P}',\ \ 2\mathrm{P}''.$$

Voici les équations des plans de symétrie:

$$\mathrm{P} : z = 0 \ ; \qquad \mathrm{P}' : x = 0\ ;\ y = 0 \ ; \qquad \mathrm{P}'' : x \pm y = 0 \ .$$

Les axes Λ sont perpendiculaires aux plans de symétrie, et passent par le centre.

Chapitre III.

Quelques principes généraux.

61. — Nous avons déjà rencontré plusieurs principes généraux (5, 7, 21).

Il nous semble qu'une méthode scientifique a d'autant plus de valeur qu'elle possède un plus grand nombre de pareils principes.

Notre bagage n'est certes pas encore bien vaste. Mais nous serons très heureux si nous avons pu montrer que notre méthode était, tout au moins, capable de formuler des règles générales.

Dans le nº 62, nous reprendrons et nous généraliserons plusieurs théorèmes démontrés précédemment. Leur évidence est maintenant si grande que tout nouvel essai de démonstration nous paraît superflu.

Nous tenons encore à faire observer que la méthode s'applique également bien à la géométrie plane et à la géométrie solide.

62. — Si une surface est rencontrée par un axe de symétrie d'ordre supérieur à deux, chaque point d'intersection sera un point singulier ou un ombilic.

Si une cubique plane admet un Λ^3 perpendiculaire à son plan, elle ne possède aucun point d'inflexion à distance finie, ni centre, ni point crunodal, ni rebroussement.

Si une courbe algébrique plane de troisième classe admet un Λ^3 perpendiculaire à son plan, elle ne possède, à distance finie, ni inflexion, ni bitangente.

Si une courbe algébrique plane de quatrième ordre admet un Λ^4 perpendiculaire à son plan, elle ne possède aucun point multiple à tangentes réelles.

Une cubique à Λ^3 possède toujours trois asymptotes à distance finie, et n'en rencontre aucune.

Chapitre IV.

Deux surfaces ayant la symétrie d'une tourmaline.

§ 1. — Symétrie cristallographique de la tourmaline.

63. — Imaginons une pyramide triangulaire régulière. Elle possède un axe de symétrie ternaire. Par chaque arête latérale et l'apothème de la face opposée, passe un plan de symétrie. Le symbole (15) est donc:

$$\Lambda^3, 3P.$$

Prenons un prisme triangulaire régulier, et, sur chacune de ses bases, plaçons une pyramide régulière, mais de telle façon que les deux pyramides n'aient pas la même hauteur. Le solide total conserve la même symétrie et donne une idée suffisamment exacte du cristal de tourmaline.

§ 2. — Deux cubiques planes.

64. — Soit d'abord la courbe que représente l'équation:

$$x^3 + y^3 = a^3 , \qquad (1)$$

où l'on suppose: a > o. Elle rencontre les axes aux points (a, o) et (o, a). Elle admet la bissectrice ($x = y$) comme axe de symétrie Λ^2. L'équation (1) peut s'écrire:

$$(x + y)\,(x^2 - xy + y^2) = a^3 \;;$$

la courbe est donc asymptote à la droite:

$$x + y = 0 \;.$$

La cubique rencontre la droite de l'infini en un seul point réel: elle est du groupe b (1). A toute valeur de x correspond une seule valeur réelle de y, et réciproquement; par conséquent, la courbe ne possède aucun point double, elle n'est pas unicursale. Mais elle est unipartite. C'est donc une cubique [2°, b].

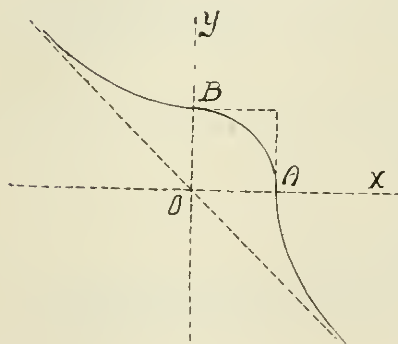


Fig. 8.

En dérivant deux fois l'équation (1), on trouve:

$$x^2 + y^2 y' = 0 \;; \qquad (2)$$

$$2x + 2yy'^2 + y^2 y'' = 0 \;. \qquad (3)$$

De (2), on tire

$$y' = -\frac{x^2}{y^2} \leqq 0 \;;$$

l'ordonnée y est constamment décroissante. En A et B, les tangentes sont parallèles aux axes coordonnés. Des équations (2) et (3) combinées, on déduit le rayon de courbure (50):

$$\rho = \frac{(x^4 + y^4)^{\frac{3}{2}}}{2a^3 xy} \;:$$

cette formule montre que les points A et B sont des inflexions.

65. — Prenons un triangle équilatéral comme figure de référence, et considérons la cubique:

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = m^3 . \qquad (4)$$

Par les sommets du triangle fondamental, menons des parallèles à ses côtés. Elles déterminent un triangle équilatéral A'B'C', que nous prenons comme nouvelle figure de référence.

Pour un point quelconque du plan (M), nous aurons:

$$\alpha = PM ; \qquad \alpha' = P'M .$$

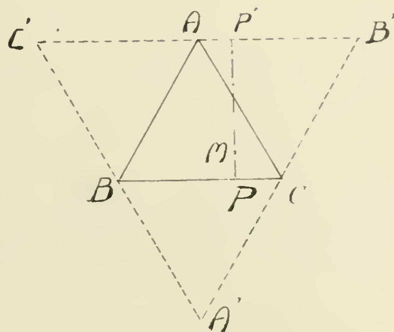


Fig. 9.

Si h désigne la hauteur du premier triangle, il viendra:

$$h = \alpha + \beta + \gamma = \alpha + \alpha' = \beta + \beta' = \gamma + \gamma' ,$$
$$2h = \alpha' + \beta' + \gamma' = 2(\alpha + \alpha') ;$$
$$2\alpha = -\alpha' + \beta' + \gamma' ;$$
$$2\beta = \alpha' - \beta' + \gamma' ;$$
$$2\gamma = \alpha' + \beta' - \gamma' ;$$

L'équation (4) peut donc s'écrire:

$$8m^3 = (-\alpha' + \beta' + \gamma')^3 + (\alpha' - \beta' + \gamma')^3 + (\alpha' + \beta' - \gamma')^3$$
$$= (\alpha' + \beta' + \gamma')^3 - 24\,\alpha'\beta'\gamma' = 8h^3 - 24\,\alpha'\beta'\gamma' ;$$

donc : $\alpha'\beta'\gamma' = \frac{1}{3}(h^3 - m^3)$.

Nous retrouvons une cubique dont il s'est agi précédemment (2).

66. — Comme digression, nous pourrons énoncer le théorème suivant:

On admet la règle des signes des coordonnées trilinéaires absolues, et l'on considère un triangle équilatéral de référence. Le lieu géométrique des points dont le produit des distances aux trois côtés du triangle fondamental est une constante, est

en même temps le lieu géométrique des points dont la somme des cubes des distances aux côtés du triangle médian est également constante.

§ 3. — Une première surface.

67. — Nous allons étudier la surface:

$$x^3 + y^3 + z^3 = p^3 ,$$

où la constante p est positive. Cette surface ne possède aucun point dans le trièdre où les trois coordonnées sont négatives. Elle admet un axe ternaire d'équations:

$$x = y = z ,$$

et trois plans de symétrie:

$$y = z ; \qquad z = x ; \qquad x = y ;$$

passant par l'axe Λ^3. Nous avons donc bien affaire à une surface-tourmaline (63).

L'axe Λ^3 rencontre la surface en un ombilic (62):

$$x = y = z = \frac{p}{\sqrt[3]{3}} .$$

68. — Coupons la surface par un plan normal au Λ^3 Plus haut (27), nous avons établi des formules pour la transformation des coordonnées:

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma} = \sqrt{\frac{2}{3}} ;$$

$$\alpha + \beta + \gamma = (x + y + z) \sqrt{\frac{3}{2}} ;$$

la section a donc pour équation triangulaire:

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = \left(p \sqrt{\frac{3}{2}}\right)^3 . \tag{1}$$

Si le plan sécant a pour équation:

$$x + y + z = l ,$$

le triangle fondamental aura pour hauteur:

$$\alpha + \beta + \gamma = \pm l \sqrt{\frac{3}{2}}, \qquad (2)$$

suivant que l est $>$ ou $<$ O.

La cubique d'intersection est donc une courbe que nous avons étudiée (65). Si l'on se reporte au début de ce travail (2) et qu'on tienne compte des équations (1) et (2), on verra que nous sommes en droit de formuler les conclusions suivantes:

Pour de très grandes valeurs de l (par exemple $\geqq$ 20 p), la courbe d'intersection se compose de trois branches infinies, asymptotes aux côtés du triangle fondamental. Si l'on se reporte au n° 65, on verra que, pour $l = + l'$ et $l = - l'$, les deux triangles asymptotiques ont des dispositions inverses. Ceci démontre qu'il n'existe aucun plan de symétrie, perpendiculaire au Λ^3. Dans les deux sens où l'on peut parcourir cet axe, la surface se comporte donc différemment. D'ailleurs, quelque grande que soit la valeur attribuée à l, on obtient toujours une section.

Empruntant un terme à la cristallographie, nous dirons que la surface est hémimorphe. Le cristal hémimorphe de tourmaline porte des faces différentes à ses deux bouts (63).

En géométrie analytique élémentaire, les deux paraboloïdes du second ordre sont des surfaces hémimorphes.

69. — Perpendiculairement à l'axe ternaire, il existe un plan sécant qui ne rentre pas dans la théorie précédente, et qui mérite une mention spéciale. C'est le plan:

$$x + y + z = 0 .$$

Il n'y a plus de triangle de référence. On obtient alors une cubique qui se projette, sur le plan des (x, y) suivant une autre cubique ayant pour équation:

$$3xy (x + y) + p^3 = 0 .$$

C'est une cubique [2°, a], dont les trois asymptotes sont concourantes. Dans l'espace, la cubique-section a donc aussi trois asymptotes concourantes.

70. — Coupons maintenant la surface par des plans parallèles aux plans coordonnés. Un plan parallèle au plan $z\,o\,x$ donne une section représentable par les deux équations:

$$y = b \ , \qquad x^3 + z^3 = p^3 - b^3 \ . \qquad \text{(C)}$$

Nous avons étudié cette courbe (64). C'est une cubique ayant pour asymptote la droite d'équations:

$$y = b \ , \qquad x + z = 0 \ .$$

Le lieu géométrique de toutes ces asymptotes est le plan:

$$x + z = 0 \ .$$

Supposons que les axes aient la disposition habituelle: les cotes sont comptées positivement vers le haut. Alors la courbe (C) est située au-dessous ou bien au-dessus de son asymptote suivant que la constante b est plus grande ou plus petite que p. Pour $b = p$, on trouve une droite d'équations: $y = p$; $x + z = 0$.

Cette droite rencontre l'axe Oy (A C).

Il y a deux autres droites analogues, conformément à la symétrie autour du Λ^3. Ces trois droites appartiennent à la surface, et forment un triangle équilatéral.

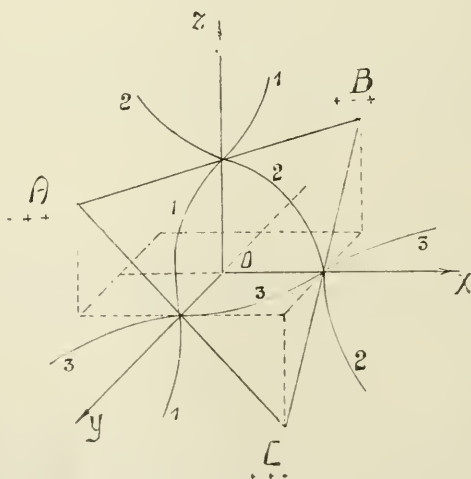


Fig. 10.

71. — A tout système de valeurs de deux des coordonnées correspond une et une seule valeur réelle de la troisième.

Les plans coordonnés coupent la surface suivant trois cubiques égales, que nous appellerons sections principales.:

$$x = 0 \ , \quad y^3 + z^3 = p^3 \ ; \qquad (1)$$
$$y = 0 \ , \quad x^3 + z^3 = p^3 \ ; \qquad (2)$$
$$z = 0 \ , \quad x^3 + y^3 = p^3 \ . \qquad (3)$$

On pourrait engendrer la surface de la manière suivante: une cubique, analogue à (2), se déplacerait parallèlement à l'axe Oy, tout en se déformant d'une façon continue, et en s'appuyant sur les deux courbes fixes (1) et (3).

72. — Soient X, Y, Z les coordonnées courantes. Le plan tangent en x, y, z, a pour équation:

$$x^2 X + y^2 Y + z^2 Z = p^3 \ .$$

Les coordonnées du point A sont: $-p$, $+p$, $+p$; le plan tangent en A, est donc représenté par l'équation:

$$X + Y + Z = p \ .$$

Le plan A B C est donc un plan tritangent; les trois points de contact sont A, B, C.

Cette singularité est conforme à la symétrie.

73. — Supposons que ce plan tangent singulier soit rendu horizontal; l'axe ternaire est alors vertical. De l'ombilic comme centre, dessinons un « cercle géodésique », de très grand rayon: sur toutes les géodésiques issues de l'ombilic, portons une longueur égale à $50p$, par exemple. Les extrémités de toutes les lignes obtenues forment une courbe fermée qu'on nomme cercle géodésique. Cette courbe fermée fait songer à des montagnes russes. Un mobile qui la parcourrait entièrement, ferait trois montées et trois descentes, conformes à la symétrie autour du A^3 et par rapport aux trois plans P.

74. — Passons enfin à l'étude de la courbure totale. En appliquant toujours la même formule (43), on trouve:

$$k = \frac{4p^3 xyz}{(x^4 + y^4 + z^4)^2} \ .$$

Le long des sections principales (71), la courbure totale est donc nulle. Les sections principales décomposent la surface en sept régions, comme un triangle dans un plan (9): dans quatre

de ces régions, la courbure totale est positive: dans les trois autres, elle est négative.

L'ensemble des trois sections principales constitue le lieu géométrique des points paraboliques.

Tout ceci est conforme à la symétrie.

§ 4. — De nouvelles cubiques planes.

75. — Dans les deux paragraphes qui vont suivre, nous donnerons moins de détails que dans les deux précédents.

Examinons d'abord la cubique plane:

$$x^2y + cy^2 + c^2x = p^3 \ . \qquad (E)$$

où l'on peut supposer $p > 0$. L'hypothèse $c = 0$ nous ramène à la cubique [5°, c]: $x^2y = p^3$, que nous avons indiquée plus haut (26).

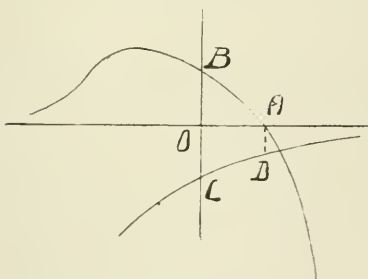


Fig. 11.

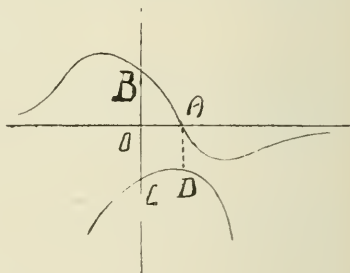


Fig. 12.

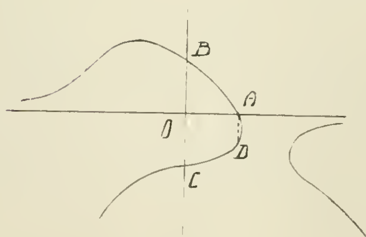


Fig. 13.

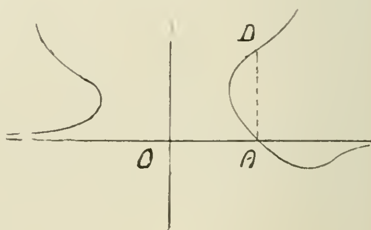


Fig. 14.

Fig. 11 : $3c^3 = 4p^3$. Fig. 12 : $0 < 3c^3 < 4p^3$.

Fig. 13 : $3c^3 > 4p^3$. Fig. 14 : $c < 0$.

76. — Cette cubique, quelle que soit la constante c, est tangente à la droite de l'infini, et admet l'axe des x comme asymptote. Rencontre-t-elle les axes coordonnés ? L'hypothèse $y = 0$ entraîne:

$$x = \frac{p^3}{c^2} > 0 \ ;$$

donc la courbe rencontre toujours son asymptote à distance finie, une seule fois, à droite de l'origine (A). De même, $x = 0$ donne:

$$y = \pm \sqrt{\frac{p^3}{c}} \ ;$$

la courbe ne rencontre pas l'axe des y quand c est < 0 (fig. 14); dans le cas contraire (fig. 11, 12, 13), elle le rencontre en deux points (B, C) symétriques par rapport à l'origine. Quand c est < 0, la cubique ne possède aucun point dans l'angle des axes où les deux coordonnées sont négatives (fig. 14).

En résolvant l'équation (E), on trouve:

$$2cy = - x^2 \pm \sqrt{x^4 - 4c^3 x + 4cp^3} \ ; \qquad (1)$$

$$2xy = - c^2 \pm \sqrt{c^4 + 4p^3 y - 4cy^3} \ . \qquad (2)$$

On en conclut l'existence de deux coniques diamétrales, conjuguées aux cordes asymptotiques:

$$x^2 + 2cy = 0 \qquad \text{parabole ;}$$

$$2xy + c^2 = 0 \qquad \text{hyperbole équilatère.}$$

77. — La cubique peut-elle admettre un point double à distance finie ? Pour qu'il en soit ainsi, on doit avoir simultanément:

$$f \equiv x^2 y + cy^2 + c^2 x - p^3 = 0 \ ;$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + c^2 = 0 \ ; \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 2cy = 0 \ .$$

Les deux coniques diamétrales doivent donc se couper sur la cubique. En éliminant x, y entre les trois équations précédentes, on trouve : $3c^3 = 4p^3$. On obtient alors la cubique crunodale, que représente la fig. 11 (page 182). C'est une cubique [4°, c].

78. — Discutons d'abord la formule (2). La quantité subradicale est un polynome du troisième degré, qui ne doit prendre que des valeurs positives. Le coefficient de y^3 est $-4c$. Quand c est > 0, il y a donc un maximum pour y; on sait, en effet, que, pour des valeurs de la variable, de module suffisamment grand, tout polynome a le signe du terme où l'exposant de la variable est le plus élevé (fig. 11, 12, 13). Quand c est < 0, il existe un minimum de y (fig. 14).

Le polynome dont nous nous occupons, peut d'ailleurs s'écrire:

$$-4c\left(y^3 - \frac{p^3}{c}y - \frac{c^3}{4}\right).$$

Le discriminant de la parenthèse est:

$$\frac{c^6}{64} - \frac{p^9}{27c^3} = (3c^3 - 4p^3) \times \frac{9c^6 + 12c^3p^3 + 16p^6}{64 \times 27c^3}.$$

Si l'on raisonne comme pour le trinome du second degré, l'on arrive aux conclusions suivantes:

1° $0 < 3c^3 < 4p^3$: y admet un minimum et deux maxima (fig. 12);

2° $3c^3 > 4p^3$: y admet un seul maximum;

3° $c < 0$: y admet un seul minimum.

79. — De la formule (1), page 48, nous pourrons déduire quelques résultats analogues. Soit $f(x)$ le polynome subradical. L'équation

$$f(x) \equiv x^4 - 4c^3x + 4cp^3 = 0$$

admet au moins deux racines imaginaires (théorème des lacunes).

Quand c est < 0 (fig. 14), l'équation a deux racines réelles, de signes contraires, entre lesquelles l'abscisse variable ne peut pas être comprise.

Supposons que c soit > 0. Si deux racines sont réelles, elles sont positives (Théorème de Descartes). Cherchons quand ce dernier fait se produit: le minimum de $f(x)$ doit être négatif. Or on a:

$$f'(x) = 4(x^3 - c^3) = 0, \quad \text{d'où} \quad x = c:$$

quand les deux racines sont réelles, elles comprennent c (Théorème de Rolle); ensuite:

$$f''(x) = 12x^2 \ ; \quad f''(c) = 12c^2 > 0 \ ;$$
$$f(c) = c^4 - 4c^4 + 4cp^3$$
$$= -c(3c^3 - 4p^3) \ .$$

Dans le cas des fig. 11 et 12 (page 182), le minimum de $f(x)$ n'est pas négatif; l'abscisse x peut varier de $-\infty$ à $+\infty$. Dans le cas des fig. 13 et 14, il existe un intervalle où la variable ne peut pas entrer.

80. — Voici les coefficients angulaires de quelques tangentes:

$$m = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = -\frac{2xy + c^2}{x^2 + 2cy} \ ;$$

$$m_A = -\frac{c^2}{\frac{p^6}{c^4}} = -\frac{c^6}{p^6} < 0 \ ;$$

$$m_{B,C} = -\frac{c^2}{\pm 2c\sqrt{\frac{p^3}{c}}} = \mp \frac{c^2}{2\sqrt{cp^3}} \lessgtr 0 \ ,$$

les tangentes aux points B, C, se coupent sur l'asymptote.

Remarque. — La parallèle menée à l'axe des y, par le point A rencontre la courbe en un point D, de coordonnées:

$$x = \frac{p^3}{c^2} \ , \qquad y = -\frac{p^6}{c^5} \ .$$

81. — Résumons ce qui précède dans un tableau synoptique:

$c < 0$: unipartite non singulière [2°, c];

$c = 0$: cuspidale [5°, c];

$0 < c < p\sqrt[3]{\frac{4}{3}}$: bipartite [1°, c];

$c = p\sqrt[3]{\frac{4}{3}}$: crunodale [4°, c];

$c > p\sqrt[3]{\frac{4}{3}}$: unipartite non singulière [2°, c].

La recherche des points d'inflexion nous entraînerait trop loin.

82. — Passons à la cubique:

$$\beta^2\gamma + \gamma^2\alpha + \alpha^2\beta = m^3 \qquad (1)$$

Elle va nous fournir l'occasion d'appliquer l'un de nos principes généraux (Chapitre III).

D'après ce qu'on a vu plus haut (62), cette cubique admet trois asymptotes, que nous allons, tout d'abord, rechercher.

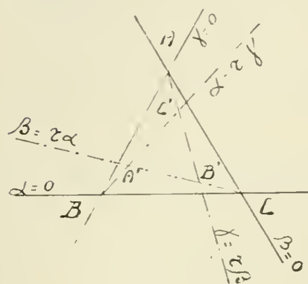


Fig. 15.

Par le sommet A, on peut mener trois droites asymptotiques, dont une seule pénètre à l'intérieur du triangle de référence; soit $\gamma = r\beta$ son équation; r est > 0; le système:

$$\beta^2\gamma + \gamma^2\alpha + \alpha^2\beta = m^3, \qquad \gamma = r\beta,$$
$$\alpha + \beta + \gamma = h,$$

doit admettre des solutions infinies. On élimine α et γ; on trouve une équation du troisième degré en β: on doit annuler le coefficient de β^3; il vient:

$$F(r) \equiv r^3 - 3r - 1 = 0; \qquad (2)$$

cette équation admet une et une seule racine positive (Théorème de Descartes): son discriminant est:

$$\frac{1}{4} - \frac{27}{27} = -\frac{3}{4} < 0;$$

les trois racines sont donc réelles; il fallait s'y attendre.

La racine positive est supérieure à l'unité, car $F(1) < 0$. Cette racine est indépendante de m.

83. Nous allons effectuer une transformation des coordonnées trilinéaires absolues. Menons les trois droites:

$$\gamma = r\beta; \qquad \alpha = r\gamma; \qquad \beta = r\alpha.$$

Elles déterminent un triangle équilatéral A'B'C', que nous prenons comme nouveau triangle de référence. Dans le « Cours de Géométrie analytique plane » de Falisse, 7e édition, revue et augmentée par A. Gob, Bruxelles, 1912, à la page 578, au nº 735,

on donne une formule qui exprime la distance δ d'un point de coordonnées α, β, γ, à la droite que représente l'équation:

$$\Sigma u\alpha \equiv u\alpha + v\beta + w\gamma = 0 ;$$

à savoir:

$$\delta = \frac{\Sigma u\alpha}{\sqrt{\Sigma u^2 - 2\Sigma uv \cos C}} .$$

Les angles du triangle primitif sont:

$$A = B = C = 60^\circ ;$$

donc:

$$\delta = \frac{\Sigma u\alpha}{\sqrt{\Sigma u^2 - \Sigma uv}} .$$

Le côté B'C' a pour équation: $r\beta - \gamma = o$;

$$u = 0 , \quad v = r , \quad w = -1 ;$$

il vient:

$$\alpha' = \frac{r\beta - \gamma}{\sqrt{r^2 + 1 + r}} = \frac{r\beta - \gamma}{\sqrt{r^2 + r + 1}} .$$

Posons

$$\varepsilon \equiv \sqrt{r^2 + r + 1} = \text{constante positive} ;$$

il en résulte:

$$r\beta - \gamma = \varepsilon\alpha' , \quad r\gamma - \alpha = \varepsilon\beta' , \quad r\alpha - \beta = \varepsilon\gamma' .$$

En résolvant ces trois équations, on trouve:

$$\left\{ \begin{aligned} \alpha &= \frac{\varepsilon}{3r} (r\alpha' + \beta' + r^2\gamma') , \\ \beta &= \frac{\varepsilon}{3r} (r^2\alpha' + r\beta' + \gamma') , \\ \gamma &= \frac{\varepsilon}{3r} (\alpha' + r^2\beta' + r\gamma') . \end{aligned} \right.$$

On substitue ces valeurs dans l'équation (1), et l'on obtient

$$\begin{aligned} & r(2r + 1)(\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + 6\alpha\beta\gamma) \\ & + 3(r^2 + 3r + 1)(\beta^2\gamma + \beta\gamma^2 + \gamma^2\alpha + \gamma\alpha^2 + \alpha^2\beta + \alpha\beta^2) = \frac{9m^3r^3}{\varepsilon^3} . \end{aligned}$$

On a tenu compte de l'équation (2). On a supprimé les accents, devenus inutiles.

La cubique a donc trois axes de symétrie ordinaire; ce sont les bissectrices intérieures du triangle A'B'C'. Ces axes ont une direction qui ne dépend nullement de m.

84. — On peut simplifier la dernière équation. On a:

$$h^3 = (\alpha + \beta + \gamma)^3 = \Sigma\alpha^3 + 3\Sigma\alpha^2\beta + 6\alpha\beta\gamma .$$

d'où l'on tire:

$$3\Sigma\alpha^2\beta = h^3 - (\Sigma\alpha^3 + 6\alpha\beta\gamma) ;$$

l'équation de la cubique peut enfin s'écrire:

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + 6\alpha\beta\gamma = k^3 \gtreqless 0 .$$

85. — Recherchons les asymptotes. D'après ce qui précède, il existe une asymptote parallèle au nouveau côté B C.

$$\alpha = \text{constante} .$$

En combinant les deux équations:

$$\beta^3 + \gamma^3 + 6\alpha\beta\gamma = k^3 - \alpha^3 , \qquad \beta + \gamma = h - \alpha , \qquad (J)$$

on obtient:

$$(h - \alpha)[(h - \alpha)^2 - 3\beta\gamma] + 6\alpha\beta\gamma = k^3 - \alpha^3 .$$

Le coefficient de $\beta\gamma$ est:

$$-3(h - \alpha) + 6\alpha = 3(3\alpha - h) = 0 .$$

Les équations des asymptotes sont donc:

$$\alpha = \frac{h}{3} ; \qquad \beta = \frac{h}{3} ; \qquad \gamma = \frac{h}{3} .$$

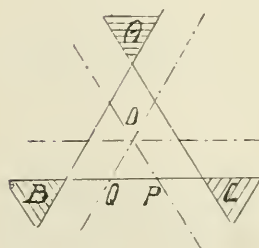


Fig. 16

La cubique a donc trois asymptotes concourantes.

86. — Comment la cubique rencontre-t-elle les côtés du triangle fondamental ? Si, dans les équations (J), on suppose $\alpha = 0$, on obtient:

$$h(h^2 - 3\beta\gamma) = k^3 , \quad \text{d'où} \quad \beta\gamma = \frac{h^3 - k^3}{3h} ;$$

mais:

$$\beta + \gamma = h .$$

Les coordonnées β, γ, sont donc racines de l'équation:

$$z^2 - hz + \frac{h^3 - k^3}{3h} = 0 \,, \qquad (1)$$

dont le discriminant est:

$$h^2 - 4\frac{h^3 - k^3}{3h} = \frac{4k^3 - h^3}{3h} \,.$$

La cubique est tangente aux côtés si l'on a:

$$k^3 = \frac{h^3}{4} \,.$$

87. — Quand la cubique passe-t-elle en P ? Il faut que l'équation (1) ait la solution $z = \frac{h}{3}$. Alors:

$$k^3 = \frac{h^3}{3} \,.$$

On peut vérifier directement que, dans ce dernier cas, la cubique dégénère en un système de trois droites:

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + 6\alpha\beta\gamma = k^3 = \frac{h^3}{3} = \frac{1}{3}(\alpha + \beta + \gamma)^3 \,,$$

ou

$$3(\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + 6\alpha\beta\gamma) - (\alpha + \beta + \gamma)^3 = 0 \,,$$

ou encore:

$$(2\alpha - \beta - \gamma)(2\beta - \gamma - \alpha)(2\gamma - \alpha - \beta) = 0 \,, \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Mais

$$2\alpha - \beta - \gamma = 3\alpha - h \,;$$

On a donc trois parallèles aux côtés du triangle fondamental, menées par son centre.

88. — La cubique est circonscrite au triangle A B C, si l'on a: $k^3 = h^3$; elle rencontre les trois côtés si $k^3 > \frac{h^3}{4}$; elle ne les rencontre pas si $k^3 < \frac{h^3}{4}$. Quand elle les rencontre, c'est en des points pour lesquels on a:

$$\beta\gamma = \frac{h^3 - k^3}{3h} \,.$$

En mettant à part le cas de la dégénérescence, on a toujours affaire à une cubique [2°, a], qui satisfait aux règles de la symétrie autour d'un Λ^3 (62).

89. — Donnons un tableau-résumé de la discussion qui précède:

$k^3 > h^3$: Rencontre les prolongements des côtés. Chacune des trois branches entoure une région hachurée;

$k^3 = h^3$: Circonscrite au triangle ABC;

$\frac{h^3}{3} < k^3 < h^3$: Rencontre les côtés (entre P et C);

$k^3 = \frac{h^3}{3}$: Trois droites concourantes (dégénérescence);

$\frac{h^3}{4} < k^3 < \frac{h^3}{3}$: Rencontre les côtés (entre P et Q);

$k^3 = \frac{h^3}{4}$: Tangente aux trois côtés;

$k^3 < \frac{h^3}{4}$: Ne rencontre pas les côtés.

Toujours trois asymptotes concourantes.

§ 5. — Une deuxième surface.

90. — Nous allons esquisser une théorie de la surface:

$$y^2z + z^2x + x^2y = p^3 . \qquad (p > 0)$$

Elle admet certainement un axe de symétrie ternaire, d'équations:

$$x = y = z .$$

Elle ne rencontre aucun des axes coordonnés, ne pénètre pas dans le trièdre où les trois coordonnées sont négatives. Elle coupe les plans coordonnés suivant trois cubiques [5°,c], analogues à celle que nous avons étudiée plus haut (26, 75):

$$x = 0 , \quad y^2z = p^3 ;$$
$$y = 0 , \quad z^2x = p^3 ;$$
$$z = 0 , \quad x^2y = p^3 .$$

91. — Un plan parallèle à l'un des plans coordonnés ($z = c$), fournit, comme section, la cubique:

$$x^2y + cy^2 + c^2x = p^3 ,$$

que nous avons discutée (81). En faisant voyager le plan sécant, en laissant varier c de $-\infty$ à $+\infty$, on engendre la surface par le déplacement continu de la section, ce qui permet d'en avoir une première idée assez claire.

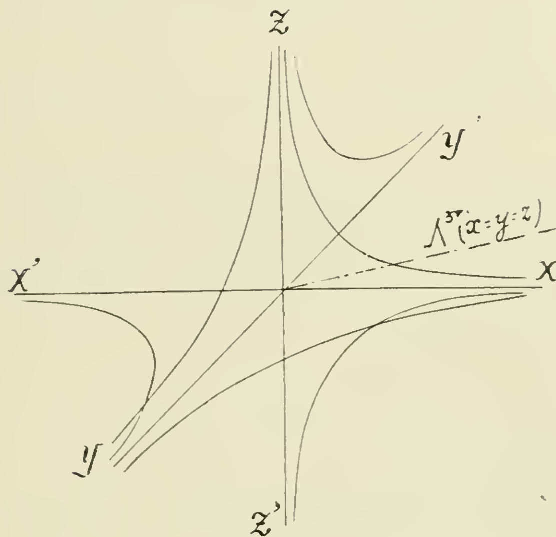


Fig. 17.

Un plan perpendiculaire au Λ^3 (27) donne une cubique unipartite non unicursale, à trois asymptotes concourantes (82, 84, 89). Les directions asymptotiques de cette courbe restent invariables, quand le plan sécant se déplace (82, 83). Le lieu des asymptotes se compose de trois plans qui se coupent suivant le Λ^3. Du tableau-résumé du nº 89, on déduit que la surface est hémimorphe (63, 68).

92. — De l'étude que nous avons faite de la dernière cubique (83), résulte encore la propriété suivante: Les trois plans des asymptotes forment des dièdres dont les trois plans bissecteurs sont des plans de symétrie de la surface.

L'axe ternaire rencontre la surface en un seul point:

$$x = y = z = \frac{p}{\sqrt[3]{3}};$$

celui-ci n'est pas un centre, car si l'on y transporte l'origine des coordonnées, l'équation de la surface devient:

$$\Sigma\left(y' + \frac{p}{\sqrt[3]{3}}\right)^2\left(z' + \frac{p}{\sqrt[3]{3}}\right) = p^3 ,$$

et cette équation renferme un terme de degré pair et deux termes de degrés impairs.

La surface possède bien la symétrie de la tourmaline (63):

$$\Lambda^3 , \quad 3P .$$

93. — En x, y, z, le plan tangent a pour équation:

$$(z^2 + 2xy)X + (x^2 + 2yz)Y + (y^2 + 2zx)Z = 3p^3 .$$

Au point où la surface rencontre son axe de symétrie, le plan tangent a pour équation:

$$X + Y + Z = p\sqrt[3]{9} .$$

Le point de contact est donc un point ordinaire (19), et, par conséquent, un ombilic (62).

94. — Signalons enfin trois points de coordonnées simples, appartenant à la surface:

$$-p , p , p ; \quad p , -p , p ; \quad p , p , -p .$$

En ces trois points, les plans tangents ont pour équations:

$$X - 3Y + Z + 3p = 0 ;$$
$$X + Y - 3Z + 3p = 0 ;$$
$$-3X + Y + Z + 3p = 0 .$$

Ces trois plans tangents se coupent sur l'axe ternaire.

95. — Une discussion, semblable aux précédentes, prouverait que les équations:

$$x^3 + y^3 + z^3 = 0 ; \quad y^2z + z^2x + x^2y = 0 ,$$

représentent des cônes rhomboédriques, ayant donc la symétrie du spath d'Islande:

$$C , \quad \Lambda^3 , \quad 3\Lambda^2 .$$
$$3P .$$

CHAPITRE V.

Classification des surfaces au point de vue de la symétrie cristallographique.

96. — Nous devons, tout d'abord, mettre à part les surfaces cylindriques et celles de révolution.

Les premières admettent une infinité de plans de symétrie, car tout plan perpendiculaire aux génératrices divise la surface en deux parties symétriques. Néanmoins, on pourrait subdiviser les cylindres d'après leurs autres éléments de symétrie. Un cylindre hyperbolique possède:

$$\infty C \; ; \quad \infty P \; ; \quad P' \; ; \quad P'' \; ;$$

$$\Lambda^2 \; ; \quad \infty \Lambda'^2 \; ; \quad \infty \Lambda''^2 \; .$$

Les surfaces de révolution possèdent un axe de symétrie, d'ordre infini; c'est précisément leur axe de révolution. Un ellipsoïde de révolution a:

$$C \; ; \quad \Lambda^\infty \; ; \quad \infty \Lambda'^2 \; ;$$

$$P \; ; \quad \infty P' \; .$$

97. — Il existe d'autres surfaces, comme celles que nous avons étudiées plus haut, et dont la symétrie ne comporte rien d'infini.

Nous croyons que l'on peut affirmer que toutes les surfaces, dont la symétrie est la même, ont un très grand nombre de propriétés communes: position des ombilics ou des points singuliers, courbure totale, etc.

Sur les surfaces, on peut rencontrer des symétries qui ne sauraient pas exister dans les cristaux. Ainsi un cône droit, dont la base serait une hypocycloïde ordinaire à sept rebroussements, aurait un Λ^7.

98. — Si donc l'on connaissait le tableau de toutes les symétries possibles, on aurait une classification des surfaces au point de vue cristallographique.

L'un des principaux avantages de la nouvelle méthode serait de faire connaître, chaque fois, le système de coordonnées qui rendrait le plus facile l'étude d'une surface particulière (13).

Liége, le 10 octobre 1920.

SOMMAIRE:

DÉDUCTION DES DÉRIVÉES DE FONCTIONS CIRCULAIRES PAR LA MÉTHODE GÉOMÉTRIQUE DES LIMITES

PAR

Branislav PETRONIEVICS (Belgrade).

Le principe de cette méthode peut être exprimé brièvement de la manière suivante: *déterminer la limite d'un rapport de lignes en s'appuyant sur les relations purement géométriques de ces lignes et d'autres lignes auxiliaires.*

Ce principe peut être illustré par la fig. 1. Dans cette figure, $OM = x$, $PM = y$, sont les coordonnées du point P de la courbe, $ON = x + \Delta x$, $QN = y + \Delta y$. Comme $\Delta PRQ \sim SMP$, on a $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{PM}{SM}$. Plus le point Q sera proche du point P (P et Q étant les deux points de la sécante QS, et P le point de la tangente PT), plus le point S sera proche du point T, et plus, par conséquent, le rapport $\frac{PM}{SM}$ approchera du rapport $\frac{PM}{TM}$, d'où il s'ensuit que $\lim \frac{PM}{SM} = \frac{PM}{TM}$. Mais comme $\lim \frac{PM}{SM} = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$, on aura enfin $\frac{dy}{dx} = \frac{PM}{TM}$.

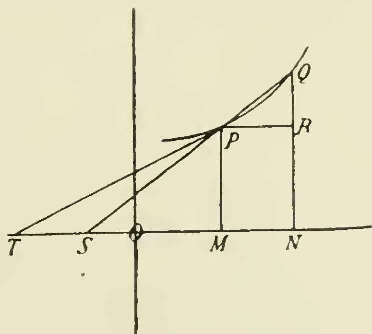


Fig. 1.

La méthode ainsi définie peut être appliquée immédiatement aux fonctions circulaires, tandis que son application devient

plus compliquée et plus difficile pour d'autres fonctions. La déduction des dérivées de fonctions circulaires par cette méthode est beaucoup plus simple et plus évidente que celle par la méthode analytique, et elle est supérieure à celle-ci, non seulement au point de vue didactique, mais peut-être aussi au point de vue logique [1].

Dans le présent article, la dérivée de sin x a été déduite pour tous les quatre cas spéciaux :

$$x < \frac{\pi}{2}\,, \quad x > \frac{\pi}{2} \text{ et } < \pi\,, \quad x > \pi \text{ et } < \frac{3}{2}\pi\,, \quad x > \frac{3}{2}\pi \text{ et } < 2\pi\,,$$

tandis que pour les autres fonctions circulaires cette déduction n'a été faite que pour le premier cas seulement $\left(\text{pour } x < \frac{\pi}{2}\right)$. Cependant, dans les remarques, j'ai indiqué brièvement comment on doit l'effectuer pour les autres cas de ces fonctions. J'ai indiqué aussi brièvement comment déduire les dérivées de fonctions circulaires inverses.

$$\text{I.} - \frac{d \sin x}{dx} = \cos x\,.$$

1. — $0 < x < \frac{\pi}{2}$. — Dans la fig. 2, on a $PZ = x$, $\widehat{QP} = \Delta x$, P est le point de la tangente PT, PM le sinus de l'arc x (et

---

[1] Le premier qui ait tenté une déduction purement géométrique des dérivées de différentes fonctions était J. Barrow, dans ses *Lectiones geometricæ* : c'est un fait historique constaté récemment par M. J. M. Child, qui voit en Barrow le premier inventeur du calcul infinitésimal. M. Child affirme (comp. sa traduction de l'ouvrage de Barrow, *Geometrical Lectures*, London, 1916, p. 123), que Barrow aurait déjà possédé aussi la déduction des dérivées de fonctions circulaires.

D'Alembert, en expliquant la métaphysique du calcul différentiel (comp. son article « Differentiel » dans *Encyclopédie ou dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers*, 3e éd., MDCCLXXIX, t. X, p. 1016-17) affirme « que ce calcul ne consiste qu'à *déterminer algébriquement la limite d'un rapport de laquelle on a déjà l'expression en lignes, et à égaler ces deux limites, ce qui fait trouver une des lignes que l'on cherche.* » D'Alembert reconnaît donc (comme Leibniz avant lui), que le rapport-limite exprimé algébriquement dans un quotient différentiel peut toujours s'exprimer géométriquement, mais il n'entrevoit pas la possibilité de le déduire géométriquement.

Dans la méthode géométrique que j'ai appliquée, pour la première fois, aux dérivées de fonctions circulaires, dans un article en langue serbe paru dans le périodique *Nastavnik*, 1909, je me suis inspiré de l'article de D'Alembert, ne connaissant guère la tentative similaire de Barrow. Je n'ai eu également connaissance de la déduction demi-géométrique de ces dérivées, se trouvant dans l'ouvrage excellent de J. Boussinesq, *Cours d'Analyse infinitésimale*, t. I, fasc. 1, p. 57-60, qu'après la publication de mon article.

de l'angle correspondant), QN le sinus de l'arc $x + \Delta x$ (et de l'angle correspondant).

Comme le sinus dans le premier quadrant est *positif* et comme il croît avec la croissance de l'arc, $\Delta \sin x$ sera *positive:*

$$RQ = QN - PM = \Delta \sin x \ .$$

D'autre part on a:

$$\lim QP = \lim \Delta x \ ,$$

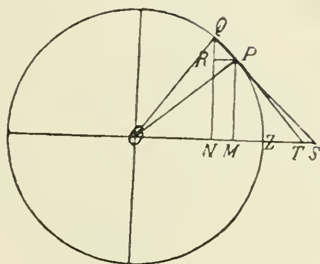


Fig. 2.

QP étant la partie de la sécante QS correspondant à l'arc $\widehat{QP}$.

De Δ PRQ $\sim$ SMP on a:

$$\frac{RQ}{QP} = \frac{PM}{PS} \ ,$$

et comme, en passant à la limite, ΔSMP coïncide avec TMP, on aura:

$$\lim \frac{RQ}{QP} = \lim \frac{PM}{PS} \equiv \frac{PM}{PT} \ . \tag{1}$$

D'autre part, de ΔTMP $\sim$ PMO, on a:

$$\frac{PM}{PT} = \frac{OM}{OP} = \cos x \ . \tag{2}$$

Les équations (1) et (2) donnent:

$$\lim \frac{RQ}{QP} = \cos x \ . \tag{3}$$

Mais comme

$$\lim \frac{RQ}{QP} = \frac{\lim \Delta \sin x}{\lim \Delta x} = \frac{d \sin x}{dx} \ , \tag{4}$$

on aura enfin:

$$\frac{d \sin x}{dx} = \cos x \ . \tag{5}$$

2. $\frac{\pi}{2} < x < \pi$. — Le sinus dans le deuxième quadrant (Fig. 3) étant *positif* et *décroissant* avec la croissance de l'arc, $\Delta \sin x$ sera *négative:*

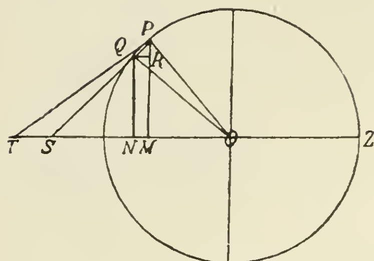


Fig. 3.

$$\mathrm{RP} = \mathrm{QN} - \mathrm{PM} = -\Delta \sin x .$$

De même on a:

$$\lim \mathrm{QP} = \lim \Delta x .$$

De ΔQRP $\sim$ SNQ on a:

$$\frac{\mathrm{RP}}{\mathrm{QP}} = \frac{\mathrm{NQ}}{\mathrm{SQ}}$$

et, en passant à la limite,

$$\lim \frac{\mathrm{RP}}{\mathrm{QP}} = \lim \frac{\mathrm{NQ}}{\mathrm{SQ}} = \frac{\mathrm{PM}}{\mathrm{PT}} . \qquad (1)$$

D'autre part, de ΔTMP $\sim$ PMO, on a:

$$\frac{\mathrm{PM}}{\mathrm{PT}} = \frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{OP}} = \cos(180^\circ - x) = -\cos x . \qquad (2)$$

Les équations (1) et (2) donnent:

$$\lim \frac{\mathrm{RP}}{\mathrm{QP}} = -\cos x . \qquad (3)$$

Mais comme:

$$\lim \frac{\mathrm{RP}}{\mathrm{QP}} = \frac{\lim -\Delta \sin x}{\lim \Delta x} = -\frac{\lim \Delta \sin x}{\lim \Delta x} = -\frac{d \sin x}{dx} \qquad (4)$$

on aura:

$$-\frac{d \sin x}{dx} = -\cos x ,$$

d'où enfin:

$$\frac{d \sin x}{dx} = \cos x . \qquad (5)$$

3. $\pi < x < \frac{3}{2}\pi$. — Le sinus dans le troisième quadrant (Fig. 4) étant *négatif* et *croissant* avec la croissance de l'arc, $\Delta \sin x$ sera *négative*:

$$RQ = -QN - (-PM) = -\Delta \sin x .$$

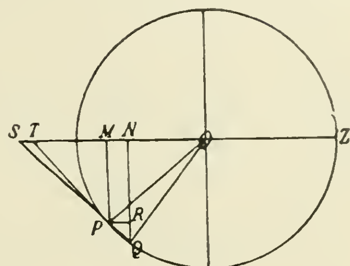


Fig. 4.

On a de même:

$$\lim QP = \lim \Delta x .$$

De $\Delta QRP \sim QNS$ on a:

$$\frac{RQ}{QP} = \frac{NQ}{SQ}$$

et, en passant à la limite,

$$\lim \frac{RQ}{QP} = \lim \frac{NQ}{SQ} = \frac{PM}{PT} . \qquad (1)$$

D'autre part, de $\Delta TMP \sim PMO$, on a:

$$\frac{PM}{PT} = \frac{OM}{OP} = \cos(x - 180^\circ) = -\cos x . \qquad (2)$$

Les équations (1) et (2) donnent:

$$\lim \frac{RQ}{QP} = -\cos x . \qquad (3)$$

Mais comme:

$$\lim \frac{RQ}{QP} = \frac{\lim -\Delta \sin x}{\lim \Delta x} = -\frac{\lim \Delta \sin x}{\lim \Delta x} = -\frac{d \sin x}{dx} \qquad (4)$$

on aura:

$$-\frac{d \sin x}{dx} = -\cos x ,$$

d'où enfin:

$$\frac{d \sin x}{dx} = \cos x . \qquad (5)$$

4. $\frac{3}{2}\pi < x < 2\pi$. — Le sinus dans le quatrième quadrant (Fig. 5) étant *négatif* et *décroissant* avec la croissance de l'arc, $\Delta \sin x$ sera *positive:*

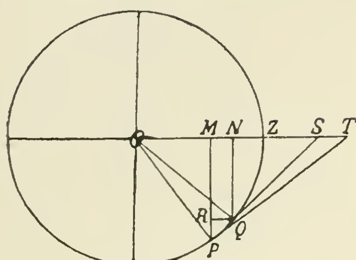


Fig. 5.

$$RP = - QN - (- PM)$$
$$= PM - QN = \Delta \sin x \ .$$

De même on a:

$$\lim QP = \lim \Delta x \ .$$

De $\Delta QRP \sim SNQ$ on a:

$$\frac{RP}{QP} = \frac{NQ}{SQ}$$

et, en passant à la limite

$$\lim \frac{RP}{QP} = \lim \frac{NQ}{SQ} = \frac{PM}{PT} \ . \qquad (1)$$

D'autre part, de $\Delta TMP \sim PMO$, on a:

$$\frac{PM}{PT} = \frac{OM}{OP} = \cos (360^\circ - x) = \cos x \ . \qquad (2)$$

Les équations (1) et (2) donnent:

$$\lim \frac{RP}{QP} = \cos x \ . \qquad (3)$$

Mais comme

$$\lim \frac{RP}{QP} = \frac{\lim \Delta \sin x}{\lim \Delta x} = \frac{d \sin x}{dx} \qquad (4)$$

on aura enfin:

$$\frac{d \sin x}{dx} = \cos x \ . \qquad (5)$$

Remarque. — Par rapport à la fonction circulaire inverse $x = \sin y$ (ou $y = \text{arc} \sin x$), il suffit d'en déduire la dérivée pour le premier cas $x < \frac{\pi}{2}$.

Dans la fig. 2, nous aurons: $PZ = y$, $\widehat{QP} = \Delta y$, PM sera le sinus de l'arc y (et de l'angle correspondant), QN le sinus de l'arc $y + \Delta y$ (et de l'angle correspondant).

On aura alors:

$$\mathrm{RQ} = \mathrm{QN} - \mathrm{PM} = \Delta \sin y = \Delta x \ ,$$
$$\lim \mathrm{QP} = \lim \Delta y \ .$$

De ΔPRQ $\sim$ SMP on a:

$$\frac{\mathrm{QP}}{\mathrm{RQ}} = \frac{\mathrm{PS}}{\mathrm{PM}} \ ,$$

et, en passant à la limite,

$$\lim \frac{\mathrm{QP}}{\mathrm{RQ}} = \lim \frac{\mathrm{PS}}{\mathrm{PM}} = \frac{\mathrm{PT}}{\mathrm{PM}} = \frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{OM}} = \frac{1}{\cos y} \ . \qquad (1)$$

Mais comme

$$\lim \frac{\mathrm{QP}}{\mathrm{RQ}} = \frac{\lim \Delta y}{\lim \Delta \sin y} = \frac{d \operatorname{arc} \sin x}{dx} \qquad (2)$$

on aura enfin:

$$\frac{d \operatorname{arc} \sin x}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \ .$$

$$\text{II.} \ \frac{d \cos x}{dx} = - \sin x \ .$$

De la fig. 2, qui représente le cas $x < \frac{\pi}{2}$, résulte immédiatement:

$$\mathrm{RP} = \mathrm{ON} - \mathrm{OM} = - \Delta \cos x \ , \qquad \text{et} \qquad \lim \mathrm{QP} = \lim \Delta x \ .$$

De ΔPRQ $\sim$ SMP on a:

$$\frac{\mathrm{RP}}{\mathrm{QP}} = \frac{\mathrm{MS}}{\mathrm{PS}} \ ,$$

et, en passant à la limite,

$$\lim \frac{\mathrm{MS}}{\mathrm{PS}} = \frac{\mathrm{MT}}{\mathrm{PT}} = \frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{OP}} = \sin x \ . \qquad (1)$$

Mais comme

$$\lim \frac{\mathrm{RP}}{\mathrm{QP}} = \frac{\lim - \Delta \cos x}{\lim \Delta x} = - \frac{d \cos x}{dx} \qquad (2)$$

on aura enfin:

$$\frac{d \cos x}{dx} = - \sin x \ . \qquad (3)$$

Remarque 1. — On peut aisément déduire, en suivant la déduction de ce premier cas et des cas correspondants pour le sinus, les trois autres cas pour le cosinus. Cette déduction se basera sur le fait que le signe — de l'équation $\frac{d \cos x}{dx} = -\sin x$ provient, dans les deux premiers cas, de la différence négative de cosinus, et dans les deux autres, du sinus négatif de l'arc.

Remarque 2. — En suivant cette déduction de la dérivée de $\cos x$ et celle d'arc $\sin x$, on déduira aisément la dérivée pour arc $\cos x$:

$$\frac{d \operatorname{arc} \cos x}{dx} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$\text{III.} — \frac{d \operatorname{tg} x}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Dans la fig. 6, qui représente le premier cas $x < \frac{\pi}{2}$, ZT_1 est la tangente trigonométrique de l'arc $PZ = x$, ZT_2 la tangente trigonométrique de l'arc $QZ = x + \Delta x$, P est le point de la tangente PT, Q et P sont les deux points de la secante QS, PM est le sinus x, QN le sinus de l'arc $x + \Delta x$, $PU \parallel T_2T_1$, $MV \parallel OQ$ et $MY \parallel OP$ sont des lignes auxiliaires.

Fig. 6.

De la fig. 6 résulte immédiatement:

$$T_2T_1 = T_2Z - T_1Z = \Delta \operatorname{tg} x,$$
$$\lim QP = \lim \Delta x.$$

On a d'abord:

$$\frac{T_2T_1}{UP} = \frac{T_1O}{PO} = \frac{ZO}{MO} = \frac{PO}{MO} = \frac{1}{\cos x}. \qquad (1)$$

De $\Delta QPU \sim VPM$ on a ensuite:

$$\frac{UP}{QP} = \frac{MP}{VP} \qquad (2)$$

et comme, en passant à la limite, ΔVPM coïncide avec YPM,

$$\lim \frac{UP}{QP} = \lim \frac{MP}{YP} = \frac{MP}{YP},$$

d'où, ΔYPM étant $\sim$ MOP,

$$\lim \frac{UP}{QP} = \frac{PO}{MO} = \frac{1}{\cos x}. \tag{3}$$

Comme nous avons d'une part (équations 1, 2, 3)

$$\frac{T_2T_1}{QP} = \frac{T_2T_1}{UP} \cdot \frac{UP}{QP}$$

et

$$\lim \frac{T_2T_1}{QP} = \frac{T_2T_1}{UP} \cdot \lim \frac{UP}{QP} = \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos^2 x} \tag{4}$$

et d'autre part:

$$\lim \frac{T_2T_1}{QP} = \frac{\lim \Delta \operatorname{tg} x}{\lim \Delta x} = \frac{d \operatorname{tg} x}{dx}, \tag{5}$$

on aura enfin:

$$\frac{d \operatorname{tg} x}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}. \tag{6}$$

Remarque 1. — La déduction pour les autres cas peut aisément être faite, en suivant la déduction de ce premier cas et des cas correspondants pour le sinus. Dans le deuxième cas, $\Delta \operatorname{tg} x$ sera *positive*, le cosinus *négatif*, dans le troisième $\Delta \operatorname{tg} x$ *positive*, le cosinus *négatif*, tandis que dans le quatrième tous les deux seront *positifs*.

Remarque 2. — En suivant la déduction de la dérivée de $\operatorname{tg} x$ et celle d'arc sin x, on déduira aisément la dérivée d'arc $\operatorname{tg} x$:

$$\frac{d \operatorname{arc} \operatorname{tg} x}{dx} = \cos^2 y = \frac{1}{1 + x^2}.$$

$$\text{IV.} \quad - \quad \frac{d \operatorname{ctg} x}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Dans la fig. 7, qui représente le premier cas $x < \frac{\pi}{2}$, Z_1C_1 est la cotangente de l'arc $PZ_2 = x$, Z_1C_2 la cotangente de l'arc

$QZ_2 = x + \Delta x$, P est le point de la tangente PT, Q et P les deux points de la sécante QS, PM = $\sin x$, QN = $\sin(x + \Delta x)$, UP || C_2C_1 et VP || OQ des lignes auxiliaires.

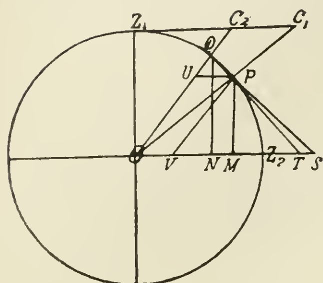


Fig. 7.

De la fig. 7 résulte immédiatement :

$$C_2C_1 = Z_1C_2 - Z_1C_1 = -\Delta \operatorname{ctg} x\ ,$$

$$\lim QP = \lim \Delta x\ .$$

On a d'abord :

$$\frac{C_2C_1}{UP} = \frac{C_1O}{PO} = \frac{C_1O}{Z_1O} = \frac{OP}{MP} = \frac{1}{\sin x}\ . \tag{1}$$

De ΔQPU ∼ PSV on a ensuite :

$$\frac{UP}{QP} = \frac{VS}{PS} \tag{2}$$

et comme, en passant à la limite, ΔPSV coincide avec POT,

$$\lim \frac{UP}{QP} = \lim \frac{VS}{PS} = \frac{OT}{PT}\ .$$

d'où, ΔPOT étant ∼ MOP,

$$\lim \frac{UP}{QP} = \frac{OP}{MP} = \frac{1}{\sin x}\ . \tag{3}$$

Comme d'une part (équations 1, 2, 3)

$$\lim \frac{C_2C_1}{QP} = \frac{C_2C_1}{UP} \cdot \lim \frac{UP}{QP} = \frac{1}{\sin x} \cdot \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{\sin^2 x} \tag{4}$$

et d'autre part :

$$\lim \frac{C_2C_1}{QP} = \frac{\lim -\Delta \operatorname{ctg} x}{\lim \Delta x} = -\frac{d \operatorname{ctg} x}{dx} \tag{5}$$

on aura enfin :

$$\frac{d \operatorname{ctg} x}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 x}\ . \tag{6}$$

Remarque 1. — Le même résultat peut être aisément obtenu pour les trois autres cas. Dans le deuxième cas, $\Delta \operatorname{ctg} x$ sera *négative*, le sinus *positif*, dans le troisième et quatrième $\Delta \operatorname{ctg} x$ sera *négative*, *négatif* est aussi le sinus. Dans tous les quatre

cas, le signe — de l'équation (6) provient de la différence négative de la cotangente.

Remarque 2. — En suivant la déduction de la dérivée de ctg x et celle d'arc sin x, on déduira aisément la dérivée d'arc ctg x:

$$\frac{d \operatorname{arc} \operatorname{ctg} x}{dx} = - \sin^2 y = - \frac{1}{1 + x^2} .$$

$$\text{V.} — \frac{d \sec x}{dx} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} .$$

Dans la fig. 8, qui représente le premier cas $x < \frac{\pi}{2}$, OS_1 est la secante trigonométrique de l'arc $PZ = x$, OS_2 la sécante trigonométrique de l'arc $QZ = x + \Delta x$, U le point d'intersection de cette sécante avec le cercle au radius OS_1, S_1 le point de la tangente S_1T', U et S_1 les deux points de la sécante S_1S', $PM = \sin x$, $QN = \sin (x + \Delta x)$, $ZV \parallel OQ$ et $ZY \parallel OP$ des lignes auxiliaires.

Fig. 8.

De la fig. 8 résulte immédiatement:

$$US_2 = OS_2 - OS_1 = \Delta \sec x$$
$$\lim QP = \lim \Delta x .$$

On a d'abord:

$$\frac{US_1}{QP} = \frac{S_1O}{PO} = \frac{ZO}{MO} = \frac{PO}{MO} = \frac{1}{\cos x} . \qquad (1)$$

De $\Delta S_2US_1 \sim ZVS_1$ on a ensuite:

$$\frac{US_2}{US_1} = \frac{VZ}{VS_1} \qquad (2)$$

et comme, en passant à la limite, ΔZVS_1 coïncide avec ZYS_1,

$$\lim \frac{US_2}{US_1} = \lim \frac{VZ}{VS_1} = \frac{YZ}{YS_1} .$$

d'où (ΔZYS_1 étant $\sim$ PMO)

$$\lim \frac{US_2}{US_1} = \frac{MP}{MO} = \frac{\sin x}{\cos x} . \qquad (3)$$

Comme nous avons d'une part (équations 1, 2, 3):

$$\lim \frac{US_2}{QP} = \frac{US_1}{QP} . \lim \frac{US_2}{US_1} = \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} \qquad (4)$$

et d'autre part:

$$\lim \frac{US_2}{QP} = \frac{\lim \Delta \sec x}{\lim \Delta x} = \frac{d \sec x}{dx} \qquad (5)$$

on aura enfin:

$$\frac{d \sec x}{dx} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} . \qquad (6)$$

Remarque 1. — Le même résultat peut être aisément obtenu pour les trois autres cas. Dans le deuxième cas, $\Delta \sec x$ sera *positive*, le sinus *positif*, le cosinus *négatif*, dans le troisième $\Delta \sec x$ *négative*, le sinus et le cosinus *négatifs*, dans le quatrième $\Delta \sec x$ *négative*, le sinus *négatif*, le cosinus *positif*.

Remarque 2. — En suivant la déduction de la dérivée de sec x et celle d'arc sin x, on déduira aisément la dérivée d'arc sec x:

$$\frac{d \operatorname{arc} \sec x}{dx} = \frac{\cos^2 y}{\sin y} = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}} .$$

VI. — $\dfrac{d \operatorname{cosec} x}{dx} = - \dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$.

Dans la fig. 9, qui représente le premier cas $x < \frac{\pi}{2}$, OC_1 est la cosécante de l'arc $PZ = x$, OC_2 la cosécante de l'arc $QZ =$

$x + \Delta x$, C_2 et U sont les deux points de la sécante C_2S', C_1 le point de la tangente C'T', PM $= \sin x$, QN $= \sin(x + \Delta x)$.

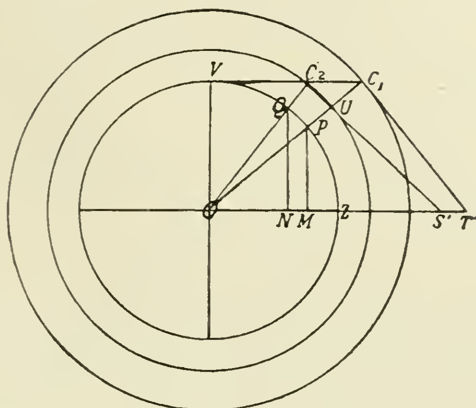


Fig. 9.

De la fig. 9 résulte immédiatement:

$$UC_1 = OC_2 - OC_1 = -\Delta \operatorname{cosec} x$$
$$\lim QP = \lim \Delta x \ .$$

On a d'abord:

$$\frac{UC_2}{PQ} = \frac{C_2O}{QO}$$

et, en passant à la limite,

$$\lim \frac{UC_2}{PQ} = \lim \frac{C_2O}{QO} = \frac{C_1O}{PO} = \frac{C_1O}{VO} = \frac{OP}{MP} = \frac{1}{\sin x} \ . \qquad (1)$$

De $\Delta C_1UC_2 \sim$ OUS' on a ensuite:

$$\frac{UC_1}{UC_2} = \frac{UO}{US'} \qquad (2)$$

et comme, en passant à la limite, ΔOUS' coïncide avec OC_1T' (le cercle au radius OC^2 coïncidant avec le cercle au radius OC_1)

$$\lim \frac{UC_1}{UC_2} = \lim \frac{UO}{US'} = \frac{C_1O}{C_1T'} = \frac{MO}{MP} = \frac{\cos x}{\sin x} \qquad (3)$$

Comme nous avons d'une part (équations 1, 2, 3):

$$\lim \frac{UC_1}{PQ} = \lim \frac{UC_2}{PQ} \cdot \lim \frac{UC_1}{UC_2} = \frac{1}{\sin x} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} \equiv \frac{\cos x}{\sin^2 x} \qquad (4)$$

et d'autre part:

$$\lim \frac{UC_1}{PQ} = \frac{\lim - \Delta \operatorname{cosec} x}{\lim \Delta x} = - \frac{d \operatorname{cosec} x}{dx} . \qquad (5)$$

on aura enfin:

$$\frac{d \operatorname{cosec} x}{dx} = - \frac{\cos x}{\sin^2 x} . \qquad (6)$$

Remarque 1. — Dans le deuxième cas, Δ cosec x sera *positive*, le sinus *positif*, le cosinus *négatif*, dans le troisième Δ cosec x *positive*, le sinus et le cosinus *négatifs*, dans le quatrième Δ cosec x *négative*, le sinus *négatif*, le cosinus *positif*.

Remarque 2. — On pourrait aussi déduire de la fig. 9 la dérivée de cotg x, comme la figure 8 peut servir pour la déduction de la dérivée de tg x.

Remarque 3. — En suivant la déduction de la dérivée de cosec x et celle d'arc sin x, on déduira aisément la dérivée pour arc cosec x:

$$\frac{d \operatorname{arc} \operatorname{cosec} x}{dx} = - \frac{\sin^2 y}{\cos y} = - \frac{1}{x \sqrt{x^2 - 1}} .$$

DÉDUCTION GÉOMÉTRIQUE DE L'EXPRESSION POUR LE RAYON DE COURBURE

PAR

J. M. Child (Manchester) et B. Petronievics (Belgrade).

Ayant envoyé l'article qui précède, en langue serbe, à Monsieur J. M. Child, professeur à l'Université de Manchester, j'ai reçu de lui la lettre suivante:

« ..... I was very interested in the pamphlet you sent me. Of course, I could not follow all the argument, printed as it was in Serbian; and I consider it a very good idea to republish it, with further developments, in French. Here is a little theorem in infinitesimal geometry of the same kind, which, as far as I am aware, is new. It leads directly to the value of the radius of curvature in Cartesian Coordinates. Perhaps you would care to treat it more rigorously according to the method of the pamphlet; if so I should be honoured if you would include it in your French publication as one of the further developments.

Yours very sincerely,

J. M. Child. »

La première partie de cet article contient la traduction de la part de collaboration importante de M. Child, mentionnée dans sa lettre; dans la deuxième, j'ai appliqué à sa fig. 1 ma méthode géométrique.

I

Théorème. — Dans la fig. 1 ABC représente la tangente au point A d'un cercle de centre O; OB et OC coupent ce cercle en des points P et Q.

Soit QT une tangente au point Q, coupant ABC en T. Tirez BD ⊥ OC. De P tirez PR ∥ AC coupant QT en S; de même tirez PW ⊥ OC et, par Q, QR ⊥ PR. On aura alors:

$$\frac{BC}{PW} = \frac{OB}{OC} \cdot \frac{SQ^2}{SR^2} .$$

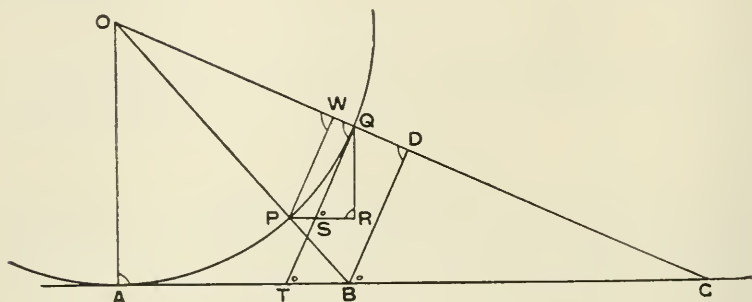


Fig. 1.

Preuve: Les angles marqués dans la fig. 1 sont évidemment égaux. Donc, par la similitude des triangles, nous avons:

$$\left.\begin{aligned} \frac{BC}{BD} &= \frac{OC}{OA} = \frac{SQ}{SR} \\ \frac{BD}{PW} &= \frac{OB}{OP} = \frac{OB}{OA} \end{aligned}\right\} \therefore \frac{BC}{PW} = \frac{OB \,.\, OC}{OA^2} = \frac{OB}{OC} \cdot \frac{SQ^2}{SR^2}$$

Corollaire. A la limite, l'angle BOC dans la fig. 2 devenant infiniment petit, on a (dans la fig. 1):

$$\frac{PR}{SR} \to 1 \,, \quad \frac{PW}{PQ} \to 1 \,, \quad \frac{OB}{OC} \to 1 \quad \text{et} \quad \frac{SQ}{SR} \to \frac{PQ}{PR} \;;$$

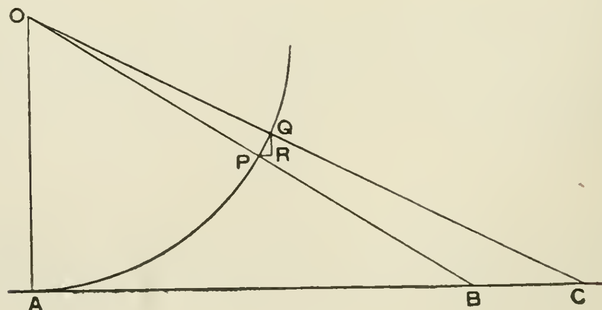


Fig. 2.

ce qui donne finalement:

$$\frac{BC}{PQ} = \frac{PQ^2}{PR^2}$$

ou

$$\frac{BC}{PR} = \left(\frac{PQ}{PR}\right)^3 .$$

Application au rayon de courbure. — Si ρ (dans la fig. 3) représente le rayon de courbure de la courbe LM au point P, et Q un point voisin, on aura alors:

$$PR = \delta x \; , \qquad RQ = \delta y \; ,$$

$$PQ = \left\{ 1 + \left(\frac{\delta y}{\delta x}\right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} . \, \delta x \; ,$$

d'où

$$\left(\frac{PQ}{PR}\right)^3 = \left\{ 1 + \left(\frac{\delta y}{\delta x}\right)^2 \right\}^{\frac{3}{2}}$$

Dans la fig. 3 nous avons:

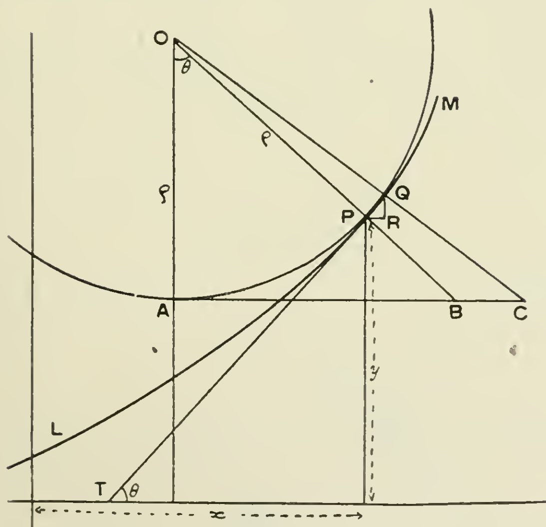


Fig. 3.

$$AB = \rho \operatorname{tg} \theta$$

$$AC = \rho \operatorname{tg} (\theta + \delta\theta)$$

d'où

$$BC = \delta(\rho \operatorname{tg} \theta)$$
$$= \rho \cdot \delta \left(\frac{\delta y}{\delta x}\right)$$

d'où

$$\frac{BC}{PR} = \rho \cdot \frac{\delta\left(\frac{\delta y}{\delta x}\right)}{\delta x}$$

Donc, d'après le corollaire ci-dessus $\frac{BC}{PR}$ étant $= \left(\frac{PQ}{PR}\right)^3$, nous aurons, en passant à la limite,

$$\rho \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = \left\{ 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \right\}^{\frac{3}{2}}$$

II

Dans la fig. 4, PT est la tangente au point P du cercle de centre O′, QS la secante qui coupe ce cercle en des points P et Q, QT′ la tangente du même cercle au point Q, O′F et O′F′ les deux droites passant par les points P et Q du cercle et coupant la tangente AC (|| OX) en B et C, QN et PM ⊥ OX et || OY, PR ⊥ QN et || OX, DE || QS et D′E′ || PT, $< AO'P = \theta$ et $< PO'Q = \Delta\theta$.

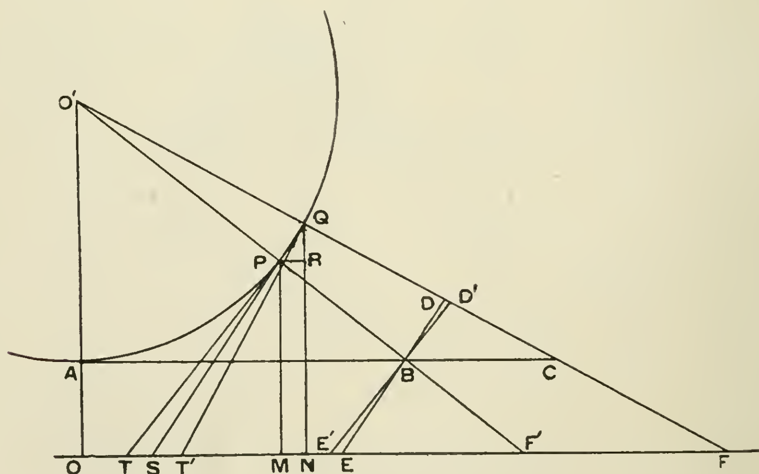


Fig. 4.

De la fig. 4 résulte immédiatement:

$$BC = O'A \,.\, \Delta\, tg\, \theta = \rho \Delta\, tg\, \theta \,.$$

De $\Delta BCD \sim EFD$ on a:

$$\frac{BC}{BD} = \frac{EF}{ED} \,.$$

Mais comme, en passant à la limite, ΔEFD coïncide avec E′F′B, on aura:

$$\lim \frac{BC}{BD} = \frac{E'F'}{E'B} \,,$$

et, $\Delta E'F'B$ étant $\sim$ TPM,

$$\lim \frac{BC}{BD} = \frac{TP}{TM} \,. \tag{1}$$

D'autre part, BD étant $\|$ PQ, on a:

$$\frac{BD}{PQ} = \frac{BO'}{PO'} = \frac{BO'}{AO}$$

et, $\Delta BO'A$ étant $\sim$ PTM,

$$\frac{BD}{PQ} = \frac{PT}{MT} \tag{2}$$

Les équations (1) et (2) donnent:

$$\lim \frac{BC}{BD} \cdot \frac{BD}{PQ} = \frac{PT^2}{MT^2} \,. \tag{3}$$

De $\Delta PQR \sim SPM$ on a:

$$\frac{PQ}{PR} = \frac{SP}{SM} \,.$$

Mais comme, en passant à la limite, ΔSPM coïncide avec TPM, on aura:

$$\frac{PQ}{PR} = \frac{TP}{TM} \,. \tag{4}$$

Les équations (3) et (4) donnent:

$$\lim \frac{BC}{PQ} \cdot \frac{PQ}{PR} = \frac{TP^3}{TM^3} \,. \tag{5}$$

Comme nous avons d'une part:

$$\lim \frac{BC}{PR} = \frac{\lim \rho \Delta \operatorname{tg} \theta}{\lim \Delta x} = \rho \cdot \frac{d \operatorname{tg} \theta}{dx} = \rho \cdot \frac{d^2 y}{dx^2}$$

et d'autre part (équation (4)):

$$\frac{TP^3}{TM^3} = \frac{PQ^3}{PR^3} = \frac{PQ^2}{PR^2} \cdot \frac{PQ}{PR} = \frac{dy^2 + dx^2}{dx^2} \cdot \sqrt{\frac{dy^2 + dx^2}{dx^2}}$$

$$= 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}$$

on aura enfin (équation (5)):

$$\rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2 y}{dx^2}} \qquad (6)$$

CAMILLE JORDAN

(1838-1922)

Ce n'est pas entreprendre une tâche sans péril que d'essayer de rendre un juste hommage à un si grand nom. Nous nous appuierons surtout sur ce qui a déjà été dit par des voix particulièrement autorisées, notamment par celles de MM. Emile Bertin[1], Emile Picard[1], Robert d'Adhémar[2], Henri Lebesgue[3], Henri Villat[4].

Marie-Ennemond-Camille Jordan naquit à la Croix-Rousse, près Lyon, le 5 janvier 1838. Il était fils de l'ingénieur Alexandre Jordan et de Joséphine Puvis de Chavannes, sœur du célèbre peintre. Après de premières études au Collège d'Oullins et au Lycée de Lyon, il entra à l'Ecole Polytechnique comme élève en 1855, comme examinateur en 1873, comme professeur en 1876; il conserva ce dernier titre pendant 36 ans ! Il fut aussi

[1] *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 23 janvier 1922.
[2] *Revue générale des Sciences*, 15 février 1922.
[3] *Revue scientifique*, 22 avril 1922.
[4] *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1922, fascicule 1.

professeur titulaire au Collège de France, de 1883 à 1912. L'Institut l'accueillit en 1881.

De telles énumérations de dates sont cependant complètement insuffisantes pour que l'on puisse apercevoir l'action d'un tel esprit sur la science et sur les générations qu'il a formées. Il faudrait pouvoir se représenter en même temps le génie déployé dans des écrits dont deux seulement, le *Traité des Substitutions* et le *Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique*, représentent déjà un amas de richesses que peu d'intelligences peuvent totalement assimiler.

Le *Traité des Substitutions* ! Ouvrage devenu rarrissime, dont nous ne parlons nous-mêmes, ici, que sur de vagues souvenirs. Il y en avait à Toulouse un exemplaire qui, disparu il y a dix ans dans un incendie de bibliothèque, n'a pu être remplacé. Combien ont étudié ces théories dans le *Traité d'Algèbre supérieure* de H. Weber (d'ailleurs traduit en français par J. Griess) et, ce qui fut encore une grande chance, avec le secours d'un chapitre que M. E. Picard glissa adroitement dans le Tome III de son *Traité d'Analyse*. Le Maître incontesté des groupes de substitutions ne se résolvait pas à nous donner une seconde édition.

Heureusement, nous avions de bons amis en Amérique, par exemple MM. G.-A. Miller, H.-F. Blichfeldt, L.-E. Dickson qui en 1916, publièrent un magnifique volume portant en titre *Theory and applications of Finite Groups* [1] et en dédicace: *To Camille Jordan whose fundamental investigations on the theory and applications of finite groups enriched the subject to the extent of converting it into a fundamental branch of mathematics and furnished in a large measure the inspiration for the subsequent great activity in this field, this book is dedicated.*

1916 ! C'était la grande et affreuse guerre. Camille Jordan avait perdu sur les champs de bataille trois fils et un petit-fils. La victoire était indécise et lointaine et l'Amérique, à cette époque, était sympathique, mais encore immobile. Ces rapprochements n'indiquent-ils pas qu'il y a des formes supérieures de l'intelligence logique qui, au-dessus de tous les crimes et de toutes les amertumes, tendent vers des fins morales ?

---

[1] New-York, John Wiley and Sons; London, Chapman and Hall. Une analyse détaillée de cet ouvrage, revue par C. Jordan, a été publiée dans le *Bulletin des Sciences mathématiques*.

Quoi qu'il en soit, l'hommage scientifique que recevait Camille Jordan en ces heures cruelles précédait, comme un puissant symbole, l'actif dévouement que tout un grand peuple allait bientôt apporter à la cause de la liberté.

Il faut noter aussi que, sur le terrain purement scientifique, la théorie des groupes finis est devenue une théorie bien américaine. Les géomètres de ce pays, si industriel et affairé, se sont adonnés à des considérations arithmétiques d'une transcendance presque inimitable, les singularités de groupes d'ordre prodigieusement élevé étant cultivées avec une puissance d'abstraction qu'aucune application technique n'a jamais demandée.

Et cependant, derrière cette algèbre si subtile, il y a les fonctions, les courbes, les surfaces, les variétés *algébriques* et le toujours merveilleux théorème d'Abel. L'Arithmétique est vraiment la reine des Mathématiques mais, malgré cela, on ne peut guère conseiller, en général, de s'inféoder à cette royauté aussi sévère que belle. Comme il serait long et difficile d'aller vers tout par la logique de la voie arithmétique ! Le continu a des exigences immédiates auxquelles on obéit d'autant plus volontiers qu'il apporte des intuitions qui soulagent; c'est quand on a l'esprit assez puissant pour dédaigner de tels soulagements qu'on est un grand, un très grand savant, un Camille Jordan. Qu'on se mette alors à faire de l'enseignement et on écrira tout naturellement le *Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique* qui, comme le remarque fort justement M. R. d'Adhémar, est aussi bien le Cours d'Analyse du Collège de France.

Dans un tel ouvrage, les principes sont constamment fixés d'un œil perçant et inflexible; les tâtonnements qui se sont produits autour de la notion d'intégrale définie ont abouti à trouver la voie droite que M. Henri Lebesgue devait d'ailleurs continuer; les fonctions elliptiques sont envisagées non au point de vue de leurs applications mécaniques ou physiques, mais dans leurs relations avec la Théorie des Nombres, d'où des pages d'une curieuse brièveté sur la transformation ou la multiplication complexe. Quant aux fonctions abéliennes, elles sont rapidement étudiées sur des surfaces de Riemann dont la connexion fut encore, pour Camille Jordan, l'occasion de travaux d'une puissante pénétration. Là encore, ce qui permet la consi-

dération profonde du continu (du continu des surfaces riemanniennes) c'est l'adjonction d'entiers sans lesquels il ne serait qu'un informe chaos. Sans le discontinu, le continu ne saurait être un objet de science; la théorie des ensembles l'a suffisamment prouvé de son côté et, d'autre part, les variétés continues Espace et Temps, qui méritent bien des majuscules en signe de la grande vénération que l'homme leur accorde depuis toujours, semblent maintenant s'estomper dans un Univers où toute véritable loi devient Nombre.

Mais ne nous éloignons pas des considérations fondamentales qui caractérisent les travaux de Camille Jordan.

Les développements préliminaires et prodigieux de la théorie des fonctions analytiques placèrent d'abord dans un jour singulier les recherches sur les fonctions de variables réelles; d'excellents mathématiciens décrétèrent que çà n'était pas des mathématiques ! Ecoutons plutôt le savoureux discours de M. Henri Lebesgue [1]: « L'orage est maintenant presque apaisé car les nouvelles recherches ont prouvé leur utilité pour l'étude des fonctions analytiques elles-mêmes; mais, au commencement, comme il se trouve toujours quelqu'un pour essayer de transformer un beau résultat des Anciens en obstacle à jeter au travers de la route par laquelle des Modernes prétendent arriver à de nouvelles conquêtes, on nous a accusé de mépris pour les fonctions analytiques, d'amour morbide des singularités qui, disait-on, sont anormales puisque tout est analytique, et de bien d'autres choses encore. Mais nos travaux sont en continuité avec ceux de M. Jordan; comment persévérer dans ces reproches et les adresser à M. Jordan lui-même, alors qu'il venait d'édifier, à la gloire des fonctions analytiques, le splendide monument qu'est son Cours de l'Ecole Polytechnique, ouvrage dans lequel les mathématiciens du monde entier de ma génération ont appris l'Analyse et qui, malgré d'excellents ouvrages plus récents, reste unique à bien des égards ? »

Il n'y a d'ailleurs qu'à feuilleter les *Leçons sur l'intégration* de M. Henri Lebesgue pour sentir toute la profonde exactitude de cette citation.

---

[1] *Revue scientifique*, 22 avril 1922, p. 255.

Il faut attacher aux ensembles des *nombres* analogues aux longueurs, aires, volumes, etc. Cette première idée est de Cantor mais c'est Jordan qui l'a simplifiée et complétée. Un ensemble a des étendues intérieure et extérieure; quand ces deux étendues sont égales, il est dit mesurable J, c'est-à-dire mesurable au sens de Camille Jordan. Les courbes qui séparent le plan en deux régions sont les « courbes de Jordan »; elles doivent se généraliser en variétés qui séparent de même les ensembles d'un espace quelconque et l'on entrevoit que les intégrales multiples, construites dans de telles conditions, généraliseront celles que la Physique mathématique a d'abord considérées dans l'espace ordinaire.

La notion de fonction à variation bornée est aussi due à Camille Jordan et a encore été introduite avec précision dans le *Cours d'Analyse*; on revient toujours à cet ouvrage quand on veut comprendre toute la portée des idées de l'illustre analyste car les Mémoires isolés qu'il a rédigés sont généralement conçus dans un esprit abstrait, le but n'étant pas toujours indiqué et la brièveté de l'exposition rappelant souvent celle de Charles Hermite. Au contraire, dans le *Cours*, tout a dû s'enchaîner et c'est une gloire de plus que de léguer un ouvrage unique où toutes les pensées fondamentales du savant ont laissé quelque empreinte.

C'est donc après une longue et laborieuse carrière que Camille Jordan s'est éteint le 21 janvier 1922. S'il fut cruellement meurtri en son cœur, puisque frappé dans ses affections les plus chères, il ne le fut jamais en sa vive et pénétrante intelligence. Il laisse des exemples de toutes sortes; son disciple le plus direct, M. Henri Lebesgue, fera revivre sa pensée à l'Institut et au Collège de France. Le *Journal de Mathématiques*, qui fut d'abord le « Journal de Liouville » puis le « Journal de Jordan », a été sauvé de difficultés d'impression qui auraient pu être mortelles: la publication continue, de manière brillante, grâce aux efforts de M. Henri Villat. Puissent les jeunes, qui s'émerveilleront dans l'étude des mathématiques, ne pas oublier ce qu'ils devront toujours au génie analytique et à l'esprit d'organisation de Camille Jordan!

A. Buhl (Toulouse).

CHRONIQUE

Einstein au Collège de France.

Les conférences de la *Fondation Michonis* ont été confiées cette année à M. le Prof. A. Einstein. Ce fut le vendredi 31 mars 1922, dans ce sanctuaire scientifique qu'est le Collège de France, une émotion profonde pour tous les admirateurs des théories relativistes de voir apparaître l'homme auquel nous ne devons rien moins qu'une nouvelle manière de penser. L'ovation qui l'accueillit trahit l'enthousiasme de tous.

M. M. Croiset, directeur du Collège de France, souhaita d'abord la bienvenue au savant physicien et rappela que cette institution avait déjà eu l'occasion d'entendre, dans les mêmes conditions, le savant hollandais Lorentz.

Dans sa première conférence, M. Einstein précisa sa pensée sur certains points comme pour prévenir les objections qui pourraient lui être faites durant les trois séances de discussion des 3, 5 et 7 avril.

Après avoir explicité les trois postulats non nécessaires *a priori*, qui servaient de fondement à la physique newtonienne, espace euclidien, temps absolu, solide invariable, Einstein fut amené à préciser sa conception de la géométrie naturelle et de l'espace naturel, qu'il faut distinguer des géométries ou espaces que le mathématicien construit en partant de définitions arbitraires.

La géométrie naturelle est l'étude des corps solides, de leurs relations réciproques, de leur superposition et des constructions qu'ils permettent d'effectuer. L'espace naturel est l'un de ces corps et rien d'autre. Cette conception rappelle celle de Poincaré, quoique plus voisine de l'empirisme d'Helmholtz. La théorie de la relativité générale a pour point de départ cette remarque très simple: l'égalité, vérifiée expérimentalement au plus haut degré de précision, de la masse inerte et de la masse pesante perd son caractère mystérieux si l'on regarde ces deux masses comme deux aspects d'une seule et même entité. Accélération et gravitation se compensent entièrement, c'est le principe d'équivalence. L'attraction agissant sur tous les corps est comme si elle n'agissait sur aucun, elle est propriété de l'espace aussi bien que de la matière. Mais, ajoute immédiatement Einstein, la présence d'un champ gravifique n'est pas pour cela fictive, elle a au contraire un caractère absolu car il n'est pas possible

de la remplacer par une accélération que localement, en un point de l'espace-temps et non pour une portion finie de l'univers.

On supprime le champ gravifique en lui obéissant et l'observateur en chute libre peut se considérer dans un univers euclidien et y vérifie le principe d'inertie de l'ancienne mécanique. L'existence d'un tel univers euclidien tangent en chaque point de l'espace-temps à l'univers réel permet par un procédé de calcul tensoriel, d'étendre à l'espace courbe les propriétés de la mécanique classique. Celle-ci devait apparaître désormais comme un cas limite et dégénéré de la mécanique nouvelle. Sans cette idée simple, il eût été, de l'avis d'Einstein, très probablement impossible de construire la relativité générale.

Après cet exposé de méthode, Einstein insista spécialement sur le fait que les grandeurs intervenant en relativité doivent avoir une signification physique sans quoi la théorie se perd dans le symbolisme mathématique. Il est remarquable, ajoute l'éminent physicien, que le ds^2 qui définit la géométrie soit un invariant immédiatement mesurable au moyen des règles et des horloges. Il semble que ce soit avant tout, ce point de vue physique, qu'Einstein ait cherché à préciser dans cette première leçon.

Les séances suivantes eurent lieu sous la présidence de M. Langevin.

Relativité restreinte. — M. Carvallo demande si des expériences astronomiques portant sur la vitesse de la lumière ne pourraient pas infirmer le principe de relativité. M. Einstein montre qu'il n'en est rien et ajoute que la méthode classique de détermination de la vitesse de la lumière au moyen des satellites de Jupiter constituerait une nouvelle expérience cruciale, pourvu que la précision y soit poussée jusqu'au vingtième de seconde.

M. Sagnac expose sa théorie antirelativiste et M. Lemeray précise certains points.

M. Painlevé se demande si la transformation de Lorentz appliquée à un mouvement formé de la superposition de deux mouvements de translation uniforme ne conduirait pas à quelque contradiction.

Il pose le problème suivant. Soit (x, t) une voie ferrée rectiligne constituant un système inertial et sur celle-ci un train formant un système (x', t'). Supposons que le train se meuve avec une vitesse v pendant un temps θ mesuré aux horloges de la voie, puis qu'instantanément, il s'arrête et reparte en sens inverse avec la même vitesse. C'est bien là un mouvement somme de deux mouvements inertiaux. M. Einstein donne l'interprétation lorentzienne du problème au moyen de quelques dessins. M. Langevin, au début de la séance suivante, en donne l'interprétation analytique. Qu'il me suffise ici d'indiquer la transformation de Lorentz pour le mouvement de recul:

$$t' - \theta\sqrt{1 - \beta^2} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}\left[t - \theta + \frac{V}{c^2}(x - V\theta)\right] \qquad (1)$$

c'est cette expression qui correspond au réglage des horloges du train au moyen de signaux lumineux. Elle peut s'écrire

$$t' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(t + \frac{Vx}{c^2}\right) - 2\frac{\beta^2}{\sqrt{1-\beta^2}}\theta\,. \qquad (2)$$

C'est, à une constante additive près, la formule de Lorentz pour une vitesse $-v$. C'est là le point essentiel.

M. Guillaume, de Berne, tente de donner une interprétation non einsteinienne de l'optique.

M. Langevin indique qu'il a obtenu autrefois une construction de la mécanique relativiste sans passer par l'électrodynamique. Comme on le fait habituellement pour déterminer le caractère tensoriel de la force et la variabilité de la masse. M. Einstein l'en félicite.

Relativité générale. — On sait que la loi de gravitation d'Einstein admet dans le cas d'un seul point attractif la solution particulière donnée par Schwarzschild

$$ds^2 = -\frac{1}{\gamma}dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin\theta\, d\varphi^2 + \gamma dt^2 \qquad \gamma = 1 - \frac{2m}{r} \qquad (3)$$

où m est la masse gravifique située à l'origine, r, θ, φ, t les coordonnées sphériques d'un point de l'espace temps.

M. Hadamard demande quelle interprétation physique il faut donner de la singularité $r = 2m$. On sait qu'en général la sphère de rayon $2m$ est très petite et tout entière à l'intérieur du soleil, mais on peut imaginer que cette masse par grossissement du soleil soit assez grande pour que cette sphère soit dans l'espace où gravitent des planètes. Que se passerait-il alors sur cette sphère ? M. Einstein juge la question très profonde et montre que tout au moins dans le cas d'un soleil formé d'un liquide incompressible une autre singularité physique devancerait la « catastrophe Hadamard »; les pressions seraient infinies au centre de la masse attractive et l'éminent physicien émet l'idée que l'on pourrait peut-être chercher dans cette direction l'origine de la chaleur des astres.

M. Painlevé remarque que la solution relativiste du problème de la gravitation au voisinage d'un centre attractif est indéterminée dans une large mesure et qu'une expression plus générale que celle de Schwarzschild rendrait compte aussi bien de tous les mouvements planétaires. M. Einstein répond que la formule de Schwarzschild la plus simple de toute est la seule admissible, car toute autre contient des éléments dont l'interprétation physique n'existe pas.

Ces deux questions sur la formule (3) donnèrent lieu à une discussion animée à laquelle prirent part MM. Brillouin, Borel, Langevin et Cartan.

Songeons que dans la nouvelle conception, nous ne savons pas qu'elle est le diamètre du soleil, ou que la troisième loi de Képler

n'a plus de sens physique puisqu'on ne peut plus définir un temps unique pour une révolution planétaire et nous comprendrons combien la question est délicate. Il faut la prodigieuse intuition physique de M. Einstein pour répondre sans aucune hésitation aux questions subtiles de tels interlocuteurs.

M. DE DONDER fait un fort intéressant exposé des théories électromagnétiques et retrace en particulier les tentatives d'explication de la cohésion de l'électron qui paraissent nécessiter une troisième forme d'énergie et demande à M. Einstein quelle est à son idée la meilleure voie à suivre. Ce dernier incline à croire que les recherches futures s'inspireront de la solution donnée au moyen de la pression de Poincaré.

M. PERRIN pose quelques questions sur l'énergie gravifique, M. LEMERAY sur la mesure d'un certain triangle astronomique. Enfin, M. LEROUX, constatant que le caractère non euclidien d'une figure du plan Cayleyen diffère suivant la nature de la conique de base (l'absolu) demande à M. Einstein si l'interprétation non euclidienne de l'Univers n'est pas en grande mesure arbitraire. Physiquement, répond ce dernier, c'est-à-dire en opérant avec des règles et des horloges après correction des déformations dues à des effets thermiques ou élastiques, le caractère non euclidien de la géométrie naturelle de l'espace-temps est parfaitement déterminé. M. Einstein paraît donc avoir répondu à toutes les objections.

Le jeudi 6 avril, la *Société de philosophie* recevait M. Einstein. M. Langevin fit un exposé des questions philosophiques auxquelles les théories nouvelles permettraient peut-être de répondre; puis la discussion fut ouverte. MM. Hadamard, Painlevé, Drach, Cartan, Paul Levy, Brunschwig, Le Roy, Bergson, Meyerson, Piéron, Nordmann prirent la parole. Je ne citerai que deux faits.

Comme on le priait de prendre position vis-à-vis du kantisme, M. Einstein, qui trouve ce point de vue trop indéterminé, prononça cet aphorisme qui passera sans doute à la postérité. « Chaque philosophe a son Kant propre ».

M. BERGSON, très au courant de la relativité, laissa entrevoir dans une charmante improvisation que le temps einsteinien était plus près du temps psychologique tel qu'il le conçoit que l'ancien temps absolu. M. Einstein répondit que le temps du philosophe était le temps propre, mais qu'il n'entrevoyait guère d'autres moyens que ceux de la relativité de raccorder ces temps entre eux.

Durant ces conférences, qui réunissaient un public nombreux et select, allant des adversaires obstinés aux adeptes les plus fervents ou les plus avertis, l'homme qui avait déjà l'estime de chacun s'est fait aimer par la sincérité, la franchise et la simplicité dont il ne s'est jamais départi.

ROLIN WAVRE (Genève).

Nouvelles diverses. — Nominations et distinctions.

Allemagne. — M. F. Bernstein a été nommé professeur ordinaire à l'Université de Gœttingen.

M. K. Kommerell, privat-docent, a été nommé professeur extraordinaire à l'Ecole technique supérieure de Stuttgart.

M. R. König a été nommé professeur ordinaire à l'Université de Tubingen.

M. F. Noether a été nommé professeur extraordinaire de mathématiques appliquées à l'Université de Heidelberg.

M. F. Pfeiffer a été nommé professeur ordinaire à l'Ecole technique supérieure de Stuttgart.

M. Pohlhausen, privat-docent, a été nommé professeur extraordinaire à l'Université de Rostock.

M. Prange, privat-docent, a été nommé professeur ordinaire à l'Ecole technique supérieure de Hannover.

M. J. Radon a été nommé professeur à l'Université de Greifswald.

M. W. Schmeidler a été nommé professeur ordinaire à l'Ecole technique supérieure de Breslau.

Angleterre. — L'*Association britannique* pour l'avancement des Sciences tiendra sa session annuelle à Hull, du 6 au 13 septembre 1922, sous la présidence de M. le prof. Sherrington. La section des sciences mathématiques sera présidée par M. Hardy.

France. — *Académie des Sciences.* — M. Maurice d'Ocagne, professeur à l'Ecole Polytechnique, a été élu académicien libre, en remplacement de M. Jules Carpentier, décédé.

M. Henri Lebesgue, professeur au Collège de France, est élu membre de l'Institut en remplacement de M. Camille Jordan, décédé.

M. René Baire a été nommé correspondant de la section de Géométrie en remplacement de M. Nœther, décédé.

M. Fredholm, professeur à l'Université de Stockholm, a été élu membre correspondant, en remplacement de M. Schwarz, décédé.

Universités. — M. H. Beghin, agrégé de mathématiques, professeur de mécanique à l'Ecole Navale, a été nommé maître de conférences de mathématiques à l'Université de Montpellier.

M. Chastelet, professeur de mathématiques générales à l'Université de Lille, passe à la chaire de mécanique rationnelle.

M. Gambier est nommé à la chaire de mathématiques générales de l'Université de Lille.

M. Soula, agrégé de mathématiques, docteur ès sciences mathématiques, professeur au Lycée d'Aix, a été nommé maître de conférences de mathématiques à l'Université de Montpellier.

Italie. — L'Académie royale dei Lincei a décerné le *Prix royal pour l'Astronomie* (se rapportant à la période 1915-1920) à M. G. ARMELLINI, professeur de mécanique supérieure à l'Université de Pise.

M. L. TONELLI, professeur d'analyse infinitésimale à l'Université de Parme, a été nommé professeur d'analyse supérieure à l'Université de Bologne.

M. L. SILLA, professeur de mécanique rationnelle à l'Université de Cagliari, a été transféré à l'Université de Gênes, pour la même matière.

Ont été admis, en qualité de *privat-docents :*

M. G. ANDREOLI, pour l'analyse infinitésimale, à l'Université de Naples;

M. G. APRILE, pour la géométrie analytique et projective, à l'Université de Catane;

M. G. MIGNOSI, pour l'analyse algébrique, à l'Université de Palerme;

M. M. R. SERINI, pour la mécanique rationnelle et G. USAI, pour l'analyse infinitésimale, à l'Université de Pavie.

Cinquantenaire de la maison Hœpli. — M. Ulrico HŒPLI vient de célébrer le cinquantenaire de la fondation de sa maison d'éditions. Originaire de Zurich, M. Hœpli vint se fixer à Milan en 1870. Il ne tarda pas à constater l'absence presque totale d'une librairie spécialement consacrée aux sciences pures et appliquées. Grâce au dévouement inlassable qu'il apporta dans ses relations avec les auteurs et à la façon consciencieuse dont il dirigea les affaires, sa maison ne tarda pas à se placer au premier rang des librairies italiennes. Elle figure aujourd'hui au nombre des grandes maisons d'édition du monde entier.

La place que tiennent ses nombreuses publications dans la littérature scientifique est considérable. On s'en rendra aisément compte en parcourant le beau volume renfermant le catalogue [1] chronologique et alphabétique, par auteurs et par matières, des ouvrages édités par la Maison Hœpli de 1872 à 1922. Nous nous bornerons à rappeler, pour ce qui concerne les mathématiques, les nombreux volumes de la collection des *Manuali Hœpli* et la publication des œuvres complètes des mathématiciens italiens BELTRAMI, BETTI, BRIOSCHI et CREMONA.

Nous nous joignons de tout cœur aux félicitations et aux nombreux témoignages de gratitude qui viennent d'être adressés de toutes parts à M. Hœpli à l'occasion de ce jubilé.

H. FEHR.

Suisse. — La Section normale de l'*Ecole polytechnique fédérale*, à Zurich, organise un *cours de vacances* pour les mathématiques et la physique. Spécialement destiné aux maîtres de l'enseignement secondaire, ce cours est également accessible aux étudiants. Il comprend

---

[1] *Mezzo Secolo di vita editoriale.* 1 vol. in-8° de 404 p., avec une Préface de M. SCHERILO.

des conférences de MM. le prof. H. WEYL, *Raum, Zeit und Materie*; P. DEBYE, *Molekülbau*; F. SCHERRER et F. TANK, *Experimentalphysik*; M. PLANCHEREL, *Neuere funktionentheoritische Forschungen*; G. POLYA, *Binominal Koeffizienten und Wahrscheinlichkeitsrechnung auf der Schule*; M. GROSSMANN et L. KOLLROS, *Graphische Methoden*; F. BÄSCHLIN et E. MEISSNER, *Form, Dichte und Elastiziätt des Erdballs*.

Ces conférences auront lieu du 4 au 7 octobre 1922. Les inscriptions sont reçues jusqu'au 1er octobre.

Université de Genève. — M. D. MIRIMANOFF a été nommé professeur extraordinaire de Calcul des probabilités. — M. Rolin WAVRE a été nommé professeur extraordinaire de Calcul différentiel et intégral et de Mécanique rationnelle.

Nécrologie.

Pierre BOUTROUX. — Nous apprenons avec regret la mort de M. Pierre Boutroux, fils d'Emile Boutroux, l'éminent philosophe français et neveu de Henri Poincaré. Pierre Boutroux avait été professeur de calcul différentiel et intégral à la Faculté des sciences de Poitiers et à l'Université de Princeton, E.-U. (1913-1914). Depuis 1920, il occupait la chaire d'histoire générale des Sciences au Collège de France. Nos lecteurs connaissent, tout au moins par nos analyses bibliographiques, son important ouvrage sur les *Principes de l'Analyse mathématique* (2 volumes) et son récent livre sur l'*Idéal scientifique du mathématicien*. Pierre Boutroux n'était âgé que de 41 ans. Sa mort prématurée est une grande perte pour l'Histoire et la Philosophie des mathématiques.

Charles CAILLER. — M. C. Cailler, professeur honoraire de l'Université de Genève, est décédé le 30 janvier 1922, à l'âge de 57 ans. C'est en 1889 qu'il débuta à la Faculté des Sciences de Genève au lendemain de la mort du professeur Charles Céllerier. Il fut d'abord chargé du cours de Mécanique rationnelle. Depuis 1900, il enseigna en outre le calcul différentiel et intégral. Des raisons de santé l'obligèrent de prendre sa retraite en octobre 1921. C. Cailler a fourni de nombreux mémoires d'un grand intérêt se rapportant aux branches les plus diverses, depuis l'algèbre, la géométrie, l'analyse et la mécanique jusqu'aux problèmes récents soulevés par les théories d'Einstein.

Ernest LEBON. — M. Ernest Lebon, professeur honoraire au Lycée Charlemagne, à Paris, est décédé le 12 février 1922, dans sa 76me année. Auteur de plusieurs traités de mathématiques (algèbre, géométrie élémentaire, géométrie descriptive, etc.), E. Lebon a publié un grand nombre de mémoires originaux et d'articles scientifiques. Rappelons ici ses patientes recherches sur les nombres premiers, son bel ouvrage intitulé *Histoire abrégée de l'Astronomie* et son intéressante collection de monographies publiées sous le titre « savants

du jour » (H. Poincaré; Gaston Darboux; Emile Picard; Paul Appell; Lippmann).

M. O. Tedone, professeur de mécanique rationnelle à l'Université de Gênes, est décédé le 18 avril dernier, victime d'un affreux accident. Il a été renversé par un train dans la gare de Pise et a succombé peu d'heures après.

Né à Ruvo di Puglia, le 10 mai 1870, il fit ses études à l'Université de Pise, où il fut élève de Betti, Dini, Bianchi, Volterra. Ce dernier exerça la plus grande influence sur les débuts de ses recherches qu'il continua ensuite d'une manière vigoureuse et consciencieuse. Il s'occupa surtout de l'intégration des équations de l'élasticité et de l'électromagnétisme. Ses récentes contributions (Rend. Lincei 1917 et 1919) sur le principe de Huygens et sur les phénomènes de diffraction sont particulièrement remarquables comme netteté de concept et simplicité formelle. Il était professeur à Gênes depuis 1902, membre correspondant de l'Académie dei Lincei depuis 1911.

M. W. W. Beman, professeur à l'Université de Michigan, est décédé le 18 janvier 1922, dans sa 71me année.

M. Charles-Léonard Bouton, professeur à l'Université Harvard (Mass, E.-U.), est décédé le 20 février 1922 dans sa 53me année.

M. H. Buchholz, professeur d'astronomie à l'Université de Halle, est décédé le 24 novembre 1921, à l'âge de 55 ans.

M. E. Jahnke, professeur à l'Ecole technique supérieure de Charlottenbourg, est décédé le 18 octobre 1921, à l'âge de 58 ans.

M. le Prof. L. Kœnigsberger, de l'Université de Heidelberg, est décédé le 15 décembre 1921, à l'âge de 83 ans.

M. G. Kohn, professeur à l'Université de Vienne, est décédé le 15 décembre 1921 à l'âge de 62 ans.

M. M. Nœther, professeur à l'Université d'Erlangen, est décédé le 13 décembre 1921, à l'âge de 77 ans.

NOTES ET DOCUMENTS

Cours universitaires.

FRANCE

Paris. — *Faculté des Sciences.* — La Faculté vient de publier le programme des cours du semestre qui s'ouvrira dès le 3 novembre prochain. Nous en extrayons la liste ci-après concernant les mathématiques:

Géométrie supérieure. — M. Cl. Guichard. professeur: Théorie générale des réseaux 0 associés. (2 cours par semaine.)

Calcul différentiel et intégral. — M. Goursat, professeur: Opérations et éléments de la théorie des fonctions analytiques. (2). — Conférences: M. Julia maître de conférences (1).

Applications de l'analyse à la géométrie en vue du Certificat de calcul différentiel. M. Drach, professeur (1). Problèmes principaux de la théorie des surfaces au point de vue analytique (1).

Mécanique rationnelle. — M. Montel, professeur: Dynamique du point et Statique (2). — M. Drach, professeur: Cinématique (1). — Conférences: M. Cahen (1).

Théorie des groupes et calcul des variations. — Application à l'intégration des équations différentielles. — M. Vessiot, professeur (2).

Mathématiques générales. — M. Montel, professeur, M. Denjoy, chargé de cours (2). — Conférences de mécanique. M. Thybaut (1). — Travaux pratiques, M. Cahen (1).

Calcul des probabilités et physique mathématique. — M. E. Borel, professeur: Théorie de la déformation des milieux continus (2).

Mécanique physique et expérimentale. — M. Kœnigs, professeur: Principes généraux de mécanique appliquée. Moteurs hydrauliques et thermiques (2).

Astronomie. — M. Andoyer, professeur (2). — Conférences: M. Lambert (2).

Aviation. (Fondation Basil Zaharoff). — M. Marchis, professeur: Etat actuel de l'aérodynamique (2).

BIBLIOGRAPHIE

Jean Becquerel. — **Le principe de relativité et la théorie de la gravitation.** Leçons professées en 1921 et 1922 à l'Ecole polytechnique et au Muséum d'histoire naturelle. — 1 vol. in-8°, IX–342 p.; 25 fr.; Gauthier-Villars et Cie, Paris 1922.

Cet important traité de relativité écrit par un savant français se recommande de lui-même au lecteur. Il est très clair et pourrait constituer une initiation à la théorie, en même temps que très complet, tant au point de vue mathématique que physique. Qu'il me suffise de mentionner les questions traitées d'une manière plus spécialement détaillée; telles, l'étude des phénomènes optiques dans les systèmes en mouvement relatif et en relativité générale, les méthodes permettant de déduire la dynamique tout entière de la loi de gravitation ou la loi de gravitation elle-même d'un principe d'action stationnaire.

L'étude de la courbure de l'espace et du temps, de l'espace fermé, de la forme de l'univers, suivant que l'on admet l'hypothèse cosmologique d'Einstein ou celle de de Sitter, des raisons que l'on a d'adopter l'une plutôt que l'autre de ces deux hypothèses est très approfondie.

Mentionnons tout particulièrement un développement des idées d'Einstein et de Weyl de date récente et dont ne traitent pas les ouvrages déjà analysés dans cette revue. Je veux parler de la géométrie de M. Eddington. On ne saurait nier son intérêt philosophique. L'univers n'y est tout d'abord assujeti qu'à la condition de posséder une structure géométrique, puis en spécifiant la nature d'un certain tenseur généralisé, donnant l'expression de la variation d'un vecteur transporté par déplacement parallèle le long d'un contour fermé, on retrouve la géométrie de Weyl qui rend compte à la fois du champ électro-magnétique et du champ gravifique et dans un cas plus particulier encore la géométrie de Riemann.

Peut-être cette géométrie générale contient-elle l'élément analogue à la pression de Poincaré, cette troisième forme d'énergie qui expliquerait la cohésion de l'électron. Il serait philosophiquement remarquable que des considérations de géométrie pure nous fissent découvrir dans la nature une nouvelle forme d'énergie, mais les considérations de M. Eddington ne laisseront pas de paraître, à quelques esprits, d'ordre purement métaphysique.

M. Becquerel a réussi dans son livre à être simple et clair jusque dans les problèmes les plus ardus. Il semble à certains égards s'être inspiré le plus possible des mémoires originaux en respectant la pensée de chaque auteur. Je ne saurais mieux faire que de respecter aussi la sienne en citant les deux derniers paragraphes de son introduction.

« On doit répandre aujourd'hui les idées nouvelles. Elles ne conduisent

pas à une complication de la science; bien au contraire, il en résulte une admirable harmonie, une merveilleuse synthèse des lois naturelles, par laquelle on aperçoit pour la première fois les liens qui unissent des phénomènes en apparence indépendants.

Le souci de la vérité, la satisfaction qu'éprouve l'esprit à pénétrer plus avant dans la compréhension des phénomènes, compensent largement les efforts que demande l'étude du principe de relativité. La principale difficulté qu'on rencontre vient de la répugnance à abandonner des idées acquises, et de l'étonnement où l'on est plongé devant certaines conséquences qui, par leur étrangeté, choquent ce que l'on considère comme le bon sens. Il faut, en abordant cette étude, avoir le courage de renoncer résolument aux idées préconçues. »

Rolin Wavre (Genève).

Emile Borel. — **L'espace et le temps.** (Nouvelle Collection scientifique). — 1 vol. petit in-8° de IV-246 pages; 8 fr.; Félix Alcan, Paris, 1922.

Ce nouveau livre est d'une portée immense et d'une simplicité admirable. C'est une singulière agacerie, pour ceux qui ont le droit d'enseigner les théories relativistes, que d'entendre une foule d'ignorants se réclamer sans cesse de l'observation vulgaire et du « bon sens » pour décréter la carence de théories qu'ils ne comprennent pas. Théories mystiques, théories religieuses a-t-on dit. M. Emile Borel est aussi peu religieux que possible; il tient aux théories einsteiniennes pour ce qu'elles ont déjà donné et se déclare prêt à aller vers celles qui donneront plus encore; ce n'est point de la fidélité mystique mais du pur esprit scientifique. En attendant nous sommes einsteiniens parce qu'Einstein nous a révélé de magnifiques choses, telle le lien unissant la gravitation aux phénomènes électromagnétiques.

Ce que nous devons aussi aux nouvelles théories, et ce n'est pas le moins précieux, c'est l'analyse qu'elles nous forcent à faire quant à la structure de nos idées concernant l'espace et le temps; le livre de M. Emile Borel, comme l'indique le titre, est surtout écrit à ce dernier point de vue.

Bravo ! Trois fois bravo pour la défense préliminaire des mathématiques qui, selon certains, ne créent rien et se contentent de transformer des éléments venus du dehors (p. 98). Il serait aussi raisonnable d'affirmer qu'un beau poème n'est rien de plus qu'un assemblage de lettres et un tableau de maître qu'un ramassis de couleurs !

Beaucoup d'art et de simplicité à propos de la notion de coordonnées. On sait le rôle immense des géodésiques, de l'intégration de la direction le long d'un contour fermé conçu dans un espace courbe; ce sont là des notions fondamentales, à analyse délicate, pour les savants traités de Weyl et Eddington. Ici M. Emile Borel nous fait parcourir, à la surface de la Terre, un carré de un kilomètre de côté puis il propose de recommencer le parcours pour un carré dont le côté serait dix mille fois plus grand; il suffirait de parcourir trois côtés de ce pseudo carré pour revenir au point de départ.

C'est en vain que l'on essaye de s'attacher à la continuité, l'intuition étant aussi bien en défaut dans le domaine des infiniment petits que dans celui des infiniment grands. Si d'un mètre on enlève, autour des divisions décimétriques, un décimètre en tout, puis, autour des divisions centimétriques, un centimètre en tout et ainsi de suite indéfiniment, on aura rompu toute continuité, déchiqueté le mètre d'une manière d'autant plus inimaginable...

qu'on n'en aura pas enlevé la neuvième partie. Les gens qui abusent de l'intuition géométrique sont invités à se représenter cela (p. 123). Les notions logiques dépassent de beaucoup les notions intuitives; les mathématiques nous invitent à nous dépasser nous-mêmes.

On imagine le plus souvent que le caractère non-euclidien de l'espace ne pourrait être mis en évidence qu'à l'aide de très grandes figures; il semble en être de même pour l'échelle sous-atomique ou paraît se révéler une structure granulée ne laissant subsister les propriétés euclidiennes que comme propriétés moyennes.

Signalons encore les si curieuses questions de topologie chères, sous un aspect extrêmement abstrait, à un Camille Jordan et qui maintenant interviennent dans les recherches sur la structure de l'espace physique !

Quant à l'infime multiplicité des explications théoriques que défendait Henri Poincaré elle conduit tout naturellement à rechercher des invariants qui, comme le nom l'indique, sont choses communes aux diverses images phénoménales. Le progrès de la Théorie des ensembles, puis ceux du Calcul intégral et enfin ceux de la Théorie des invariants intégraux, voilà probablement avec quoi on va bâtir la Physique de demain. Je retrouve ici une opinion personnelle sur laquelle je n'ose insister davantage de peur de donner à cette brève analyse un caractère transcendant qui correspondrait peu à l'exquise simplicité du style de M. Emile Borel. Rappelons plutôt que l'ouvrage ne contient que quelques formules très élémentaires, qu'il est accessible à tous ceux qui savent ou veulent penser correctement et qu'il est éminemment propre à donner une idée claire de captivantes théories autonr desquelles ce sont surtout des incompétents qui ont forgé des légendes d'extraordinaires difficultés.

A. Buhl (Toulouse).

L. Gustave Du Pasquier. — **Le principe de la relativité et les théories d'Einstein.** — 1 vol. in-8° de xvi+530 pages, avec 37 fig.; 20 fr.; G. Doin, Paris.

L'ouvrage de M. L. G. Du Pasquier a un caractère didactique. L'auteur a mis un grand soin à ordonner les matières de façon à graduer les difficultés.

Après une biographie de M. Einstein, le livre commence par la doctrine de la relativité restreinte, ce qui est conforme à l'ordre logique et au développement historique. Les idées fondamentales sont exposées en un langage clair et simple, de sorte que cette première partie peut être comprise par toute personne connaissant les rudiments de l'algèbre. De nombreuses figures soutiennent le raisonnement.

Dans la seconde partie, où se trouve exposée la doctrine de la relativité générale, l'auteur procède aussi du simple au compliqué. Aucun point essentiel à la compréhension de la théorie relativiste n'est omis. Vu la grande beauté philosophique que le calcul des variations permet de donner à cette doctrine, en l'unifiant et la condensant autant que possible, le dernier paragraphe est consacré au principe de moindre action. Là aussi, M. Du Pasquier, en partant du cas le plus simple amène le lecteur par étapes jusqu'à la dernière synthèse réalisée par M. Hilbert. Les divers stades qui ont abouti à la nouvelle figure du monde sont magistralement résumés.

Le style clair et souvent imagé des comparaisons ingénieuses rendent attrayante la lecture de ce livre où la démonstration mathématique est en général complétée par des exemples nombreux et variés, empruntés

au domaine de la mécanique, de la physique, de la chimie et principalement de l'astronomie.

Dans un appendice, l'auteur explique l'opposition entre le point de vue de M. Einstein et la plus récente théorie de Weyl relative au rapport de la relativité et de l'électro-magnétisme. Le livre se termine par l'examen des objections soulevées par M. Paul Painlevé dans la récente discussion de la doctrine relativiste à l'Académie des Sciences de Paris.

L'ouvrage de M. Du Pasquier, avec ses nombreuses notes bibliographiques permet au lecteur de s'initier rapidement aux théories d'Einstein.

E.-M. Lémeray. — **Leçons élémentaires sur la Gravitation,** d'après la Théorie d'Einstein. Cours libre professé à la Faculté des Sciences de Marseille pendant le quatrième trimestre 1920. — 1 vol. in-16 de 98 pages; 7 fr.; Gauthier-Villars et Cie, Paris, 1921.

Les universités françaises abordent maintenant, de toutes parts, l'enseignement des théories einsteiniennes; l'Ecole Polytechnique en a fait autant grâce à M. J. Becquerel. Aussi faut-il savoir gré, à M. Lèmeray, d'avoir professé, à Marseille, un cours libre dédié aux théories relativistes, à une époque où l'enseignement officiel ne s'occupait encore point de la chose. Le nouveau petit volume est d'ailleurs une suite naturelle de celui consacré au « Principe de Relativité » lequel a été signalé et analysé dans cette Revue (1916, p. 449).

La relativité généralisée peut être abordée de deux manières fondamentales. On peut trouver la notion de tenseur dans le « Calcul différentiel absolu »; on peut aussi la trouver dans le « Calcul des variations ». L'équivalence des deux méthodes est aisée à apercevoir mais, ne serait-ce que lorsque l'on se sent limité par des considérations pédagogiques, on peut parfaitement s'en tenir à l'une d'elles. Ici l'auteur a pris la seconde.

L'ouvrage débute par quelques problèmes classiques de calcul des variations; de la géométrie on passe à la dynamique et on compare le principe d'Hamilton avec celui de la moindre action. Toujours au point de vue classique, l'auteur a repris le problème képlérien et distingue, à son sujet, la trajectoire spatiale et la trajectoire temporelle; il montre ainsi que de telles distinctions ne relèvent pas essentiellement des théories relativistes. Plus loin, il fait une remarque analogue au sujet de l'espace-temps de Minkowski imaginé très indépendamment des conceptions postérieures d'Einstein.

La relativité généralisée étant bornée ici aux trois problèmes fondamentaux qui consacrèrent la gloire d'Einstein (mourvement planétaire à déplacement périhélique, incurvation de la lumière stellaire dans le voisinage du soleil, déviation des raies du spectre solaire vers le rouge), l'auteur n'a pas eu besoin d'une théorie générale de la courbure ni même des symboles de Christoffel. Ainsi l'œuvre est aussi voisine que possible de la dynamique habituelle; elle constitue une habile et excellente initiation.

A. Buhl (Toulouse).

Roberto Marcolongo. — **Relativita.** — 1 vol. in-8°, 192 p.: 30 lires; Casa Editrice Giuseppe Principato, Messina 1921.

M. R. Marcolongo fit à l'Université de Naples durant les années scolaires 1918-1919, 1919-1920 deux cours sur la relativité dont son dernier livre est un résumé, d'une clarté et d'une simplicité digne de tous les éloges. Sans

être en aucune manière une œuvre de vulgarisation, il fournit un excellent moyen de s'initier aux théories nouvelles. Il semble que M. Marcolongo ait cherché à suivre d'aussi près que possible les conceptions classiques afin de ne pas dépayser, plus que de raison, un lecteur ne connaissant que la physique ancienne. Parmi les ouvrages d'ensemble écrits sur la théorie de la relativité, on pourrait le caractériser par les faits suivants:

Il ne traite que de la partie des théories nouvelles qui semble acquise à la science, relativité restreinte dans son aspect mathématique et gravifique d'Einstein, mais ne touche pas aux généralisations, extensions ou applications un peu aventureuses, données par des savants désireux d'aller plus avant dans la conception relativiste, et qui revêtent aujourd'hui encore un caractère trop hypothétique.

Notons en particulier que l'électromagnétisme n'y occupe que deux pages. En ce sens l'ouvrage est beaucoup plus restreint que ceux de M. Weyl et de M. Eddington par exemple.

Il est conçu spécialement du point de vue de la mécanique et à plusieurs reprises l'auteur rattache et compare les méthodes nouvelles aux principes fondamentaux de la mécanique analytique.

En s'inspirant des travaux de Ricci, Levi-Civita et Bianchi, l'auteur a précisé quelques-uns des aspects géométriques de la théorie, qu'il étudie pour eux-mêmes et il a cherché autant que possible à ne pas rebuter le lecteur par ces sortes d'artifices du calcul tensoriel dont la signification concrète échappe souvent.

Si ce livre est restreint dans son objet, il fournit un solide point de départ pour affronter les développements ultérieurs et les questions plus ardues qui restent ouvertes.

La première partie « des fondements analytiques de la théorie de la relativité », à laquelle on peut adjoindre l'appendice consacré à l'étude de la métrique d'une multiplicité à n dimensions est l'exposé le plus clair, que nous connaissions, de la théorie de la forme quadratique, du calcul différentiel absolu et de leurs applications géométriques. L'auteur n'a pas négligé de donner à côté de la théorie générale quelques applications à des cas particuliers spécialement intéressants.

La seconde partie traite de « La relativité restreinte ». La transformation de Lorentz est introduite de plusieurs manières et le côté cinématique de la question nous paraît être spécialement approfondi.

Enfin dans la troisième partie « La théorie générale de la relativité », après avoir établi les équations du champ de gravitation, l'auteur expose d'une manière détaillée la statique d'Einstein et ses applications astronomiques, au déplacement du périhélie et à la déviation des rayons lumineux dans un champ gravifique.

La lecture de ce livre nous laisse l'impression d'un chapitre classique d'analyse ou de mécanique; c'est peut-être par sa simplicité, sa clarté et son élégance. Rolin WAVRE (Genève).

Louis ROY. — **Cours de Mécanique rationnelle** à l'usage des élèves de l'Institut électrotechnique et de Mécanique appliquée et des candidats au Certificat de Mathématiques générales. — 1 vol. gr. in-8° de VI-260 pages et 103 figures; Prix 25 fr.; ,Gauthier-Villars et Cie, Paris, 1921.

A une époque où le monde savant est surtout tourné vers une Mécanique de seconde approximation, c'est presque un travail redoutable que d'expo-

ser la science de première approximation qui vraisemblablement continuera à être celle des ingénieurs et techniciens de toutes sortes; il devient difficile d'être correctement élémentaire. C'est cette difficulté que M. Louis Roy vient de surmonter, non sans élégance, en mettant très explicitement en évidence les principes de la Mécanique et plus particulièrement les postulats de la Dynamique classique.

Les chapitres préliminaires sont d'une grande simplicité; c'est en *discutant* la réduction des systèmes de vecteurs que l'auteur parvient, naturellement, à la notion de l'*axe central* lequel, dans le cas de vecteurs parallèles, contient effectivement un *centre* G.

Après les définitions concernant la vitesse et l'accélération voici des problèmes sur les lois du mouvement. Les méthodes graphiques sont immédiatement mises en honneur et l'accélération constante en grandeur et en direction nous conduit à un premier aperçu du mouvement parabolique.

La cinématique du solide contient le théorème de Coriolis appliqué d'ailleurs au mouvement de la terre; la combinaison des translations et rotations aboutit au mouvement hélicoïdal et à la transmission des rotations par l'hyperboloïde. Cette partie se termine par l'étude du mouvement d'une figure plane dans son plan et l'indication sommaire des considérations si esthétiques attachées à la notion de centre instantané.

Mais c'est avec les principes de la Dynamique que M. Louis Roy révèle sans doute le maximum d'originalité. Il admet six postulats dont il faut surtout souligner le deuxième: *Une force est une grandeur vectorielle pouvant être considérée indépendamment de toute accélération* et aussi le sixième: *Si les composantes de la force appliquée à un point matériel sont des fonctions régulières des variables dont elles dépendent, le mouvement du point est déterminé sans ambiguité par les conditions initiales.* Et, dans le cas où la régularité taylorienne n'existe pas, par exemple, dans le cas de l'équation $mx'' = k\sqrt{x}$, correspondant à un point d'abscisse x placé en 0 sans vitesse, on est indifféremment en présence d'un équilibre en 0 ou d'un mouvement suivant $0x$. L'aperçu est bref et élémentaire, mais on peut penser qu'en développant de telles considérations on reviendrait de manière fort utile sur les questions de stabilité statique ou dynamique ainsi que sur celles concernant les singularités des équations différentielles. Certes, de tels sujets ont déjà une littérature immense; mais il ne semble pas impossible de les rajeunir de manière intéressante.

Passons rapidement sur l'étude des mouvements ponctuels simples. La notion de travail est présentée avec développements numériques; il en est de même pour celle de frottement associée d'ailleurs à celle de liaison.

La dynamique des systèmes de points, sous l'influence des postulats précédemment mis en évidence, n'a plus que des formules simples et symétriques. Les centres de gravité et les moments d'inertie préparent l'étude du solide dont nous abordons bientôt la statique; la réduction des forces y appliquées permet d'apprécier pleinement les notions vectorielles du début. D'élégants problèmes d'équilibre, avec ou sans frottement, permettent aussi d'apercevoir aisément les rôles respectifs des projections ou des moments des forces. Voici maintenant la notion de travail virtuel introduite avec précaution mais avec l'exemple des machines simples dont la théorie est ainsi plus immédiate. Des exercices appropriés montrent les possibles variations de raisonnement dont un calculateur habile saura promptement tirer le procédé le plus expéditif.

Dans le mouvement d'un solide autour d'un axe fixe, nous trouvons, au delà du pendule composé et de la machine d'Atwood, le galvanomètre à cadre mobile et surtout les si importants phénomènes de résonance qui accompagnent généralement les phénomènes oscillatoires.

Un chapitre sur les percussions et chocs, un autre sur l'équilibre des fils, terminent heureusement cet exposé clair et pratique qui peut être considéré, à coup sûr, comme une excellente introduction soit à des études techniques, soit à des études théoriques à continuer dans le grand Traité de M. P. Appell.

A. Buhl (Toulouse).

Leonida Tonelli. — **Fondamenti di calcolo delle variazioni.** Volume primo. — 1 vol. in-8°, VII + 466 p., 55 L.; Nicola Zanichelli Editore, Bologna, 1922.

Certains lecteurs seront certes étonnés d'apprendre que l'on entreprend aujourd'hui de remanier les fondements d'une partie aussi classique de l'analyse, que le calcul des variations et que cette entreprise est tout à fait à l'ordre du jour.

A la suite des recherches faites sur les ensembles de points et la fonction sommatoire de M. Lebesque, des études de M. Baire et de leurs continuateurs, à la suite aussi des études des ensembles de fonctions, de courbes et des fonctions de lignes, qui constituent l'objet propre du calcul fonctionnel. le calcul des variations change un peu d'aspect et ces nouvelles disciplines permettent de résoudre, par des méthodes directes, certains problèmes d'extrêmum devant lesquels les méthodes classiques seraient restées impuissantes.

On peut aller plus loin encore et dire que le calcul des variations est tout entier absorbé par le calcul fonctionnel dont les premiers principes ont été posés par M. Volterra. Le calcul fonctionnel est avant tout un point de vue nouveau, qui permettra peut-être de créer un jour le plus puissant instrument de l'analyse.

M. Hadamard, en 1910 déjà, avait écrit son premier tome de Calcul des variations en s'inspirant de cet esprit nouveau. Mais les résultats se sont accumulés depuis lors, les notions fondamentales et profondes se sont dégagées et M. Tonelli rend aujourd'hui un grand service à la science en réunissant en un volume toutes les notions d'origine récente qui permettent d'asseoir le calcul des variations sur de nouvelles bases. Parmi celles-ci, je ne citerai que la théorie de l'intégrale de Lebesque, la notion de semi-continuité de M. Baire et l'étude des ensembles de fonctions. MM. Lebesgue et Baire n'avaient certainement pas en vue le calcul des variations en entreprenant leurs recherches sur les ensembles linéaires, les fonctions discontinues, et l'intégrale; mais on sait que depuis lors des applications des plus variées en ont montré la profondeur.

La contribution de M. Tonelli est déjà grande aussi. On trouvera également dans ce livre un historique fort intéressant du calcul des variations (p. 1-33). Ce premier volume sera suivi d'un second, contenant l'application des notions dont je viens de parler, à la résolution des problèmes d'extrêmum libre et des problèmes isopérimétriques.

Contentons-nous de signaler ici l'importance de ce livre dont l'analyse nous entraînerait trop loin.

Rolin Wavre (Genève).

H. Weyl. — **Temps, Espace, Matière.** Leçons sur la théorie de la relativité générale, traduites sur la quatrième édition allemande par M. Gustave Juvet et M. Robert Leroy. — 1 vol. in-8° VIII + 288 p.; 20 fr. français; Librairie scientifique Albert Blanchard, place de la Sorbonne, Paris, 1922.

Divers domaines des mathématiques doivent à la pénétration d'esprit de M. Weyl, quelques-uns de leurs plus beaux résultats, ou des critiques d'une remarquable profondeur. Je ne citerai que la théorie des équations intégrales, la géométrie des surfaces, la physique mathématique, les notions de continu et d'ensemble.

Le mouvement scientifique issu des idées d'Einstein rencontra en lui, non seulement un fervent adepte, mais encore le plus audacieux promoteur et son œuvre en relativité est après celle d'Einstein la plus importante. *M. Weyl a cherché à donner à la conception relativiste toute son ampleur et son livre est aujourd'hui l'ouvrage le plus important, le plus suggestif et le plus complet que nous possédions sur la relativité.* Je devrais me contenter de donner ici une idée générale, de ce qui fait l'originalité de cette œuvre, sans songer à en faire l'analyse.

La première édition, parue en 1918, était la rédaction d'un cours professé par l'auteur à l'Ecole polytechnique fédérale de Zurich en 1917. La quatrième édition traduite est beaucoup plus étendue.

Disons tout de suite que sa lecture exige des connaissances mathématiques très vastes et que, à part quelques pages, il nous paraît s'adresser plutôt aux initiés qu'aux débutants. Ce livre est remarquablement touffu dans son ensemble et certains chapitres sont loin de revêtir la forme didactique d'un traité d'enseignement. Ajoutons, pour en finir avec les critiques, que sur certains points les investigations de l'auteur sont si audacieuses qu'il est permis, de ne pas le suivre partout et certaines des idées qu'il expose revêtent un caractère très conjectural, aujourd'hui tout au moins. Le sens exact, qu'il faut attribuer aux idées philosophiques exposées dans la préface, pourrait servir, à lui seul, de thème à de profondes méditations.

Mais, ce qui en fait l'incomparable beauté, c'est la richesse des idées qui y sont développées, les horizons illimités qu'il laisse entrevoir, la lueur qu'il projette sur quelques champs inexplorés de la science.

C'est la préoccupation d'un esprit systématique qui en crée la remarquable unité.

Physiciens, mathématiciens et philosophes y trouveront à côté des résultats déjà cristallisés des théories d'Einstein, l'esquisse la plus profonde de la synthèse scientifique que l'on puisse entrevoir aujourd'hui.

Dans les deux premiers chapitres, consacrés à la représentation mathématique de l'espace, la géométrie euclidienne et le continuum métrique, M. Weyl tente de légitimer l'emploi de la forme quadratique fondamentale, dont la forme embryonnaire est celle de Pythagore, en s'inspirant de considérations très variées, notamment de la théorie des groupes. C'est la recherche d'une axiomatique plus large et plus compréhensive qu'il poursuit à chaque instant. Ces quelques 120 pages, nous paraissent être une des plus belles et des plus amples systématisations des géométries que nous connaissions.

Elles contiennent en plus une extension de la géométrie de Riemann, qui constitue à elle seule un résultat mathématique de la plus haute importance, dont on ne peut mesurer aujourd'hui la portée. Alors que dans la

géométrie de Riemann, un vecteur déplacé parallèlement à lui-même revient au point de départ, non nécessairement avec la même direction, mais toujours avec la même longueur, pourquoi ne pas admettre également un changement de longueur, se demande M. Weyl, qui en levant cette restriction est conduit à introduire à côté des coefficients de la forme riemannienne quatre coefficients d'une forme linéaire qui définissent l'étalonnage, c'est-à-dire la mesure des longueurs en chaque point de la multiplicité. Cette généralisation est conforme aux idées de Riemann en géométrie infinitésimale ou d'Einstein en physique, elle élimine toute détermination de direction et de longueur, qui ne se ferait pas de proche en proche, à la manière d'un prolongement analytique. Ceci étant, par une identification de ces quatre indéterminées avec les composantes du potentiel électro-magnétique, M. Weyl fait du champ électromagnétique, qui constituait chez Einstein un résidu matériel irréductible, un élément caractérisant l'espace, au même titre, quoique d'une manière différente, que le champ de gravitation.

Dans les deux derniers chapitres consacrés à la théorie de la relativité, signalons en particulier les développements que M. Weyl donne à la théorie de Mie, au terme desquels la matière apparaît comme une singularité du champ, les considérations un peu hypothétiques sur l'univers considéré dans sa totalité, et spécialement les pages consacrées aux lois de conservations, à leurs conséquences, au principe d'action le plus simple, dont l'interprétation philosophique, quoiqu'encore fort discutable, pourrait être du plus haut intérêt.

Si nous admirons Einstein qui conçut, dans une intuition géniale de physicien, l'équivalence du champ de gravitation et du mouvement, avant de trouver, dans la géométrie de Riemann, sa parfaite expression, sachons admirer aussi cette étude où sans jamais abandonner l'instrument mathématique, M. Weyl recherche une synthèse que les physiciens n'oseraient imaginer.

Son livre, sous lequel on pressent une constante préoccupation philosophique, constitue l'œuvre la plus profonde que nous possédions aujourd'hui sur le temps, l'espace et la matière.

Félicitons aussi MM. Juvet et Leroy de nous l'avoir rendu plus accessible. L'ouvrage comprend une bibliographie des matières dont il traite.

Rolin Wavre (Genève).

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

1. Livres nouveaux :

Tous les ouvrages adressés à la Rédaction sont signalés ici avec une brève indication de leur contenu, sans préjudice de l'analyse dont ils peuvent être ultérieurement l'objet sous la rubrique « Bibliographie ».

Annuaire du Bureau des Longitudes pour l'année 1922. — Avec notices scientifiques. — 1 vol. in-16 de plus de 900 pages; 6 fr. ; Gauthier-Villars et Cie, Paris.

Toujours très apprécié par les nombreux documents qu'il contient. cet excellent recueil renferme cette fois, après le calendrier et les données astronomiques, des tableaux relatifs aux *Poids et Mesures* et à la Physique et à la Chimie. Parmi les Notices, signalons celle de M. E. Picard, *La théorie de la relativité et ses applications à l'astronomie* et celle de M. Ch. Lallemand. *Monnaies et change.*

L. Berzolari. — **Geometria analitica.** II. — Curve e superficie del secondo ordine, Seconda edizione riveduta ed ampliata con 22 incisioni (Manuali Hœpli). — 1 vol. in-16, de 474 p.; Lire 18; Ulrico Hœpli, Milan.

Deuxième édition revue et augmentée du t. II du traité de Géométrie analytique de M. Berzolari. Ce volume est entièrement consacré à la théorie des courbes et des surfaces du 2me ordre.

L. Bieberbach. — **Differential und Integralrechnung.** Band I. — Differentialrechnung. (Teubners technische Leitfäden) zweite vermehrte und verbesserte Auflage mit 34 Figuren im Text. — 1 vol. in-16, fr. 2,90; B. G. Teubner, Leipzig.

L. Bieberbach. — **Funktionentheorie** (Teubners technische Leitfäden). — 1 vol. in-8°, de 118 p., avec 34 fig.; broché fr. 4,80; B. G. Teubner, Leipzig.

La nouvelle collection publiée sous le titre « Teubners technische Leitfäden » obtient un succès bien mérité. Elle vient de s'enrichir d'un volume destiné à fournir une première introduction à la théorie des fonctions analytiques, accompagnée de nombreux exemples. Ce livre fait suite au calcul différentiel et intégral dont le tome I vient de paraître en 2me édition revue et augmentée.

H. Bieri. — **Lehrbuch der Lebensversicherung** zum Gebrauche an Handel schulen, Gymnasien und Seminarien, sowie zum Selbstunterricht für Studierende des Versicherungswesens, Juristen und Lehramtskandidaten. Mit einem Anhang gelöster Maturitätsaufgaben. Mit 6 Figuren im Text und 6 Tabellen. — 1 vol. in-8° de 118 p.; fr. 4; Stämpfli et Cie, Berne.

Cette introduction à la théorie des assurances sur la vie est destinée

aux Ecoles de commerce et à l'enseignement moyen. Mais elle sera aussi lue avec profit par tous ceux qui désirent acquérir les notions essentielles de cette théorie.

W. Blaschke. — **Vorlesungen über Differentialgeometrie** und geometrische Grundlagen von Einsteins Relativitätstheorie. I. *Elementare Differentialgeometrie.* (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete, Band I). — 1 vol. in-8° de 230 p., avec 38 fig.; de 69 M.; M. J. Springer, Berlin.

Ces leçons de Géométrie infinitésimale comprendront trois volumes, conçus à un point de vue tout à fait moderne. Elles sont destinées à initier l'étudiant aux fondements géométriques de la théorie de la relativité. Ce premier volume est consacré aux éléments de la Géométrie infinitésimale.

L. Bloch. — **Le principe de la relativité et la théorie d'Einstein.** (Bibliothèque des Annales des Postes, Télégraphes et Téléphones). — 1 vol. in-8° de 42 p.; Fr. 3,50; Gauthier-Villars et Cie, Paris.

Dans cet exposé, l'auteur se place exclusivement au point de vue de la suite des idées et il fait comprendre clairement l'évolution suivie par la Théorie de la Relativité depuis Lorentz jusqu'à Einstein.

Ce livre vient à son heure, il sera lu par tous les esprits de culture scientifique, que choque l'exposé trop élémentaire de certains ouvrages de vulgarisation, mais que décourage l'appareil trop exclusivement mathématique de certains ouvrages de haute science.

E. Cartan. — **Leçons sur les invariants intégraux.** (Cours professé à la Faculté des Sciences de Paris). — 1 vol. in-8° de 210 p.; Fr. 20; Librairie scientifique, Hermann, Paris.

Cet ouvrage est la reproduction d'un cours sur la théorie des invariants intégraux fondée par H. Poincaré et à laquelle l'auteur a lui-même fourni d'importantes contributions.

Général Chapel. — **Ether - Electricité - Relativisme.** — 1 vol. in-8° de 40 p.; Fr. 2,50; Gauthier-Villars et Cie, Paris.

Le fascicule reproduit le texte d'une conférence faite à Paris, le 22 mars 1922, au Conservatoire des Arts et Métiers. Le Général Chapel oppose aux idées d'Einstein une thèse franchement antagoniste à laquelle il a été amené par des études bien connues sur le rôle de l'électricité dans les accidents par inflammation spontanée ou par explosion. Selon l'auteur, toutes les grandes manifestations de l'énergie s'expliquent en substituant à l'éther amorphe, inerte, conçu par les Relativistes, un éther matériel, pesant, cinétique, qui n'est autre chose d'ailleurs que ce que l'on appelle depuis des siècles : *fluide électrique, électricité.*

E. Dintzl et C. Vaselli. — **Aufgaben aus der reinen und angewandten Mathematik.** Erster Band. — 1 vol. in-8° de 215 p., avec 89 fig.; broché 150 marks; Carl Gerold's Sohn Leipzig u. Wien.

Recueil de problèmes destiné aux élèves des classes supérieures de l'enseignement secondaire. Ce premier volume, consacré à l'algèbre et à la géométrie, contient notamment des exercices sur les notions de fonctions, de dérivée et d'intégrale, sur les transformations géométriques, sur la notion

de groupes de permutations, sur la théorie des nombres et sur les sections coniques.

E. Esclangon. — **Les preuves astronomiques de la relativité.** — 1 vol. in-8°, de 27 p.; Gauthier-Villars et Cie, Paris.

Dans cet ouvrage, M. Esclangon, directeur de l'Observatoire de Strasbourg, montre combien sont délicates des observations où des quantités à mesurer sont du même ordre de grandeur que les erreurs de mesure. Il montre ensuite la part considérable qui est laissée à l'interprétation des résultats rendant indécises et encore incertaines les conclusions qu'on peut en tirer.

L'auteur conclut que l'assurance avec laquelle est généralement présentée la confirmation astronomique des théories relativistes est encore à l'heure actuelle injustifiée. Il considère toutefois que la question pourra être tranchée dans un prochain avenir.

E. Goursat.— **Leçons sur le problème de Pfaff.**— 1 vol. in-8°, de 386 p.; Fr. 30; Librairie Scientifique J. Hermann, Paris.

Cet ouvrage vient compléter ceux que M. Goursat a déjà publiés sur les équations aux dérivées partielles du premier et du second ordre. L'auteur expose les méthodes fondées sur les propriétés du co-variant bilinéaire considéré d'abord par Frobenius et par G. Darboux. Il étudie ensuite les propriétés des formes symboliques de différentielles (formes extérieures de M. Cartan) et leur application au problème de Pfaff lui-même et à la théorie des invariants intégraux.

O. Groll.— **Kartenkunde.** Zweite Auflage neubearbeitet von Dr. O Graf. — I. *Die Projektionen.* Mit 56 Abbildungen im Text und auf Tafeln. (Sammlung Göschen). — 1 vol. in-16 de 116 p.; Fr. 1,50; Vereinigung wissenschaftlicher Verleger, Walter de Gruyter & Co, Berlin.

Exposé élémentaire des principaux systèmes de projection en usage pour la représentation des cartes géographiques.

F. Heiland. — **Sammlung von Aufgaben aus der ebenen und sphärischen Trigonometrie.** (Sammlung Göschen Nr. 848). — 1 vol. in-16 de 152 p., 26 fig.,; Fr. 1,50; Vereinigung wissenschaftlicher Verleger, Walter de Gruyter & Co, Berlin.

Ce recueil d'exercices de Trigonométrie plane et sphérique contient de nombreux exemples numériques et des problèmes empruntés à la Géométrie, aux sciences physiques, à la minéralogie, à la cosmographie et à l'astronomie.

A. Karbowiak. — **Bibljografja Pedagogiczna,** — 1 vol. in-8° de 340 p.; Lwow; Warszawa, 1920.

Ce recueil bibliographique fournit les titres des travaux sur les sciences de l'éducation parus en Pologne de 1901 à 1910 ou relatifs à ce pays. Un chapitre est consacré aux mathématiques.

K. Knopp. — **Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen.** (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete, Band II). — 1 vol. in-8° de x-474 p., avec 12 fig., 168 M.; J. Springer, Berlin.

Etude approfondie de la théorie des séries infinies et de leurs applications,

accompagnée de plus de 200 exercices. — Nombres réels et suites de nombres. Les bases de la théorie des séries ; séries à termes positifs ; séries à termes variables ; séries entières ; produits infinis ; séries à termes complexes ; fonctions analytiques. Séries divergentes.

E.-M. LEMERAY. — **L'éther actuel et ses précurseurs** (simple récit). Préface de M. E.-M. Lecornu. (Actualités scientifiques.) — 1 vol. in-16 de 135 p.. Gauthier-Villars & Cie, Paris.

Ecrit dans un style accessible à tous, et duquel toute formule mathématique est exclue, ce livre résulte d'une longue et patiente documentation sur l'histoire des sciences ; l'auteur a dû exposer une partie essentielle de la synthèse des Anciens, encore si mal comprise ; ce chapitre constitue peut-être la partie la plus attachante de son œuvre, celle aussi qui contribuera le plus efficacement à faire germer le doute sur l'existence de l'éther.

Cet ouvrage n'intéresse pas seulement les philosophes et les physiciens, mais encore ceux qui s'occupent de l'histoire des sciences.

T. LEVI-CIVITA. — **Questions de Mecànica clàssica i relat vista.** — 1 vol. in-8°, 151 p. : 3 Ptes ; Institut d'Estudis catalans, seccio de ciencies, Barcelone.

Ce petit volume reproduit les quatre conférences faites à Barcelone, en 1921, par M. T. Levi-Civita, professeur à l'Université de Rome, sur des questions de mécanique classique et la théorie de la relativité.

M. LINDOW. — **Differentialgleichungen** unter Berücksichtigung der praktischen Anwendung in der Technik mit zahlreichen Beispielen und Aufgaben versehen. (Aus Natur und Geisteswelt) 589. Band. — 1 vol. in-16, de 106 p., avec 38 fig. et 160 exercices ; Fr. 2 ; B. G. Teubner, Leipzig.

Faisant suite aux notions de calcul différentiel et intégral du même auteur ce volume contient une introduction à la résolution des équations différentielles avec de nombreux exercices empruntés à la Géométrie et aux sciences techniques.

A. MAC LEOD. — **Introduction à la géométrie non-euclidienne.** — 1 vol. in-8° de 433 p., avec une planche ; Fr. 20 ; Librairie Scientifique J. Hermann, Paris.

L'auteur expose d'une façon élémentaire les principes de la Géométrie non-euclidienne. Parmi les nombreuses méthodes qu'on peut suivre par un pareil exposé, il a donné la préférence à celle que suit M. J. L. Coolidge, dans ses « Elements of non-euclidean geometry » (Oxford 1909) dont les démonstrations ont été revues et complétées par M Mac Leod.

G. MIE. — **La théorie einsteinienne de la gravitation,** essai de vulgarisation de la théorie. — 1 vol. in-12 de 140 p. et 5 fig. ; Fr. 4,50 ; Hermann, Paris.

Ces quelques pages où l'auteur s'est interdit de faire entrer le moindre symbole mathématique, constituent non pas un exposé banal d'une théorie que tout le monde croit connaître, mais un ensemble de vues originales décrites dans un style précis et clair et tout à fait propres à faire saisir dans ses grandes lignes la théorie einsteinienne de la gravitation à ceux qui ne la connaissent pas encore.

P. Mordell. — **The origin of letters and numerals** according to the Sefer Yetzirah. — 1 vol. in-8°, de 71 p.; Philadelphie.

Contribution à l'étude de l'origine des lettres et des nombres basée sur des documents hébreux, notamment le Sefer Yetzirah.

Branislav Petronievics. — **L'évolution universelle.** Exposé des preuves et des lois de l'évolution mondiale et des évolutions particulières (inorganique, organique, intellectuelle et sociale). L'évolution mondiale, inorganique et organique. — 1 vol. in-8°, avec 3 fig. et 1 tableau dans le texte, de 212 p.; Fr. 7,50; Félix Alcan, Paris.

Dédié à la mémoire de Gaston Milhaud, cet ouvrage est à la fois une œuvre d'exposition et de synthèse scientifique. Il donne un exposé clair des principaux faits de l'évolution universelle. Le savant y trouvera une argumentation serrée pour la vérité de ces faits et le métaphysicien une critique serrée de cette argumentation.

I. Les bases générales de l'évolution. — II. L'évolution inorganique. Système solaire et système stellaire. — III. L'évolution organique.

Michel Petrovitch. — **Notice sur ses travaux scientifiques** (1894-1921), publiée par les soins de l'Académie royale de Serbie. — 1 vol. in-8° de 150 p. Gauthier-Villars & Cie, Paris.

Désirant donner plus de publicité à ses travaux rédigés en langue serbe, l'Académie royale de Serbie a décidé de publier les résumés des mémoires scientifiques parus dans ses recueils ou sous ses auspices. Le présent volume donne un résumé analytique de l'ensemble des travaux du savant mathématicien M. Michel Petrovitch, bien connu des lecteurs de cette Revue. Il est divisé en six parties : Algèbre. — Intégrales définies. — Théorie des fonctions. — Equations différentielles. — Phénoménologie générale. — Recherches diverses.

N. M. Poppovich. — **Die Lehre vom diskreten Raum** in der neueren Philosophie. — 1 vol. in-8°, de 89 p., avec 9 fig.; W. Braumüller, Universitäts-Verlagsbuchhändler, Vienne et Leipzig.

Etude du problème de l'espace dans la philosophie moderne. L'influence de Chr. Wolff et de ses successeurs. Le finitisme. L'Ecole anglaise. Le point de vue de Petronievics.

E. Picard. — **La théorie de la relativité et ses applications à l'Astronomie.** — 1 vol. in-16, de 27 p.; Gauthier-Villars, Paris.

Dans ce petit livre, l'éminent Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences se propose de tracer une esquisse historique et critique de la théorie moderne de la Relativité en vue d'en indiquer les applications à l'Astronomie. Tout en se demandant si c'est un progrès que de ramener la Physique à la Géométrie, l'auteur rend hommage à l'effort accompli par Einstein dans son audacieuse tentative.

M. Schips. — **Mathematik und Biologie** (Mathematisch-physikalische Bibliothek) Band 42. — 1 vol. in-16 de 52 p., avec 16 fig.; broché, Fr. 1,20; B. G. Teubner, Leipzig.

Ce petit volume, consacré aux mathématiques dans leurs rapports avec la biologie, se limite aux questions concernant la morphologie (relations

métriques; symétrie) et l'anatomie et la physiologie. Les problèmes relatifs à la théorie des variations et de l'hérédité ont déjà fait l'objet d'un précédent volume (N° 24, par M. Riebesell).

H. SCHMIDT. — **La prima conoscenza della relatività dell' Einstein alla portata di tutti.** Seconda edizione italiana a cura di T. BEMBO e R. CONTU. (Manuali Hœpli). — 1 vol. in-16 de 206 p. et 12 fig.; 10 L.; U. Hœpli, Milan.

Nouvelle édition revue et augmentée de l'ouvrage intitulé « Das Weltbild der Relativitätstheorie. Allgemein verständliche Einführung in die Einsteinsche Lehre von Raum und Zeit. » (Introduction élémentaire à la théorie einsteinienne de l'espace et du temps).

Tadeusz SIERPUTOWSKI. — **Elementarz Rachunkowy**, Czesc I, (Pierwszy Rok Nauki). — 1 fasc. in-8°, 36 p.; Varsovie, 1922.

Manuel de calcul destiné à la première année de l'enseignement primaire.

H. E. TIMERDING. — **Repertorium der höheren Mathematik,** zweite völlig umgearbeitete Auflage der deutschen Ausgabe, unter Mitwirkung zahlreicher Mathematiker. Zweiter Band: Geometrie. Zweite Hälfte: *Raumgeometrie*. — 1 vol. in-8° de XII-624 p., avec 12 fig.; broché, Fr. 15,20; B. G. Teubner, Leipzig.

Deuxième édition, considérablement augmentée, du volume consacré à la Géométrie. Elle contient un résumé des principales branches de la Géométrie des courbes gauches et des surfaces, des courbes et des surfaces algébriques, des transformations rationnelles de l'espace et de la Géométrie réglée. Ces monographies sont dues à MM. O. Staude, L. Berzolari, Fr. Severi, H. Timerding, K. Zindler et E. Salkowski.

Ch. TWEEDIE. — **James Stirling**, a Sketch of his Life and Works along with his scientific Correspondence. — 1 vol. in-8° de 213 p. ; 16 sh. net: Clarendon Press, Oxford.

Dans ce bel ouvrage, l'auteur présente une étude sur la vie et l'œuvre de James Stirling et reproduit la correspondance scientifique du savant mathématicien écossais.

Ch.-J. DE LA VALLÉE-POUSSIN. — **Cours d'Analyse infinitésimale.** — (Quatrième édition). — 2 vol. in-8° de 434 p. et 478 p.; A. Uystpruyst-Dieudonné, Louvain, et Gauthier-Villars & Cie, Paris, 1921 et 1922.

Nous nous bornons pour le moment à signaler cette nouvelle édition des cours d'analyse qui correspond aux leçons données par l'auteur à l'Université de Louvain. Cet excellent traité est appelé à rendre de grands services aux étudiants en mathématiques. Nous l'examinerons d'une manière plus approfondie dans un prochain numéro.

C. DE LA VALLÉE-POUSSIN. — **Introduccion a las teorias de conjuntos y de funciones,** conferencias. — 1 vol. in-8° de 109 p.; 5 pesetas; Madrid.

Traduction espagnole de huit conférences sur la théorie des ensembles et la théorie des fonctions, faites à la Faculté des Sciences de Madrid, en avril 1921, par le savant professeur de Louvain.

2. Publications périodiques :

The Mathematics Teacher. Volume XII. — W. S. Schlauch: An Experiment in Motivation. — E. R. Smith: Scales for the Study of Children's Characteristics. — W. E. Breckenridge: Applied Mathematics in High Schools: Some Lessons from the War.— E. Renshaw: A Junior High School Course in Mathematics. — E. J. Cuy: A Simple Method of Reconstructing a Hyperbolic Paraboloid. — H. E. Webb: Certain Undefined Elements and Tacit Assumptions in the First Book of Euclid's Elements. — Chas. F. Wheelock: Proposed Syllabus in Algebra. — H. B. Williams: Mathematics for the Physiologist and Physician. — R. C. Gillies: Love Mathematical. — L. E. Lynde: Some Helps and Hindrances in Teaching Mathematics in the Secondary Schools. — H. English: The Effect of Post-Armistice Conditions on Mathematical Courses and Methods. — Ch. H. Sampson: Teaching Practical Mathematics Efficiently.

Vol. XIII. — E. R. Breslich: The Teaching of Verbal Problems. — M. E. Davis: The Teaching of Mathematics in the Junior High Schools. — Wilmer Souder: The Metric System: Its Relation to Mathematics and Industry. — J. T. Rorer: Educational Opportunity in the Army of Occupation. — R. R. Goff: The Outline Method in Mathematics. — F. Cajori: Greek Philosophers on the Disciplinary Value of Mathematics.

Vol. XIV. — C. M. Austin: The National Council. — J. W. Young: Progress of the National Committee. — C. B. Walsh: The Junior High School Report: A Discussion. — M. J. Newell, G. A. Harper: First Lessons in Demonstrative Geometry. — G. W. Myers: Outstanding Pedagogical Principles now Functioning in High Schools Mathematics. — J. C. Brown: The Geometry of the Junior High School. — H. P. McLaughlin: Algebraic Magic Squares. — W. P. Webber: The Outlook with Regard to School Mathematics. — W. E. Breckenridge: Mathematics in Stuyvesant High Schools. — J. K. van Denberg: Articulation of Junior and Senior High School Mathematics.

Mémoires de la Société helvétique des Sciences naturelles. Vol. 57, mém. 2. — A. Kienast: Untersuchungen über die Lösungen der Differentialgleichung $xy'' + (\gamma - x)\, y' - \beta y = 0$. (85 pages in 4°).

Nouvelles Annales de Mathématiques. Tome XX. — M. Frechet: Sur un défaut de la méthode d'interpolation de Lagrange. — R. Garnier: Deux notes de géométrie vectorielle. — G. Valiron: Sur le maximum et le minimum des fonctions de deux variables. — E. Goursat: Sur une classe d'équations différentielles qui admettent des intégrales singulières.—J. Haag: Sur l'application de la loi de Gauss à la position probable d'un point dans le plan ou dans l'espace. — V. Thebault: Sur les polygones harmoniques d'un nombre pair de côtés et sur certains cercles du triangle. — R. Bricard: Sur un système remarquable de cinq droites. — V. Thebault: Sur les contacts des sphères tangentes à quatre plans. — T. Lemoyne: Lieu des foyers ordinaires de courbes algébriques d'un faisceau tangentiel ou ponctuel. — R. Harmegnies: Sur une propriété caractéristique du cylindre et du cylindroïde. — N. Altshiller-Court: Sur la cubique à point double. — J.-A. Moren: Sur certaines relations qui existent entre l'épicycloïde et l'hypocycloïde à trois rebroussements. — M. d'Ocagne: Simple remarque

sur la cyclide de Dupin. — Cl. Servais: Un théorème général sur les complexes. — T. Lemoyne: Sur un théorème de Cornu relatif aux caustiques. — R. Goormaghtigh: Sur les tangentes aux trajectoires des sommets d'un triangle qui se déforme dans un plan. — G. Fontene: Rayon de courbure de la courbe qui est le lieu des centres des sphères osculatrices à une courbe gauche. — Id.: Courbes gauches liées par échange des tangentes et des binormales. Les formules de Frenet sont intuitives. — M. d'Ocagne: Equation angulaire d'un conoïde droit. Application au cylindroïde envisagé dans ses rapports avec la distribution des courbures autour d'un point d'une surface. — M. Bayard: Note sur les congruences d'une normale. — R. Harmegnies: Sur la surface dont tous les points sont des ombilics. — B. Gambier: Surfaces de translation applicables l'une sur l'autre. — Id.: Etude des surfaces de translation de Sophus Lie. — M. d'Ocagne: Transformation polaire interaxiale. — A. Leveque: Démonstration géométrique du théorème de Liouville sur le groupe isogonal de transformations dans l'espace. — L. Pomey: Note géométrique sur une généralisation du théorème de composition des vitesses et le théorème de Coriolis. — R. Bricard: Sur des systèmes articulés. — Et. Delassus: Exposé élémentaire d'une théorie rigoureuse des liaisons finies unilatérales. — Id.: Considérations sur le frottement de glissement. — R. Bricard: Charles-Ange Laisant (1841-1920).

Proceedings of the London Mathematical Society. Vol. 19. — K. Ananda-Rau: Of Lambert's Series. — G. H. Hardy and J.-E. Littlewood: On a Tauberian Theorem for Lambert's Series and some Fundamental Theorems in the analytic Theory of Numbers. — T. W. Chaundy: The Aberrations of a Symmetrical Optical System. — G. A. Miller: Groups involving three, and only three, Operators which are Square. — T. S. Broderick: On the Product of Semi-Convergent Series. — P. A. Mac Mahon: Divisors of Numbers and their Continuations in the Theory of Partitions. — K. Ananda-Rau: Note on Property of Dirichlets Series. — W. H. Young: On the Triangulation Method of Defining the Area of a Surface. — W. E. H. Berwick: The Complex Multiplication of Weierstrassian Elliptic Functions. — J. Larmor: On the Mathematical Expression of the Principle of Huygens, II. — Norbert Wiener: A New Theory of Measurement, a Study in the Logic of Mathematics. — D. Riabouchinsky: On Steady Fluid Motions with Free Surfaces. — P. A. Mac Mahon: Permutation, Lattice Permutations and the Hypergeometric Series. — C. V. Hanumanta Rao: Some Considerations on the General Theory of Ruled Surfaces. — G. N. Watson: The Zeros of Lommel's Polynomials. — H. Steinhaus: On Fourier's Coefficients of Bounded Functions. — E. Landau and A. Ostrowski: On the Diophantine Equation $ay^2+by+c=dx^n$. — G. F. S. Hills: A Multiple Integral of Importance in the Theory of Statistics. — G. S. Le Beau: A Property of Polynomials whose Roots are real. — E. G. C. Poole: A Point in the Dynamical Theory of the Tides. — P. A. Mac Mahon: The Divisors of Numbers. — S. Chapman and G. H. Livens: The Influence of Diffusion in the Propagation of Sound Waves in air. — H. B. C. Darling: Proofs of Certain Identities and Congruences enunciated by S. Ramanujan. — A. C. Dixon: The Theory of a Thin Elastic Plate, bounded by two Circular Arcs and clamped. — L. J. Rogers: On a Type of Modular Relation. — F. B. Pidduck: Functions of Limiting Matrices.

Rendiconti del Circolo matematico di Palermo. Tome XLIII. — G. Fubini: Fondamenti di Geometria proiettivo-differenziale. — C. Bonomi: Le superficie iperellittiche con fasci ellittici di curve ellittiche. — V. Strazzeri: Sulle superficie che ammettono un sistema di linee di curvatura piane. — F. Gerbaldi: Le frazioni continue di Halphen in relazione colle corrispondenze (2,2) involutorie e coi poligoni di Poncelet. — P. Nalli: Sulla rappresentazione di una funzione simmetrica $K(s,t)$ e dell' esprezione $k(s)\, g(s) + \int_a^b K(s,t)\, g(r)\, dt$. — E. Ragazzi: Un teorema sulle trasformazioni delle superficie di Guichard. — C. Mineo: Un teorema sulle linee d' equidistanza obliqua da una data curva, sopra una superficie. — F. Sibirani: Sulle superficie che contengono un sistema ∞^1 di curve prefissate. — R. Garnier: Sur une classe de systèmes différentiels abéliens déduits de la théorie des équations linéaires. — A. Palatini: Sui fondamenti del calcolo differenziale assoluto. — A. Palatini: Deduzione invariantiva delle equazioni gravitazionali dal principo di Hamilton. — G. Scorza: Sulle varietà abeliane contenenti congruenze abeliane. — M. Picone: Sul teorema di Green nel piano e mello spazio. — G. Valiron: Sur les zéros des fonctions entières d'ordre fini. — G. Marletta: Sistemi lineari d' omografie che sono gruppi. — V. Strazzeri: Sullo sviluppo dei determinanti. — A. Signorini: Un teorema di confronto in balistica esterna et alcune sue applicazioni.

Tome XLIV. — P. Mazzoni: Ricerche sulla teoria delle equazioni algebriche secondo Galois. — N. Sakellariou: The space problem of the Calculus of Variations. — M. Lecat: Sur la décomposition des pénédéterminants et déterminants. — E. Landau et A. Walfisz: Ueber die Nichtfortsetzbarkeit einiger durch Dirichletsche Reihen definierter Funktionen. — H. Hancook: The foundations of the Elliptic Functions. — L. Baeri: Sulle equazioni integro-differenziali. — C. Segre: I connessi bilineari alternati di coppie di rette. — L. Tonelli: La semicontinuita nel calcolo delle Variazioni. — G. Valiron: Sur les zéros des fonctions entières d'ordre fini. — A. Baruch: Ueber vierfach hyperboloide Tetraeder. — G. Andreoli: Sul moto di un punto abbandonato nell' interno di un cilindro circolare retto. — C. Rosati: Intorno alle corrispondenze simmetriche singolari sopra una curva di genere 2. — T. Hayashi: On some Inequalities. — H. Hilton: On certain Types of Plane Algebraic Curve. — Id.: On d'Ocagne's Locus. — Id.: On König and Szücs's Construction.

La Revue de l'Enseignement des Sciences. 13me année, 1919. — L. Genillon: Sur la loi exponentielle d'erreur, les séries d'observations et la moyenne arithmétique dans les sciences physiques. — R. Bérard: Sur les ovales de Descartes. — R. Dontot: La préparation des jeunes filles aux carrières industrielles et commerciales. — J. Lemaire: Une propriété de la parabole. — Id.: Sur une surface du quatrième ordre. — J. Juhel-Renoy: Sur les systèmes de numération et le calcul des polynomes. — R. Massart: Des différents systèmes de numération. Propriétés des nombres dans ces divers systèmes. — *Mars-Avril.* — Th. Leconte: Sur un procédé de calcul et son application à la topographie. — Ch. Bioche: Sur les rayons de courbure et les normales polaires. — Amsler: La rotation et le quadrilatère inscriptible. — J. Lemaire: Sur l'égalité et la similitude

des figures en géométrie plane. — F. Meyer: A propos d'enveloppes. — J. Juhel-Renoy: Premières leçons de géométrie. — Id.: Sur les trièdres. — F. Meyer: Enveloppes de courbes et de surfaces à un paramètre. — P. Montel: Sur les fonctions linéairement distinctes. — A. Levy: Sur l'équation en nombres entiers $a^2 + b^2 = c^2$. — R. Dontot: Limite de $(1 + 1/x)^x$ pour x infini. — J. Juhel-Renoy: Questions de forme.

14me Année. — J. Angelloz-Pessey: Intersection d'une droite et d'une hyperbole. — Sur un procédé de Fermat. — R. Berard: Sur les ovales de Descartes. — Sur le développement d'un cône et les points d'inflexion de la transformée d'une courbe tracée sur le cône. — Sur la multiplication des séries. — Ch. Bioche: Sur les orbiformes. Sur certains trièdres. — G. Bouligand: A propos de la notion d'aire vectorielle d'un contour gauche. — R. Dontot: Propriétés focales des quartiques bicirculaires. — G. Fontene: Sur le sens de la variation d'une fonction. — Formules relatives à l'ellipse et à l'hyperbole. — P. Flamant: Première leçon sur les séries entières. — H. Girard: Résolution graphique de $a \cos x + b \sin x = c$. — Sur les sommes des puissances semblables des n premiers nombres entiers. — J. Juhel-Renoy: Sur le volume engendré par un triangle en tournant autour d'un axe. — Sur l'ensemble de deux équations et sur la fraction rationnelle du second degré. — Note de géométrie descriptive. — J. Lemaire: Perpendiculaire menée d'un point sur une droite. Polaire d'un point par rapport à un cercle. — A. Levy: Sur le calcul de π. — P. Lugol: Cloisons étanches. — R. Malloizel: Note de géométrie. — Sur deux théorèmes relatifs aux courbes planes algébriques et aux surfaces algébriques. — F. Meyer: La transformation apsidale et le problème de Monge. — Sur la représentation paramétrique d'une surface. — Ch. Michel: La fonction exponentielle et les fonctions circulaires. — Sur le trapèze harmonique. — Sur l'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants. — P. Montel: Sur la composition des vitesses et la composition des accélérations. — M. Stuyvaert: Elimination d'une inconnue entre plusieurs équations. — Examens et concours. — Bibliographie.

Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlischen Unterricht. 52. *Jahrgang* 1921. — K. Becker: Für und wider das abgekürzte Rechnen. — R. Böger: Die Möbiussche Form des Brechungsgesetzes. — J. E. Böttcher: Beweis des Tsabit für den pythagoreischen Lehrsatz. — E. Dintzl: Ueber ein Verfahren zur Verschaulichung der Konvergenz unendlicher Reihen. — H. Dörrie: Ueber einige Anwendungen des Satzes vom arithmetischen und geometrischen Mittel. — E. Fettweis: Die Mathematik des Lyzeums und Oberlyzeums. — A. Harnack: Zur Einführung des Integralbegriffes. — R. Hunger Anschauliche Beweise für den erweiterten pythagoreischen Lehrsatz. — E. Kamke. Zur Reform des mathematischen Hochschulunterrichts. — F. P. Liesegang: Ein Schaubild zur Darstellung der Zeit-Raum-Verhältnisse in der speziellen Relativitätstheorie. — W. Lorey: Das Prinzip der vollständigen Induktion. Seine Geschichte und Anwendung im mathematischen Unterricht.— H. Meurer: Direkte Herleitung des relativistischen Dopplerprinzips und der zeitlichen Lorentztransformation aus den nichtrelativistischen Gleichungen Dopplers. G. Polya: Anschaulich-experimentelle Herleitung der Gausschen Fehlerkurve. — A. Schönflies: Ein Weg zur Relativität für die Schule. — A.

A. Schülke: Graphische Behandlung der Zinsrechnung. — W. Schwan: Zur Theorie der komplexen Zahlen. — H. Teege: Ueber die Bestimmung der Mondentfernung durch Schweremessungen. — M. Winkelmann: Das Brechungsgesetz der Schichtlinien. — Kleine Mitteilungen. — Berichte. — Bücherbesprechungen. — Vermischtes.

Acta mathematica. Tome 38. — 1 vol. in-4, 402 p., avec un portrait de H. Poincaré, Alinquist et Wiksells, Stockholm. — Le présent volume des Acta Mathematica est entièrement consacré à Henri Poincaré. Il s'ouvre par un travail de Poincaré, unique en son genre dans le domaine des sciences mathématiques et qui a pour titre: « Analyse des travaux scientifiques de Henri Poincaré, faite par lui-même. » On y a joint une bibliographie aussi complète que possible des publications du savant géomètre (491 numéros). C'est sur la demande du directeur des Acta Mathematica, M. Mittag-Leffler, que H. Poincaré avait rédigé, en 1911, cette analyse qui comprend ses principaux ouvrages parus jusqu'à cette date.

La publication de ce volume a été retardée par suite de la guerre. — *Sommaire*: P. Appell: Henri Poincaré, en mathématiques spéciales à Nancy. — P. Boutroux: Lettre à M. Mittag-Leffler. — L. Fuchs: Briefe an H. Poincaré. — J. Hadamard: L'œuvre mathématique de Poincaré. — H. A. Lorenz: Deux mémoires de Henri Poincaré sur la physique mathématique. — P. Painlevé: Henri Poincaré. — Max Planck: Henri Poincaré und die Quantentheorie. — H. Poincaré: Analyse de ses travaux scientifiques: Rapport sur les travaux de M. Cartan. — Lettres à M. Mittag-Leffler. — Lettres à M. Mittag-Leffler concernant le mémoire couronné du prix de S. M. le Roi Oscar II. — Lettres à L. Fuchs. — W. Wien: Die Bedeutung Henri Poincarés für die Physik. — H. v. Zeipel: L'œuvre astronomique de Henri Poincaré.

Annali di matematica pura ed applicata. — Série III. Tome XXX. — Sibirani: Centri di librazione e moti dell' asteroide nelle loro vivinanze nel problema ristretto dei tre corpi ed in un analogo, sotto l' ipotesi che l' attrazione o la ripulsione delle due grandi masse sia una funzione della distanza. — Zondadari: Sugli inviluppi di tangenti alle curve integrali di un' equazione differenziale del primo ordine. — Togliatti: Questioni di forma e di realità relative a fasci di quadriche in una spazio ad n dimensioni. — Calapso: Sulle trasformazioni dei sistemi di linee, coniugate ed ortogonali. — Terracini: Osservazioni sui sistemi isotermo coniugati che sono permanenti nelle deformazioni di una superficie. — Sulla esistenza di polarità ordinaria che mutano l'una nell'altra due quadriche non degeneri. — Tonelli: Criteri per l' esistenza della soluzione in problemi di Calcolo delle variazioni. — Jonas: Sopra una classe di trasformazioni asintotiche, applicabili in particolare alle superficie la cui curvatura è proporzionale alla quarta potenza della distanza del piano tangente da un punto fisso. — Spampinato: Le trasformazioni birazionali periodiche sulle superficie iperellitiche con due fasci di curve ellitiche. — Cecioni: Sopra una relazione fra certe forme differenziali quadratiche e le algebre commutative.

Bulletin des Sciences mathématiques. Tome XLV. — L. Godeaux: Sur une surface algébrique considérée par M. G. Humbert. — M. Lienard:

Sur le théorème de Menabrea. — K. Ogura: Sur la théorie de l'interpolation de Stirling et les zéros des fonctions entières. — C. de Jans: Sur une généralisation du problème de Barlow. — P. Fatou: Sur l'évanouissement d'une branche de fonction uniforme aux points d'une ligne singulière. — P. Flamant: Sur les systèmes d'équations différentielles linéaires en nombre infini. — M. Frechet: Remarques sur les probabilités contenues. V. Smirnoff: Sur les équations différentielles linéaires du second ordre et la théorie des fonctions automorphes. — Auric: Sur un perfectionnement à apporter aux statistiques. — B. Gambier: Applicabilité des surfaces réelles. Etude spéciale de la correspondance entre point réel et point imaginaire. Systèmes cycliques réels et systèmes triples orthogonaux. — C. de Waard: Une lettre inédite de Roberval du 6 janvier 1637 contenant le premier énoncé de la cycloïde. — Et. Delassus: Sur le principe fondamental de la mécanique analytique. — M. Janet: Sur la recherche générale des fonctions primitives à n variables. G. Valiron: Sur les fonctions entières d'ordre fini. — J. Chazy: Sur les courbes définies par les équations différentielles du second ordre. — B. de Fontviolant: Sur le théorème de Menabrea. — S. Rindi: Sur la valeur moyenne. — G. Fontene: Sur la dynamique de la relativité. — E. Picard: Discours d'ouverture de la 6me Conférence générale des poids et mesures, prononcé le 27 septembre 1921, au Ministère des Affaires étrangères, en présence de M. le Ministre du Commerce. — S. Mangeot: Sur des propriétés relatives à des torsions de courbes tracées sur les surfaces. — E. Picard: La théorie de la relativité et ses applications à l'astronomie.

3. Thèse de doctorat:

Nous signalons sous cette rubrique les thèses de doctorat dont un exemplaire imprimé aura été adressé à la Rédaction, 110, *Florissant, Genève.*

Allemagne. — *Université de Giessen.* — H. Gilbert. — **Die Reziprozität in der Ebene als Folge eines Polarsystems und einer harmonischen Spiegelung an einem Punkt und einer Geraden.** (Mitteilungen des mathematischen Seminars der Universität Giessen) III Heft. — 1 vol. in-8°, broché de 33 p.; 1922.

France. — *Faculté des Sciences de Strasbourg.* — Louis Antoine. — **Sur l'homéomorphie de deux figures et de leurs voisinages.** — 1 vol. in-4° de 105 p. et 14 figures; 1921.

René Thiry. — **Sur les solutions multiples des problèmes d'Hydrodynamique relatifs aux mouvements glissants.** — 1 vol. in-4° de 116 p.; 1921.

Suisse. — *Université de Lausanne.* — Jules Chuard. — **Questions d'Analysis situs.** — 1 vol. in-8° de 40 p.; 1922.

UN CHAPITRE DE MÉTHODOLOGIE MATHÉMATIQUE, LES IMAGINAIRES DE GALOIS

PAR

M. Stuyvaert (Gand).

Considérons deux polynomes à coefficients entiers,

$$F(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_m ,$$
$$f(x) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_n$$

et soit $m \geqq n$. L'étude de ces fonctions relativement à un MODULE PREMIER P a été commencée dans un chapitre antérieur de notre Cours de Méthodologie: on y a montré l'existence et l'unicité de la *congruence fondamentale*,

$$F(x) - f(x) Q(x) - R(x) \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p)$$

où $R(x)$ est de degré inférieur à n.

On dit que $F(x)$ est *divisible* par $f(x)$ suivant le module p, si le polynome $R(x)$ ci-dessus est congru à zéro, donc s'il existe un polynome $Q(x)$ tel que le polynome $F(x) - f(x)\, Q(x)$ ait tous ses coefficients multiples de p, ce qui s'écrit

$$F(x) \equiv f(x) Q(x) . \qquad (\text{mod. } p)$$

Quand cette condition n'est pas satisfaite, la congruence fondamentale donne lieu à la même suite d'opérations que l'algorithme d'Euclide pour le p. g. c. d.

Alors, si un polynome $\psi(x)$ divise (mod. p) les polynomes $F(x)$ et $f(x)$; il divise $R(x)$, car soient

$$F(x) \equiv \psi(x) G(x) , \qquad f(x) \equiv \psi(x) g(x) \qquad (\text{mod. } p)$$

il en résulte que

$$\psi(x)G(x) - \psi(x)g(x)Q(x) - R(x)$$

a tous ses coefficients multiples de p ou que $R(x)$ est divisible (mod. p) par $\psi(x)$. On voit de même que si un polynome divise (mod p) $f(x)$ et $R(x)$, il divise (mod. p) $F(x)$.

Les divisions successives de l'algorithme d'Euclide, appliquées à $F(x)$ et $f(x)$ doivent aboutir, parce que le degré des restes décroît. En dernier lieu on trouve, ou bien un reste ayant tous ses coefficients congrus à zéro, et alors l'avant-dernier reste $D(x)$ divise (mod. p) le précédent et tous ceux qui viennent avant lui, notamment $F(x)$ et $f(x)$; — ou bien un reste indépendant de x mais non multiple de p et alors les deux polynomes donnés ne sont pas divisibles par un même polynome.

Il faut encore établir l'unicité du p. g. c. d. (mod. p), c'est-à-dire du polynome de degré le plus élevé divisant (mod p) $F(x)$ et $f(x)$: s'il y en a un autre, il divise les restes successifs, donc le p. g. c. d. déjà trouvé et comme ils doivent être de même degré, le quotient est indépendant de x.

On appelle *polynome irréductible* suivant le module p un polynome qui n'est pas congru au produit de deux polynomes.

On a démontré dans un chapitre antérieur ceci: si $f(x) \equiv 0$ (mod. p) a une racine α, le polynome $f(x)$ est divisible (mod. p) par $x - \alpha$; et la réciproque est immédiate. Donc un polynome irréductible de degré supérieur à 1 n'a pas de racine; mais la réciproque n'est pas exacte, car un polynome peut n'avoir aucune racine et cependant être réductible; il est alors congru au produit de facteurs irréductibles de degré supérieur à 1.

Il est facile de former des polynomes irréductibles du second degré, pour un module premier impair quelconque, 7 par exemple. Le polynome $x(x-1)-d$ ne peut avoir que des diviseurs du premier degré; donc, s'il n'a pas de racine, il est irréductible; or il n'a pour racine, ni 1, ni 0, si d n'est pas $\equiv 0$ (mod. 7); remplaçons x par 2, 3, 4, 5, 6 dans $x(x-1)$; nous aurons cinq résultats qui peuvent être, dans le cas le plus défavorable, non congrus entre eux pour le module 7; il reste toujours au moins une valeur de d qui n'est congrue ni à zéro, ni à ces cinq résultats

$[2(2-1)\equiv 2\ ;\ 3(3-1)\equiv 6\ ;\ 4(4-1)\equiv 5\ ;\ 5(5-1)\equiv 6\ ;\ 6(6-1)\equiv 2]$

on peut prendre pour d toute valeur non congrue à 0, 2, 5, 6; par conséquent

$$x(x-1)-1\ ,\qquad x(x-1)-3\ ,\qquad x(x-1)-4$$

sont des polynomes irréductibles (mod. 7). La même méthode réussit encore pour des congruences du troisième degré, parce que tout polynome cubique réductible a au moins un facteur linéaire. Nous verrons plus loin l'existence de polynomes irréductibles de tous les degrés.

Théorème. *Tout polynome irréductible* $P(x)$ *qui divise* (*mod.* p) *un produit de deux polynomes* $F(x)$ $G(x)$ *divise* (*mod.* p) *un des facteurs.*

1° Si $P(x)$ est de degré égal ou inférieur à $F(x)$ et s'il ne divise pas $F(x)$, on forme, au moyen de l'algorithme d'Euclide, la suite de polynomes

$$F(x)\ ,\qquad P(x)\ ,\qquad R(x)\ ,\qquad R'(x)\ ,\ \ldots\ n$$

qui doit aboutir, puisque $P(x)$ est irréductible, à un entier n non multiple de p. Multiplions par $G(x)$ tous les termes de la suite; $P(x)$ divisant FG et PG divise RG,R'G,...nG, donc aussi $\omega n G \equiv G$, ω étant l'entier, toujours existant et unique, tel que $\omega n \equiv 1$ (mod. p).

2° Si $F(x)$ est de degré inférieur à $P(x)$ la suite de polynomes a pour premier terme $P(x)$, pour second terme $F(x)$, et la démonstration s'achève comme ci-dessus.

Corollaires. Si les congruences

$$F(x)\equiv 0\ ;\qquad f(x)\equiv 0\ ;\qquad\qquad (\text{mod. } p)$$

ont une racine commune α, le binome $x-\alpha$ divise (mod. p) les deux polynomes $F(x)$ et $f(x)$. Donc il y a un p. g. c. d. (mod. p) $D(x)$ de $F(x)$ et $f(x)$. Visiblement toute racine de $D(x)$ est racine de $F(x)$ et $f(x)$. Mais si ce p. g. c. d. n'existe pas ou s'il est irréductible et de degré supérieur à 1, $F(x)$ et $f(x)$ n'ont aucune racine commune.

On démontre, comme pour les nombres entiers, que

$$D(x)\equiv F(x)g(x)+f(x)G(x)\qquad\qquad (\text{mod. } p)$$

$G(x)$ et $g(x)$ étant deux polynomes.

De tout ceci résulte, comme dans la théorie des polynomes algébriques, qu'un polynome est congru, d'une seule manière, à un produit de polynomes irréductibles, avec les conséquences habituelles.

Application. Toute racine α, non multiple de p, de la congruence

$$f(x) \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p)$$

est aussi racine de $x^{p-1} - 1$; donc $f(x)$ et $x^{p-1} - 1$ ont un p. g. c. d. (mod. p) $D(x)$; on le calcule par l'algorithme d'Euclide. Le polynome $D(x)$ a autant de racines que l'indique son degré, car, comme il divise $x^{p-1} - 1$, il est congru à un produit de binomes tels que $x - \alpha$.

Si $f(x)$ a moins de racines que son degré ne l'indique, il est congru au produit de facteurs binomes affectés peut-être d'exposants, et peut-être de polynomes irréductibles. Le calcul effectué à l'instant fournit le produit $D(x)$ des facteurs binomes chacun avec l'exposant 1.

Comme on a

$$x^{p-1} - 1 \equiv D(x)\,Q(x)$$

on ne doit résoudre que celle des deux congruences $D(x) \equiv 0$, $Q(x) \equiv 0$ qui a le moindre degré; et cette remarque ramène la résolution de toute congruence à celle d'une congruence de degré au plus égal à $\frac{p-1}{2}$.

Toute congruence douée d'autant de racines *distinctes* que l'indique son degré divise (mod. p) l'expression $x^{p-1} - 1$; mais ceci n'est plus vrai s'il y a des racines multiples: par exemple $(x - \alpha)^2(x - \beta)$ ne divise pas (mod. p) le polynome $x^{p-1} - 1$, car alors $x^{p-1} - 1$ pourrait se décomposer en facteurs irréductibles de deux manières [1].

Avant d'aborder la recherche des congruences irréductibles, nous devons établir ce lemme d'analyse combinatoire:

Si $\Gamma_{m,n}$ *désigne le nombre de combinaisons à répétition de* m *lettres prises* n *à* n, *on a la formule*

$$(k-1)\Gamma_{p-1,k} + (k-2)p\Gamma_{p-1,k-1} + (k-3)p^2\Gamma_{p-1,k-2} + \cdots$$
$$+ 2p^{k-3}\Gamma_{p-1,3} + p^{k-2}\Gamma_{p-1,2} + \Gamma_{p,k} = p^k . \qquad (1)$$

---

[1] *Exercice.* Décomposer en facteurs irréductibles, suivant le module 7, le polynome $x^6 - 3x^4 - 2x^3 - 2x^2 - x - 2$. (V. J. Serret, *Alg. sup.*).

La formule se vérifie pour $k = 2$, car on a, dans ce cas

$$\Gamma_{p-1,2} + \Gamma_{p,2} = \frac{p(p-1)}{2} + \frac{p(p+1)}{2} = p^2 .$$

Supposons donc la formule démontrée pour le nombre k et appliquons ensuite à $k + 1$,

$$k\Gamma_{p-1,k+1} + (k-1)p\Gamma_{p-1,k} + (k-2)p^2\Gamma_{p-1,k-1} + \cdots$$
$$+ 2p^{k-2}\Gamma_{p-1,3} + p^{k-1}\Gamma_{p-1,2} + \Gamma_{p,k+1} = p^{k+1} ; \qquad (2)$$

multiplions la formule (1) par p et soustrayons de (2), il vient

$$k\Gamma_{p-1,k+1} + \Gamma_{p,k+1} = p\Gamma_{p,k}$$

ou encore

$$\frac{(p-1)p(p+1)\dots(p+k-1)}{1 . 2 . 3 \dots (k+1)} + \frac{p(p+1)\dots(p+k)}{1 . 2 \dots (k+1)}$$
$$= p\,\frac{p(p+1)\dots(p+k-1)}{1 . 2 \dots k} ,$$

ce qui se vérifie en divisant les deux membres par

$$\frac{p(p+1)\dots(p+k-1)}{1 . 2 \dots k} ;$$

on obtient en effet l'identité

$$\frac{k(p-1)}{k+1} + \frac{p+k}{k+1} = p .$$

Théorème. *Suivant un module premier* p *il y a des congruences irréductibles de tout degré* k; *leur nombre est au moins*

$$(k-1)\Gamma_{p-1,k}$$

en appelant $\Gamma_{m,n}$ *le nombre de combinaisons à répétition de* m *objets pris* n *à* n [1].

Dans cet énoncé ne sont pas considérées comme distinctes deux congruences dont l'une s'obtient en multipliant l'autre par un facteur constant. Cette opération est en effet sans influence sur la réductibilité et nous pouvons toujours débuter par la *préparation* connue des congruences qui consiste à rendre égal à l'unité le coefficient du terme le plus élevé en x.

[1] Cf. *Encyc. des sc. math.*, t. I, vol. 3, fasc. 1, p. 41.

Dès lors les congruences

$$x^2 + ax + b \equiv 0$$

sont en nombre p^2, puisque a et b peuvent prendre les valeurs de 0 à $p - 1$. Pour avoir celles qui sont irréductibles, il faut écarter celles qui ont la forme $(x - i)(x - j)$, où i et j prennent des valeurs, distinctes ou égales, de 0 à $p - 1$, leur nombre est $\Gamma_{p,2}$. Le nombre des congruences irréductibles du second degré est donc

$$p^2 - \Gamma_{p,2} = 1 \cdot \Gamma_{p-1,2}$$

Supposons la formule $(k - 1)\,\Gamma_{p-1,k}$ établie pour toutes les congruences jusque et y compris celles d'ordre $k - 1$. Enumérons les p^k congruences d'ordre k: celles qui ont k racines sont en nombre $\Gamma_{p,k}$; celles qui sont le produit d'un polynome irréductible du second degré par un autre polynome quelconque sont en nombre $p^{k-2}\,\Gamma_{p-1,2}$ et ainsi de suite; le lemme ci-dessus donne pour résidu

$$(k - 1)\,\Gamma_{p-1,k}\,.$$

Seulement si un polynome d'ordre k est congru au produit de trois facteurs irréductibles par exemple d'ordres h, i, j par des facteurs binomes, il figure trois fois parmi les congruences exclues et il faut rétablir le nombre exact en ajoutant $2\,\Gamma_{p,k-h-i-j}$. Si $h + i + j$ est égal à k, il n'y a pas d'autre correction de ce chef; mais si $h + i + j < k$, il y a eu des erreurs analogues dans l'énumération des polynomes réductibles d'ordre $k - 1$, etc., et il faut retrancher

$$2\,\Gamma_{k-1,k-h-i-j-1}\,,\ \text{etc}\,;$$

or on vérifie que si $k > \alpha$,

$$\Gamma_{k,\alpha} > \Gamma_{k-1,\alpha-1} + \Gamma_{k-2,\alpha-2} + \cdots + \Gamma_{k-\alpha+1,1} + 1\,,$$

car la chose est visible pour $\alpha = 1$ quel que soit k; supposons-la démontrée pour $\Gamma_{k-1,\alpha-1}$; nous constatons que

$$\Gamma_{k,\alpha} = \Gamma_{k,\alpha-1} + \Gamma_{k-1,\alpha}$$

d'où pareillement

$$\Gamma_{k,\alpha} = \Gamma_{k-1,\alpha-1} + \Gamma_{k,\alpha-2} + \Gamma_{k-1,\alpha-1} + \Gamma_{k-2,\alpha} > \Gamma_{k-1,\alpha-1} + \Gamma_{k-1,\alpha-1}$$

ce dernier terme est par hypothèse supérieur à

$$\Gamma_{k-2, \alpha-2} + \Gamma_{k-3, \alpha-3} + \cdots$$

donc *a fortiori* on a l'inégalité à démontrer.

Ce qui précède ne démontre pas seulement l'existence de congruences irréductibles de tout degré, mais donne un moyen théorique de les déterminer toutes. En effet, pour une congruence quelconque, la solution n'exige qu'un nombre fini d'essais. Seulement les calculs étant fort longs, il est bon de chercher quelque moyen de les raccourcir.

Pour les congruences de second et troisième ordre, la question de l'irréductibilité se confond avec celle de n'avoir pas de racine; c'est pourquoi nous dirons quelques mots de ce dernier problème.

Le système de classes de restes pour un module premier constitue un CORPS. Par conséquent, on peut appliquer ici tout ce que l'algèbre enseigne sur le résultant de deux équations en x, car la théorie du résultant ne comporte que des opérations rationnelles. Par exemple, on a ce théorème relatif à deux congruences (que nous supposons *préparées*),

$$\left.\begin{array}{l} F \equiv x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m \equiv 0 \\ G \equiv x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_n \equiv 0 \end{array}\right\} . \qquad (\text{mod.}\, p)$$

Pour que les deux polynomes F, G *aient un p. g. c. d.* (*mod. p*) *δ contenant* x, *il faut et il suffit que*

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & . & . & 1 & . & . \\ a_1 & 1 & . & b_1 & 1 & . \\ a_2 & a_1 & . & b_2 & b_1 & . \\ . & a_2 & . & . & b_2 & . \\ a_m & . & . & b_n & . & . \\ . & a_m & . & . & b_n & . \end{vmatrix} = M \cdot p .$$

La remarque faite à l'instant dispense de démonstration; toutefois, nous consignons ici le raisonnement entièrement calqué sur celui qui concerne les équations algébriques.

Si F et G ont un p. g. c. d. (mod. p) δ contenant x, on a identiquement

$$F \equiv \delta U \quad \text{ou} \quad \delta(u_0 x^{m-1} + u_1 x^{m-2} + \dots u_{m-1}) \equiv 0 \quad (\text{mod.}\, p)$$

$$G \equiv \delta V \quad \text{ou} \quad \delta(v_0 x^{n-1} + v_1 x^{n-2} + \dots v_{n-1}) \equiv 0 \quad »$$

d'où identiquement

$$FV \equiv GU \qquad (\text{mod.}\, p)$$

ou

$$\left.\begin{array}{l} u_0 - v_0 \equiv 0 \\ b_1 u_0 + u_1 - a_1 v_0 - v_1 \equiv 0 \\ \dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} \qquad (\text{mod.}\, p)$$

les polynomes U, V sont de degrés maximés $m-1$ et $n-1$; un au moins des coefficients u n'est pas multiple de p, soit u_{k-1}; multiplions ces dernières congruences par les mineurs relatifs à la $k^{\text{ième}}$ colonne du déterminant Δ; nous obtenons $\Delta u_{k-1} = M \,.\, p$ et p ne divisant pas u_{k-1}, divise Δ.

Réciproquement, si $\Delta = Mp$, multiplions les lignes du déterminant Δ par les puissances x^{m+n-1}, x^{m+n-2}, ... x, 1 de l'indéterminée x et additionnons: la dernière ligne devient ainsi

$$x^{n-1}F\,, \quad x^{n-2}F\,, \quad \dots F\,, \quad x^{m-1}G\,, \quad x^{m-2}G\,, \quad \dots G$$

et en développant Δ suivant cette dernière ligne, on a identiquement

$$FV - GU \equiv 0 \qquad (\text{mod}\ p)$$

or on a, par la théorie du *p. g. c. d.* (mod p), identiquement

$$V.\, p.\, g.\, c.\, d.\, (F, G) \equiv p.\, g.\, c.\, d.\, (FV, GV) \equiv p.\, g.\, c.\, d.\, (GU, GV)$$
$$\equiv G\, p.\, g.\, c.\, d.\, (U, V)\ ;$$

or G est de degré n et V est de degré moindre, donc le *p. g. c. d.* (F, G) contient effectivement x.

Corollaire. Pour que la congruence

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \dots a_n \equiv 0 \qquad (\text{mod.}\ p)$$

ait une racine non multiple de p, il faut et il suffit qu'elle ait

une racine commune avec

$$x^{p-1} - 1 \equiv 0$$

d'où

$$\begin{vmatrix} 1 & . & . & 1 & . & . \\ a_1 & 1 & . & 0 & 1 & . \\ a_2 & a_1 & . & 0 & 0 & . \\ . & a_2 & . & . & 0 & . \\ a_n & . & . & -1 & . & . \\ . & a_n & . & . & -1 & . \end{vmatrix} = \mathrm{M} \,.\, p\,.$$

Comme APPLICATION, cherchons, pour le module 5, les congruences irréductibles du second degré.

Le déterminant suivant doit être non multiple de 5,

$$\begin{vmatrix} 1 & . & . & . & 1 & . \\ a_1 & 1 & . & . & 0 & 1 \\ a_2 & a_1 & 1 & . & 0 & 0 \\ . & a_2 & a_1 & 1 & 0 & 0 \\ . & . & a_2 & a_1 & -1 & 0 \\ . & . & . & a_2 & . & -1 \end{vmatrix};$$

ce déterminant développé

$$1 - a_1^4 + a_2^4 + 4a_1^2 a_2 - 2a_2^2$$

ne contient que les puissances paires de a_1, c'est-à-dire que les trinomes irréductibles ont la forme

$$x^2 \pm a_1 x + a_2\,.$$

Pour $a_2 \equiv \pm 1$, on doit avoir

$$1 - a_1^4 + 1 \pm 4a_1^2 - 2 = -a_1^2(a_1^2 \mp 4) \text{ non multiple de } 5\ ;$$

dont on doit exclure

$$a_2 \equiv 1 \quad \text{avec} \quad a_1 \equiv 0 \quad \text{ou} \quad 2$$
$$a_2 \equiv -1 \quad » \quad a_1 \equiv 0 \quad \text{ou} \quad 1\,.$$

Pour $a_2 \equiv \pm 2$, on doit avoir

$$1 - a_1^4 + 16 \pm 8a_1^2 - 8 \equiv 4a_1^4 \pm 8a_1^2 + 4 = 4\left(a_1^2 \pm 1\right)^2$$

non multiple de 5; donc il faut exclure

$$a_2 = 2\,, \qquad a_1 = 2\,,$$
$$a_2 = -2\,, \qquad a_1 = 1\,.$$

En résumé les trinomes irréductibles sont

$$x^2 \pm x + 1\,, \quad x^2 \pm 2x - 1\,, \quad x^2 \pm x + 2\,, \quad x^2 \pm 2x - 2\,, \quad x^2 \pm 2\,;$$

la dernière formule est connue, puisque $+2$ et -2 sont les non résidus quadratiques pour le module 5.

Examinons de plus près le résultant de $x^{p-1} - 1$ et de

$$F(x) \quad \text{ou} \quad x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a^n \,(n < p-1)\,,$$

$$\Delta = \left| \begin{array}{cccc|cccc}
1 & & & & 1 & & & \\
0 & 1 & & & a_1 & 1 & & \\
0 & 0 & 1 & & a_2 & a_1 & 1 & \\
. & 0 & 0 & . & . & a_2 & a_1 & . \\
. & . & 0 & . & a_n & . & a_2 & . \\
-1 & . & . & . & & a_n & . & . \\
 & -1 & . & . & & & a_n & . \\
 & & -1 & . & & & & . \\
 & & & . & & & & . \\
\multicolumn{4}{c|}{\underbrace{\hphantom{xxxxxx}}_{n \text{ col.}}} & \multicolumn{4}{c}{\underbrace{\hphantom{xxxxxx}}_{p-1 \text{ col.}}}
\end{array} \right|$$

ajoutons la première ligne à la $p^{\text{ième}}$, la $2^{\text{ième}}$ à la $(p+1)^{\text{ième}}$ ... la $n^{\text{ième}}$ à la $(p+n-1)^{\text{ième}}$; alors le déterminanta partiel

des n premières lignes et colonnes se réduit à son terme principal, et l'on peut supprimer les n premières lignes et colonnes, donc

$$\Delta = \left| \begin{array}{cccccc} a_n & & & a_1 & 1 & . \\ . & a_n & & a_2 & a_1 & . \\ . & . & & . & a_2 & . \\ 1 & . & . & a_n & . & . \\ a_1 & 1 & . & .. & a_n & . \\ a_2 & a_1 & . & . & . & . \\ . & a_2 & . & . & . & \\ . & . & . & 1 & & \\ \multicolumn{4}{c}{\underbrace{\qquad\qquad}_{n \text{ col.}}} & \multicolumn{2}{c}{\underbrace{\qquad}_{p-n-1}} \end{array} \right|$$

Pour une CONGRUENCE BINOME $x^n + q \equiv 0$, le résultant est

$$\left| \begin{array}{ccccccc} q & & & & 1 & & \\ . & q & & & . & 1 & \\ . & . & q & & . & . & . \\ 1 & . & . & . & q & . & . \\ & 1 & . & & & q & . \\ & & 1 & . & & & . \\ & & & . & & & . \end{array} \right| ;$$

développons: le terme principal est q^{p-1}; prenons un élément q de la diagonale principale et remplaçons-le par l'élément 1 de la même colonne, mais, comme on ne peut prendre qu'un élément dans chaque ligne, il faut remplacer un second élément de la diagonale principale situé à un intervalle n du premier, en descendant la diagonale ou en reprenant au début si besoin, etc. Si donc n est premier avec $p - 1$, on ne revient au point de départ qu'après avoir épuisé la diagonale principale; pour amener tous les éléments 1 sur la diagonale principale, il faut faire un nombre impair $p - 2$ d'échanges de lignes; donc le déterminant développé est $q^{p-1} - 1$; or ceci est congru à zéro pour toute valeur de q, donc, *si n est premier avec $p - 1$, $x^n + q \equiv 0$ n'a pas de racine.*

Si n et $p - 1$ ont un p.g.c.d δ, on revient au point de départ après avoir pris $\frac{p-1}{\delta}$ éléments q de la diagonale principale et les avoir remplacés par des éléments 1, ce qui nécessite $\frac{p-1}{\delta} - 1$ échanges de lignes ou un changement de signe si $\frac{p-1}{\delta}$ est pair et donne un terme en $q\left(\frac{p-1}{\delta}\right)(\delta - 1)$; on peut faire ceci de δ manières, puis on doit prendre de ces groupes 2 à 2, 3 à 3, etc., finalement le déterminant développé est

$$q^{\frac{p-1}{\delta}\delta} \mp \delta q^{\frac{p-1}{\delta}(\delta-1)} + \frac{\delta(\delta-1}{2} q^{\frac{p-1}{\delta}(\delta-2)} + \ldots = \left(q^{\frac{p-1}{\delta}} \mp 1\right)^{\delta}$$

or $q^{\frac{p-1}{\delta}} \mp 1$ est un diviseur algébrique de $q^{p-1} - 1$ et a $\frac{p-1}{\delta}$ racines; donc $x^n + q \equiv 0$ est possible pour $p - 1 - \frac{p-1}{\delta}$ valeurs de q. On retrouve des résultats connus, mais avec ceci de curieux que les polygones de Poinsot apparaissent sur la diagonale d'un déterminant (on rendrait la chose plus saisissante en enroulant le déterminant sur un cylindre).

Remarque. Non seulement la théorie de l'élimination d'une inconnue entre deux équations se transporte aux congruences, mais aussi la même théorie pour plusieurs équations. Ainsi pour que deux congruences aient une racine commune, il ne suffit pas que le résultant soit M.p. car il pourrait y avoir un p.g. c. d. irréductible d'ordre supérieur à 1, mais que les deux congruences aient une racine commune avec $x^{p-1} - 1$, ce qui peut s'exprimer en posant que tous les déterminants extraits d'une matrice soient M. p. Etc. (Voir notre *Algèbre à deux dimensions*, Gand, 1920).

Arrivons à la définition des IMAGINAIRES DE GALOIS[1]. Le module p étant premier, soit $f(x)$ un polynome irréductible de degré $n > 1$. Il n'a pas de racine. Posons néanmoins

$$f(i) \equiv 0 \; ; \qquad (\text{mod. } p)$$

[1] V. *Encyc. sc. math.*, t. 1, vol. 3, fasc. 1, p. 44; BOREL-DRACH, *Introduct. à la théorie des nombres, etc.*

i ne désigne pas $\sqrt{-1}$; c'est ici le symbole d'un entier imaginaire, symbole vide de sens, car l'opération est impossible par hypothèse. Son calcul s'établit par des conventions:

Convenons de dire que deux expressions $\varphi(i)$, $\psi(i)$ sont *congrues* et d'écrire

$$\varphi(i) \equiv \psi(i) \qquad (\text{mod. } p)$$

quand la différence des polynomes $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ est égale terme à terme à une expression

$$\mathrm{R}f(x) + \mathrm{S}p$$

où R et S sont des polynomes en x à coefficients entiers. On exprime la chose en écrivant

$$\varphi(x) - \psi(x) \equiv 0\ ; \qquad (\text{mod. } p, f(x)) \qquad (1)$$

cette congruence à *deux modules* est d'après notre hypothèse, vérifiée pour tout entier réel x.

La convention est permise, car dans le cas particulier où $f(x)$ est réductible et a pour racine l'entier réel i, on a $f(i) = \mathrm{Q}p$ et, d'après la relation (1),

$$\varphi(i) - \psi(i) = (\mathrm{RQ} + \mathrm{S})p \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p)$$

Tout polynome $\varphi(i)$ en i à coefficients entiers réels est une IMAGINAIRE DE GALOIS. D'après nos conventions, elle ne peut être $\equiv 0$ (mod p) que si l'on a

$$\varphi(x) \equiv 0\ . \qquad (\text{mod. } p, f(x))$$

Elle sera dite *racine* de la congruence $\mathrm{F}(z) \equiv 0$ (mod. p) si l'on a $\mathrm{F}(\varphi(i)) \equiv 0$ (mod. p), c'est-à-dire

$$\mathrm{F}(\varphi(x)) \equiv 0\ ; \qquad (\text{mod. } p, f(x))$$

en particulier i est *racine* de la congruence fondamentale $f(z) \equiv 0$ (mod. p).

A cause de l'hypothèse $f(i) \equiv 0$, on peut abaisser toute imaginaire de Galois au-dessous du degré n: on divise algébriquement $\varphi(z)$ par $f(z)$ et l'on prend le reste; de plus, on peut abaisser tous les coefficients au-dessous de p.

Les imaginaires de Galois ont donc la forme

$$g = a_0 + a_1 i + a_2 i^2 + \dots a_{n-1} i^{n-1}$$

où les cœfficients ont les valeurs de 0 à $p-1$: il y a p^n imaginaires distinctes (non congrues pour le mod. p). Pour $a_1 = a_2 = \dots a_{n-1} = 0$, on a, comme cas particulier, les entiers réels.

Convenons de faire, terme à terme la SOMME de deux imaginaires, et leur PRODUIT comme si c'étaient deux polynomes, et d'abaisser au-dessous du degré n par la congruence initiale $f(z) \equiv 0$.

Si le produit $g_1(i) \cdot g_2(i)$ est congru à 0 (mod. p), c'est, d'après nos conventions, que $g_1(x) \cdot g_2(x) \equiv 0$ (mod. p, $f(x)$) ou que $g_1(x) \cdot g_2(x)$ est divisible (mod. p) par $f(x)$; mais un polynome irréductible qui divise (mod. p) un produit, divise un des facteurs, donc *le produit* $g_1(x) \cdot g_2(x)$ *ne peut être congru à* 0 (*mod.* p) *que si l'un des facteurs est congru à* 0 (*mod.* p). Cette propriété s'étend immédiatement à plusieurs facteurs.

Si l'on multiplie l'imaginaire A non $\equiv 0$ (mod. p) par les p^n imaginaires distinctes, on a des produits distincts, car s'il y en avait deux, Ag_1 et Ag_2, congrus pour le mod. p, on aurait $A(g_1 - g_2) \equiv 0$ (mod. p) et comme A n'est pas $\equiv 0$, g_1 et g_2 ne sont pas distincts. Par suite, la congruence linéaire $AX \equiv B$ (mod. p), et en particulier $AX \equiv 1$ a toujours une racine et une seule.

Si l'on pose $Ag \equiv g'$ (mod. p) et qu'on fasse parcourir à g les $p^n - 1$ imaginaires distinctes, non $\equiv 0$, g' parcourt les mêmes imaginaires, et en multipliant membre à membre,

$$\left(A^{p^n-1} - 1\right) \pi g \equiv 0 \qquad \text{(mod. } p\text{)}$$

et comme πg n'est pas $\equiv 0$, on a la formule analogue à celle du THÉORÈME DE FERMAT,

$$A^{p^n-1} \equiv 1 \qquad \text{(mod. } p\text{)}$$

ou encore, quelle que soit l'imaginaire A, même $\equiv 0$,

$$A^{p^n} - A \equiv 0 \qquad \text{(mod. } p\text{)}$$

Ceci signifie, d'après nos conventions, que si $f(x)$ est irréductible suivant le module p et $\theta(x)$ un polynome quelconque,

$$[\theta(x)]^{p^n} - \theta(x)$$

est divisible (mod. p) par $f(x)$.

Les imaginaires de Galois relatives à un polynome irréductible constituent un *corps* puisque les quatre opérations fondamentales s'y pratiquent comme pour les classes de reste (mod. p). Par conséquent la division algébrique s'étend sans autre démonstration, aux POLYNOMES A COEFFICIENTS IMAGINAIRES DE GALOIS.

Entrons toutefois dans quelque détail. Soit

$$\varphi(x) = g_0(i)x^m + g_1(i)x^{m-1} + \dots g_m(i)$$

un polynome entier en x à coefficients imaginaires de Galois. L'imaginaire $\theta(i)$ est dite racine de $\varphi(x)$ si l'on a

$$\varphi[\theta(i)] \equiv 0 \ ; \qquad \text{(mod. } p)$$

comme le premier membre s'obtient par des additions et multiplications, cette congruence a un sens, d'après nos conventions.

Le polynome $\varphi(x)$ est identiquement nul pour le module p si tous ses coefficients sont $\equiv 0$ (mod. p); dans ce cas la congruence $\varphi(x) \equiv 0$ est satisfaite par une imaginaire quelconque.

Le produit de deux polynomes pareils ne peut être identiquement nul (mod. p) que si l'un des facteurs l'est. Car soient A le premier coefficient non nul du premier polynome et B celui du second; on sait que AB n'est pas $\equiv 0$. Par suite le degré d'un produit de polynomes est la somme des degrés des facteurs.

Un polynome $\varphi(x)$, entier en x et i est divisible (mod. p) par un autre pareil $\psi(x)$ non identiquement nul (mod. p) si l'on peut former un polynome $\pi(x)$ tel que l'expression

$$\varphi(x) - \psi(x)\pi(x)$$

soit identiquement nulle (mod. p).

Soit $\varphi(x)$ de degré au moins égal à $\psi(x)$. Dire que $\psi(x)$ est de degré m c'est dire que le coefficient B_0 de x^m est une imaginaire de Galois non $\equiv 0$; on a toujours et d'une seule manière,

$$(\Gamma) \quad \varphi(x) \equiv \psi(x)Q(x) + R(x) \qquad \text{(mod. } p)$$

où $R(x)$ est de degré inférieur à $\psi(x)$. Car en comparant les coefficients des puissances successives de x dans les deux membres, on détermine les coefficients de $Q(x)$ puis ceux de $R(x)$ sans ambiguïté, chaque fois par une congruence linéaire. D'où la théorie du p. g. c. d. avec les propriétés habituelles. Nous aurons à revenir sur cette congruence fondamentale (Γ).

Mais d'abord voici un CAS PARTICULIER. Soit le polynome $\varphi(x)$ ayant pour racine l'imaginaire g_1. On peut former la congruence

$$\varphi(x) \equiv (x - g_1) Q(x) + R \qquad (\text{mod. } p)$$

où R est de degré inférieur à $x - g_1$ donc indépendant de x. Cette congruence étant identique, on peut remplacer x par g_1 et, comme $\varphi(x_1) \equiv 0$, on obtient $R \equiv 0$, donc $\varphi(x)$ est divisible (mod. p) par $x - g_1$. Soit g_2 une *autre* racine,

$$\varphi(g_2) \equiv (g_2 - g_1) Q(g_2) \qquad (\text{mod. } p)$$

et comme le premier membre est congru à 0 et que $g_2 - g_1$ ne l'est pas, g_2 est racine de $Q(x)$ et $\varphi(x)$ est divisible par $(x - g_1)(x - g_2)$. etc. Ainsi, une congruence d'ordre m ne peut avoir qu'une racine de plus que la congruence d'ordre $m - 1$ et, de proche en proche, une congruence ne peut avoir plus de racines que ne l'indique son degré, à moins d'être identique.

Un rôle spécial revient au polynome $x^{p^n} - x$ qui a pour racines toutes les imaginaires de Galois, donc autant que l'indique son degré; il est congru au produit

$$x(x - g_1)(x - g_2) \cdots,$$

$g_1, g_2 \ldots$ étant toutes les imaginaires. Soit $F(x)$ un autre polynome ayant la même propriété: on a

$$F(x) \equiv (x^{p^n} - x) q(x) + r(x) \qquad (\text{mod. } p)$$

$F(x)$ et $(x^{p^n} - x)$ étant $\equiv 0$ pour toutes les imaginaires de Galois, il en est de même de $r(x)$ qui a donc plus de racines que ne l'indique son degré et disparaît.; donc tout polynome ayant pour racines toutes les imaginaires de Galois est de la forme

$$(x^{p^n} - x)\pi(x)$$

où $\pi(x)$ est un polynome arbitraire.

Soit deux POLYNOMES A COEFFICIENTS RÉELS, $F(x)$ et $F_1(x)$, soit D leur p. g. c. d. (mod. p); on sait que l'on peut trouver deux polynomes G, G_1 tels que

$$D - FG_1 - F_1 G$$

ait tous ses coefficients (réels) multiples de p.

Dire que l'imaginaire de Galois $g(i)$ est racine de F et F_1, c'est dire que $F(g(x))$ et $F_1(g(x))$ sont divisibles (mod. p) par $f(x)$; il en est de même de $D(g(x))$. Ainsi les racines communes à F et F_1, tant réelles qu'imaginaires de Galois, sont racines de $D(x)$.

Or $x^{p^n} - x$ a pour racines toutes les imaginaires de Galois, donc les racines de $F(x)$ sont racines du p. g. c. d. (mod. p) $\Delta(x)$ de $F(x)$ et $x^{p^n} - x$.

$\Delta(x)$ polynome à coefficients réels divise (mod. p) $F(x)$; si $F(x)$ est irréductible (mod. p), $\Delta(x)$ est ou bien indépendant de x, ou bien congru à $F(x)$; donc une congruence irréductible à coefficients réels a, ou bien aucune racine imaginaire de Galois, ou bien en a autant que l'indique son degré, car $\Delta(x)$ est diviseur (mod. p) de $x^{p^n} - x$.

En particulier $f(x)$ est irréductible, de degré n, à coefficients réels et a une racine imaginaire i, donc elle en a n, et $f(x)$ divise (mod. p) le polynome $x^{p^n} - x$. Celui-ci est donc divisible (mod. p) par *tout* polynome irréductible de degré n, car $f(x)$ a été choisi arbitrairement.

De même si l'entier r divise n, l'entier $p^r - 1$ divise $p^n - 1$, et le polynome $x^{p^r-1} - 1$ divise algébriquement $x^{p^n-1} - 1$.

Ainsi toute congruence irréductible dont le degré r est n ou un diviseur de n a autant de racines imaginaires de Galois que l'indique son degré.

Toute autre congruence irréductible est privée de racine. Car on sait, d'après les propriétés des coefficients binomiaux, que

$$(a + b + c + \dots)^p \equiv a^p + b^p + c^p + \dots \qquad (\text{mod } p)$$

donc

$$(a + bx + cx^2 + \dots)^p \equiv a^p + b^p x^p + c^p x^{2p} + \dots \qquad (\text{mod. } p)$$

et ceci d'après le théorème de Fermat, est congru à

$$a + bx^p + cx^{2p} + \dots .$$

c'est-à-dire que

$$(\varphi(x))^p \equiv \varphi(x^p) ; \qquad (\text{mod. } p)$$

remplaçons x par x^p,

$$\varphi(x^{p^2}) \equiv (\varphi(x^p))^p \equiv ((\varphi(x)^p))^p \equiv (\varphi(x))^{p^2} \qquad (\text{mod. } p)$$

et, de proche en proche,

$$[\varphi(x)]^{p^r} \equiv \varphi(x^{p^r}) \qquad (\text{mod. } p)$$

A présent si un polynome irréductible de degré n pouvait diviser $x^{p^r} - x$ dans l'hypothèse $r < n$, ce polynome définirait une imaginaire de Galois i qui serait racine de $x^{p^r} - x$, donc on aurait

$$i^{p^r} \equiv i , \qquad \text{d'où} \qquad \varphi(i^{p^r}) \equiv \varphi(i) \qquad (\text{mod. } p)$$

et, d'après la remarque précédente,

$$\varphi(i^{p^r}) \equiv (\varphi(i))^{p^r} \equiv \varphi(i)$$

c'est-à-dire que la congruence $x^{p^r} - x$ aurait pour racine toute expression $\varphi(i)$ donc toutes les imaginaires déduites de i en nombre p^n, et aurait plus de racines que son degré ne l'indique.

Ainsi $x^{p^n} - x$ ne peut être divisible (mod. p) par un polynome irréductible de degré supérieur à n.

Enfin, si $n = mq + r$ $(0 < r < m)$, l'expression $x^{p^n} - x$ ne peut être divisible par un polynome irréductible $F(x)$ de degré m, car $x^{p^{mq}} - x$ est divisible par $F(x)$ d'après un résultat trouvé à l'instant, $x^{p^n} - x$ l'est aussi par hypothèse, donc $F(x)$ divise (mod. p) leur différence

$$x^{p^{mq+r}} - x^{p^{mq}}$$

et celle-ci d'après une remarque ci-dessus est congrue à

$$(x^{p^r} - x)^{p^{mq}}$$

et n'est pas divisible par $F(x)$ puisque $r < m$ (un polynome irréductible qui divise un produit $(x^{p^r} - x)^{p^{mq}}$ divise un facteur $x^{p^r} - x$).

En résumé, $x^{p^n} - x$ *est le produit de tous les polynomes irréductibles dont les degrés sont* n *ou des diviseurs de* n.

Signalons comme *corollaire* facile ou exercice (cf. Encyc., t. I, v. 3, fasc. 1, p. 42) : si N est le nombre des congruences irréductibles d'ordre n, on a

$$nN = p^n - \sum_{(i)} p^{\frac{n}{a_i}} + \sum_{(i<k)} p^{\frac{n}{a_i a_k}} - \sum_{(i<k<l)} p^{\frac{n}{a_i a_k a_l}} + \dots \pm p^{\frac{n}{a_1 a_2 \dots a_n}}.$$

où la première somme est étendue à tous les facteurs premiers inégaux $a_1, a_2, \dots a_n$ de n, la seconde à toutes les combinaisons 2 à 2 de ces facteurs, ...et où l'exposant du dernier terme est le quotient de n par le produit de ces facteurs.

Autre *corollaire*: $x^{p^n} - x$ n'a pas de facteurs multiples, car s'il avait la forme $f^\alpha g^\beta h^\gamma \dots$, le produit $fgh\dots$ contenant toutes les imaginaires de Galois serait de degré au moins égal à $x^{p^n} - x$.

Terminons par une propriété connue des CORPS A UN NOMBRE FINI D'ÉLÉMENTS (Encyc., t. I, v. 2, fasc. 2, p. 249):

Les seuls corps à un nombre fini d'éléments sont ceux formés par les classes de restes suivant un module premier auxquelles on adjoint une imaginaire de Galois.

D'abord les multiples successifs de l'unité absolue doivent aboutir à zéro, donc constituer une classe de restes et nous avons vu au chapitre *Corps et Domaines* que, pour avoir un *corps*, il faut prendre un module premier p.

Ensuite, on ne peut, au corps de classes de restes (mod. p) *adjoindre* une quantité i de manière à avoir un nouveau corps à un nombre fini d'éléments que si i est une imaginaire de Galois. Car i, i^2, i^3.... sont des éléments du nouveau corps : comme il n'y en a qu'un nombre fini, on doit avoir à la fin

$$i^m = \frac{\alpha + \beta i + \gamma i^2 + \dots \mu i^{m-1}}{\alpha' + \beta' i + \gamma' i^2 + \dots \mu' i^{m-1}}$$

le second membre existe puisque l'on a un *corps*, et multiplié par le dénominateur il donne le numérateur, ainsi i est racine d'une équation ou plutôt congruence à coefficients du corps initial; si celle-ci est réductible, un des facteurs irréductibles doit être nul, car c'est une propriété essentielle du corps qu'on produit ne s'annule que si un des facteurs s'évanouit; ainsi i est une imaginaire de Galois.

Supposons à présent deux éléments i et j adjoints au corps de classes de restes (mod. p). Les puissances successives étant en nombre infini, une relation identique doit permettre d'exprimer les puissances de i à partir de la $h^{\text{ième}}$ et celles de j à partir de la $k^{\text{ième}}$ au moyen des puissances précédentes.

Ces deux relations ne peuvent être les mêmes, car soit pour fixer les idées, $i^2 + j^2 \equiv 1$; utilisons-la pour ne garder que $1, i, j, j^2$ et exprimons j^3; nous aurons

$$j^3 \equiv j^2 \cdot j \equiv j(1 - i^2) \equiv j - ji^2 \equiv j - j(1 - j^2) \equiv j^3 ;$$

nous retombons sur j^3 et cela provient de ce que remplaçant i^2 et j^2 tirés de la même relation, nous aboutissons à une identité.

Ainsi il y a deux relations *distinctes* entre i et j; nous pouvons en *éliminer* j ou i car c'est une opération rationnelle, donc i et j sont séparément imaginaires de Galois, et de même, de proche en proche pour plusieurs éléments adjoints.

Montrons enfin que l'adjonction simultanée de deux (pour fixer les idées) imaginaires i, j, équivaut à une adjonction unique. Soit i définie par une congruence $f(x) \equiv 0$ irréductible d'ordre n et j par une congruence $\varphi(x)$ d'ordre n'; les polynomes $f(x)$, $\varphi(x)$ divisent respectivement

$$x^{p^n-1} - 1 \quad \text{et} \quad x^{p^{n'}-1} - 1 ;$$

soit μ un multiple commun quelconque de n et n'; $p^\mu - 1$ est divisible par $p^n - 1$ et par $p^{n'-1}$ donc

$$x^{p^\mu-1} - 1$$

est divisible algébriquement par $x^{p^n} - 1$ et $x^{p^{n'}} - 1$; il existe des polynomes irréductibles d'ordre μ; l'un d'eux définit des imaginaires de Galois et d'après le théorème précédent, i et j sont exprimables par les nouvelles imaginaires.

SUR LES RADICAUX CARRÉS

PAR

B. Niewenglowski (Paris).

On sait qu'étant donné un nombre quelconque d'irrationnelles algébriques, on peut exprimer chacune d'elles en fonction rationnelle d'une même irrationnelle. Je me propose d'étudier un cas particulier simple:

Soient x_1, x_2, ... x_n des nombres tels que

$$x_1^2 = a_1 , \quad x_2^2 = a_2 , \quad .. \quad x_n^2 = a_n ,$$

a_1, a_2, ... a_n étant rationnels, mais non tous carrés parfaits. Il s'agit de prouver que chacun des nombres x peut s'exprimer en fonction rationnelle de leur somme et de trouver les expressions de ces nombres.

Premier cas. — Soient les deux équations

$$x^2 = a \quad y^2 = b .$$

Si l'on pose:

$$x + y = V , \quad x - y = V' ,$$

on en tire

$$a - b = VV'$$

et, par conséquent:

$$2x = V + \frac{a-b}{V} = V' + \frac{a-b}{V'} ,$$

$$2y = V - \frac{a-b}{V} = \frac{a-b}{V'} - V' .$$

Remarquons que si l'on change y en $-y$, V se change en V' et les expressions de x et y en fonction de V' se déduisent immédiatement de leurs expressions en V. Il suffit donc de ne garder que la fonction V.

On peut remarquer encore l'identité

$$2a + 2b = V^2 + V'^2 = V^2 + \frac{(a-b)^2}{V^2}$$

ou, sous forme entière:

$$V^4 - 2(a+b)V^2 + (a-b)^2 = 0 .$$

On peut s'en servir pour exprimer x et y par des polynomes entiers en V. On peut en effet écrire:

$$2x = V + \frac{V}{a-b} \times \frac{(a-b)^2}{V^2} = V + \frac{V}{a-b}(2a + 2b - V^2) ,$$

c'est-à-dire:

$$2x = \frac{V^3 - (3a+b)V}{b-a}$$

et, pareillement

$$2y = \frac{(3b+a)V - V^3}{b-a} .$$

On peut obtenir ces deux expressions par une autre voie. Il suffit, en effet, de résoudre les deux équations

$$x + y = V ,$$

$$(a+3b)x + (b+3a)y = V^3 .$$

Ayant obtenu x et y en fonctions rationnelles de V, on en déduit le produit xy: mais il est plus simple de remarquer que

$$a + b + 2xy = V^2$$

donc

$$xy = \frac{1}{2}(V^2 - a - b) .$$

On arrive au même résultat en faisant le produit des expressions entières trouvées pour x et y, et en tenant compte de l'identité

$$V^4 - 2(a+b)V^2 + (a-b)^2 = 0$$

trouvée plus haut.

Remarque. — On peut obtenir pour x et y, une infinité d'expressions rationnelles en V, plus compliquées. On a ainsi une source inépuisable d'exercices de calcul algébrique. Je vais indiquer brièvement la marche à suivre.

On a vu que

$$V^3 = (a + 3b)x + (b + 3a)y .$$

Je dis que

$$V^{2n+1} = p_n x + q_n y .$$

On le voit en supposant la loi vérifiée jusqu'à V^{2n-1} et en multipliant membre à membre les égalités

$$V^{2n-1} = p_{n-1} x + q_{n-1} y , \qquad V^2 = a + b + 2xy .$$

On pourra alors écrire par exemple

$$p_{n-1} x + q_{n-1} y = V^{2n-1} \qquad p_n x + q_n y = V^{2n+1}$$

on reconnaît que

$$p_{n-1} q_n - q_{n-1} p \neq 0 \qquad \text{si} \qquad a \neq b .$$

On aura donc

$$x = A_n V^{2n-1} + B_n V^{2n+1} \qquad y = C_n V^{2n-1} + D_n V^{2n+1}$$

les coefficients de V^{2n-1} et V^{2n+1} étant rationnels.

En posant

$$x = A_1 V + B_1 V^3$$
$$x = A_2 V^3 + B_2 V^5$$
$$x = A_n V^{2n-1} + B_n V^{2n+1}$$

et en désignant par λ_1, λ_2, ... λ_n des nombres rationnels arbitraires on aura encore

$$x = \frac{A_1 \lambda_1 V + (B_1 \lambda_1 + A_2 \lambda_2) V^3 + (B_2 \lambda_2 + A_3 \lambda_3) V^5 + \dots + \lambda_n B_n V^{2n+1}}{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n} .$$

On pourrait encore exprimer x et y en fonction linéaire de deux puissances impaires non consécutives de V.

Quant au produit xy on peut l'exprimer au moyen de puissantes paires de V. On a:

$$V^{2n} = h_n + k_n xy .$$

On le reconnaît de proche en proche, en partant de V^2.

On peut donc écrire:

$$xy = \alpha_n V^{2n} + \beta_n .$$

Cela étant, ayant obtenu

$$y = F(V) ,$$

F désignant une fonction rationnelle, on en tire:

$$bx = F(V)\left[\alpha_n V^{2n} + \beta_n\right]$$

et pareillement pour y.

Deuxième cas. — Nous considérerons maintenant 3 radicaux x, y, z définis par

$$x^2 = a , \quad y^2 = b , \quad z^2 = c$$

et nous chercherons x, y, z en fonctions rationnelles de V, sachant que

$$x + y + z = V .$$

Il est très facile d'obtenir des fractions rationnelles donnant x, y ou z. Par exemple, en écrivant

$$V - x = y + z ,$$

il vient, en élevant au carré et tenant compte des hypothèses:

$$V^2 + a - 2Vx = b + c + 2yz$$

et

$$(V^2 + a - b - c - 2Vx)^2 = 4bc$$

d'où, enfin

$$x = \frac{(V^2 + a - b - c)^2 + 4aV^2 - 4bc}{4V(V^2 + a - b - c)} .$$

formules analogues pour y et z.

Il s'agit maintenant d'obtenir des expressions entières.

Pour plus de commodité, nous traiterons un cas particulier:

Posons

$$x + y + z = V \qquad (1)$$

avec

$$x^2 = 1 , \quad y^2 = 2 , \quad z^2 = 3 \qquad (2)$$

c'est-à-dire:

$$x = \varepsilon , \quad y = \varepsilon' \sqrt{2} , \quad z = \varepsilon'' \sqrt{3}$$

ε, ε', ε'' ayant pour valeurs, arbitrairement $+ 1$ ou $- 1$.

On a ainsi:

$$V = \varepsilon + \varepsilon' \sqrt{2} + \varepsilon'' \sqrt{3} .$$

En élevant au carré les deux membres de l'équation (1) et simplifiant à l'aide des équations (2), on a:

$$xy + zx + xy = \frac{1}{2} V^2 - 3 .$$

et par suite:

$$(x + y + z)(yz + zx + xy) = \frac{1}{2} V^3 - 3V .$$

Développant et simplifiant, en tenant compte de (1) et (2):

$$2x + y + 3xyz = \frac{1}{2} V^3 - 6V . \qquad (3)$$

Pareillement

$$(2x + y + 3xyz)(yz + zx + xy) = \left(\frac{1}{2} V^3 - 6V\right)\left(\frac{1}{2} V^2 - 3\right) .$$

Développant et simplifiant, on obtient:

$$10x + y + 3xyz = \frac{1}{4} V^5 - \frac{9}{2} V^3 + 8V . \qquad (4)$$

Enfin nous avons

$$(10x + y + 3xyz)(yz + zx + xy) = \left(\frac{1}{4} V^5 - \frac{9}{2} V^3 + 8V\right)\left(\frac{1}{2} V^2 - 3\right)$$

ou, plus simplement:

$$2x + y + 11xyz = \frac{1}{8} V^7 - 3V^5 + \frac{35}{2} V^3 - 42V . \qquad (5)$$

Les équations (1), (3), (4), (5) permettent de calculer x, y, z et xyz.

De (3) et (4) on tire immédiatement

$$8x = \frac{1}{4} V^5 - 5V^3 + 14V .$$

Les équations (5) et (3) donnent

$$8xyz = \frac{1}{8} V^7 - 3V^5 + 17V^3 - 36V .$$

Les équations (1) et (3) fourniront les valeurs de y et z. On trouve

$$y = -\frac{3}{64}V^7 + \frac{17}{16}V^5 - \frac{37}{8}V^3 + 4V ,$$

$$z = \frac{3}{64}V^7 - \frac{35}{32}V^5 + \frac{42}{8}V^3 - \frac{9}{4}V .$$

Supposons

$$\varepsilon = +1 \qquad \varepsilon' = -1 \qquad \varepsilon'' = +1$$

c'est-à-dire:

$$x = 1 , \quad y = -\sqrt{2} , \quad 2 = \sqrt{3}$$

$$V = 1 - \sqrt{2} + \sqrt{3} .$$

Nous aurons en particulier

$$V^5 - 20V^3 + 56V = 32 .$$

En continuant la même méthode, on pourrait obtenir d'autres équations du 1[er] degré en x, y, z et xyz et obtenir ainsi d'autres polynomes entiers en V ayant pour valeurs x, y, z et xyz. — D'autre part ayant calculé par exemple y, z et xyz, comme $xyz \times y \times z = bcx$, on pourra obtenir une autre expression pour x, etc.

Les calculs sont déjà compliqués avec 3 radicaux; avec un plus grand nombre de radicaux ils deviennent pénibles.

Troisième cas. — Cas général. Nous supposerons enfin qu'il y a un nombre quelconque n de radicaux carrés. Nous nous bornerons à prouver qu'ils s'expriment tous rationnellement en fonction de leur somme.

Soient donc

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = V$$

et

$$x_1^2 = a_1 , \quad x_2^2 = a_2 , \dots x_n^2 = a_n .$$

Nous emploierons la méthode indiquée par Desboves pour rendre rationnelle une équation où n'entrent que des radicaux carrés. Pour cela, nous poserons

$$x_2 + x_3 + \dots + x_n = W = V - x_1$$

et nous formerons les sommes

$$W + x_2 \,, \qquad W - x_2 \,,$$

$$W + x_2 + x_3 \,, \quad W + x_2 - x_3 \,, \quad W - x_2 + x_3 \,, \quad W - x_2 - x_3$$

et ainsi de suite, jusqu'à une dernière ligne dont nous n'écrirons que les termes extrêmes :

$$W + x_2 + x_3 + \ldots + x_n \,, \ldots\ldots W - x_2 - x_3 - \ldots - x_n$$

Le dernier terme de cette suite étant nul, par hypothèse, le produit de tous ses termes est nul aussi :

$$(W + x_2 + x_3 + \ldots + x_n) \ldots\ldots (W - x_2 - x_3 - \ldots - x_n) = 0 \,.$$

Ce produit contient 2^{n-1} facteurs. On reconnait aisément que dans le produit effectué les exposants de toutes les lettres sont pairs ; ce produit ne contiendra donc aucun des radicaux x_2, $x_3 \ldots x_n$; quant à x_1, à la première puissance, il figurera dans les puissances de W, c'est-à-dire de $V - x_1$. L'équation obtenue sera donc de la forme

$$f(V) - x_1 g(V) = 0$$

Les polynomes entiers $f(V)$, $g(V)$ étant à coefficients rationnels et respectivement de degrés 2^{n-1} et $2^{n-1} - 1$; on aura ainsi :

$$x_1 = \frac{f(V)}{g(V)}$$

on aurait des expressions analogues pour $x_2, x_3 \ldots x_n$.

Proposons nous, maintenant, d'obtenir des expressions entières en V. Nous suivrons la même marche que dans le cas de 3 radicaux.

Nous avons une première équation :

$$x_1 + x_2 + \ldots x_n = V \,.$$

On en déduit

$$\Sigma x_\alpha x_\beta = \frac{1}{2}(V^2 - h)$$

h étant une constante ; calculons le produit $\Sigma x_\gamma \Sigma x_\alpha x_\beta$.

Un produit partiel $x_\alpha x_\beta \times x_\gamma$ donne si $\gamma = \alpha$: $x_\alpha^2 x_\beta = a_\alpha x_\beta$.

Pareillement si $\gamma = \beta$, on obtient $a_\beta x_\alpha$, et si $\gamma \neq \alpha$ et $\gamma \neq \beta$ on a $x_\alpha x_\beta x_\gamma$. Le produit sera donc $\Sigma p x_\alpha + \Sigma q x_\alpha x_\beta x_\gamma$.

On voit de même que si l'on multiplie le produit obtenu par $\Sigma x_\alpha x_\beta$, on obtiendra une somme de termes contenant chacun 1, 3 ou 5 facteurs x. Et il en sera toujours ainsi, car en multipliant un produit d'un nombre impair de facteurs x, par $x_\alpha x_\beta$, si l'un de ces facteurs entre dans le produit partiel multiplicande le nombre des facteurs, après remplacement de x_α^2 par a_α ou x_β^2 par a_β ne change pas, et si x_α et x_β ne sont ni l'un ni l'autre facteurs dans le multiplicande, le produit aura deux facteurs de plus; la parité du nombre des facteurs est conservée. Nous aurons donc comme inconnues les termes x_α, leurs produits 3 à 3, 5 à 5 ... etc., c'est-à-dire un nombre d'inconnues égal à $C_n^1 + C_n^3 + \ldots$ le dernier terme étant C_n^{n-1} si n est pair et C_n^n si n est impair — cette somme est égale à 2^{n-1}. Il faudra donc former 2^{n-1} équations. On pourra ainsi, et d'une infinité de manières obtenir des expressions entières en V pour les x, en résolvant l'un quelconque des systèmes de 2^{n-1} équations linéaires ainsi obtenues. Le plus simple aura pour degré le nombre impair de rang 2^{n-1}, soit $2 . 2^{n-1} - 1$ ou $2^n - 1$. Remarquons maintenant que dans la fraction $\frac{f(V)}{g(V)}$ que nous avons obtenue plus haut, le numérateur est de degré 2^{n-1} et celui du dénominateur est $2^{n-1} - 1$; la somme de ces degrés est précisément $2^n - 1$. C'est ce que l'on peut vérifier pour les cas de $n = 2$ ou $n = 3$. Ayant obtenu pour x_α, x_β, x_γ et $x_\alpha x_\beta x_\gamma$ par exemple des représentations entières, on pourra en déduire pour x_α une représentation fractionnaire, car en supposant

$$x_\beta = P_\beta\,, \qquad x_\gamma = P_\gamma \qquad x_\alpha x_\beta x_\gamma = Q\,.$$

On aura

$$x_\alpha = \frac{Q}{P_\beta P_\gamma}\,, \qquad \text{etc.}$$

Remarque. Il résulte des calculs précédents que si V était rationnelle, chacune des quantités x_1, x_2, x_n serait rationnelle. Donc la somme

$$\sqrt{a} \pm \sqrt{b} \pm \sqrt{c} \ldots \pm \sqrt{l}$$

est irrationnelle, si tous les nombres a, b, c ... l ne sont pas des carrés parfaits.

Autre remarque. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ des nombres rationnels et la somme U définie par

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = U ;$$

Les x, définis comme plus haut sont des fonctions rationnelles de U. En effet, si l'on pose

$$\alpha_1 x_1 = y_1 , \quad \alpha_2 x_2 = y_2 \dots \alpha_n x_n = y_n$$

on a

$$y_1 + y_2 + \dots + y_n = U$$

$$y_1^2 = a_1 \alpha_1^2 , \quad y_2^2 = a_2 \alpha_2^2 \dots y_n^2 = a_n \alpha_n^2 ;$$

donc les y sont des fonctions rationnelles de U, et il en est de même, par suite, des x.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE LIOUVILLE PAR L'ÉLIMINATION DU TEMPS ENTRE LES ÉQUATIONS DE LAGRANGE

PAR

M. Émile TURRIÈRE (Montpellier).

---

1. La méthode de LIOUVILLE, lorsqu'elle est applicable à un système à k degrés de liberté, conduit à $2k$ quadratures indépendantes les unes des autres. Ces $2k$ quadratures se partagent en deux groupes. Un premier groupe de k quadratures fournit $k-1$ relations entre les seuls paramètres $q_1, q_2, \dots q_k$ du système; le second groupe de k quadratures donne par addition l'expression du temps.

Toutes les relations indépendantes du temps, qui déterminent géométriquement les trajectoires, se séparant ainsi, *comme conséquence du calcul*, des éléments cinématiques, je me suis proposé

d'examiner comment se présente cette séparation des quadratures, lorsqu'on applique à cette question de dynamique les résultats de la théorie de l'élimination du temps dans les équations de LAGRANGE. J'ai été conduit, par cette voie, à une nouvelle démonstration du beau théorème de LIOUVILLE.

L'élimination du temps dans les équations de LAGRANGE telle qu'elle a été effectuée par G. DARBOUX [1] et par M. P. PAINLEVÉ [2] conduit à $k - 1$ équations de même forme que les équations de LAGRANGE : ce sont des équations d'EULER du calcul des variations.

Je crois utile d'indiquer une méthode simple pour déduire ces équations de celles de LAGRANGE sans appliquer le principe de la moindre action. Pour préciser la signification des formules, et, dans un but didactique, j'appliquerai la méthode à deux exemples classiques.

2. *L'élimination du temps dans les équations de Lagrange.* — On sait combien la formule de BINET, dans le cas des forces centrales uniquement fonctions de la distance est utile pour permettre de déterminer la trajectoire d'un point matériel indépendamment du temps. Les k intégrales du théorème de LIOUVILLE donnant les relations entre les seuls paramètres permettent de même d'éliminer la notion du temps.

D'une manière générale, il y a lieu de se poser la question suivante. En prenant l'un des paramètres de LAGRANGE, q_1 par exemple, pour variable fondamentale, obtenir $k - 1$ équations différentielles dans lesquelles $q_2, q_3, q_4, \dots q_k$ soient les fonctions inconnues et q_1 la variable. Il suffit évidemment d'éliminer le temps entre deux équations de LAGRANGE, celle relative au paramètre q_1 et une autre équation.

Prenons donc deux paramètres, que j'appellerai x et y ; je me placerai dans le cas d'existence d'une fonction des forces U et de liaisons indépendantes du temps. Soit $T - U = h$, l'intégrale des forces vives. Les équations de LAGRANGE pour ces paramètres sont :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial x'}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial y'}\right) - \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial y}.$$

[1] G. DARBOUX. *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, 1889, t. II, p. 499.

[2] Les diverses communications faites en 1892 par M. P. PAINLEVÉ sur les changements de variables dans les équations de la dynamique se trouvent dans les *C. R.*, t. CXIV et CXV.

L'expression de T étant $T = X x'^2 + Y y'^2$, je poserai $\frac{dy}{dx} = \eta$,

$$T = x'^2 . \Theta \ , \qquad \Theta = X + \eta^2 Y \ , \qquad \eta = \frac{y'}{x'} \ ,$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = x'^2 \frac{\partial \Theta}{\partial y} \ , \qquad \frac{\partial T}{\partial y'} = x'^2 \frac{\partial \Theta}{\partial \eta} . \frac{\partial \eta}{\partial y'} = x' . \frac{\partial \Theta}{\partial \eta} \ .$$

L'intégrale des forces vives donne:

$$T = U + h \ , \qquad x'^2 . \Theta = U + h \ , \qquad x'^2 = \frac{U + h}{\Theta} \ .$$

Je pose encore:

$$\Omega^2 = \Theta . (U + h) \ , \qquad x' = \frac{\Omega}{\Theta} \ .$$

Comme U n'est pas fonction de η:

$$(U + h) \frac{\partial \Theta}{\partial \eta} = 2 \Omega . \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} \ .$$

$$\frac{\partial T}{\partial y'} = x' \frac{\partial \Theta}{\partial \eta} = \frac{2 \Omega}{U + h} . \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} . \frac{\Omega^2}{\Theta} = \frac{2 \Omega^2}{\Theta (U + h)} . \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} = 2 \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} \ .$$

Il est évident que la dérivation totale par rapport à t d'une fonction quelconque f donne lieu aux égalités suivantes:

$$\frac{df}{dt} = \frac{df}{dx} . \frac{dx}{dt} = \frac{df}{dx} . x' = \frac{\Omega}{\Theta} . \frac{df}{dx} \ .$$

L'équation de Lagrange relative au paramètre y devient alors, en application de ces diverses formules:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial y'} \right) = \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial y} \ .$$

$$\frac{\Omega}{\Theta} . \frac{d}{dx} \left(2 \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} \right) = x'^2 \frac{\partial \Theta}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{U + h}{\Theta} \frac{\partial \Theta}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial y} \ ,$$

$$2 \frac{\Omega}{\Theta} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \eta} \right) = \frac{1}{\Theta} \frac{\partial}{\partial y} \Big[(U + h) \Theta \Big] = \frac{1}{\Theta} \frac{\partial}{\partial y} (\Omega^2) = \frac{2 \Omega}{\Theta} \frac{\partial \Omega}{\partial y} \ ;$$

c'est-à-dire finalement:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \eta} \right) = \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} \ .$$

Telle est la forme définitive de l'équation de la trajectoire, dans laquelle:

$$\eta = \frac{dy}{dx} ; \qquad \Theta = \mathrm{T} : \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 ; \qquad \Omega^2 = (\mathrm{U} + h) \, . \, \Theta \, .$$

Elle a la forme de l'équation d'Euler du calcul des variations.

3. *Exemples.* — Prenons un exemple: celui du point matériel pesant dans le vide, en admettant que la trajectoire est plane et située dans le plan vertical Oxy. Alors (pour une masse $m = 2$):

$$\mathrm{T} = x'^2 + y'^2 , \qquad \mathrm{U} = -2gy$$
$$\Theta = 1 + \eta^2 , \qquad \Omega^2 = (h - 2gy)(1 + \eta^2) \, .$$

Ici, il convient de faire une remarque analogue à celle qui concerne les coordonnées cycliques; c'est que l'une des coordonnées, x, est absente de Ω.

Lorsque y est absente de Ω, l'équation trouvée donne

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \Omega}{\partial \eta}\right) = 0 ;$$

et par suite en intégrant

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \eta} = \text{constante} ,$$

$$\sqrt{\mathrm{U} + h} \, . \frac{\partial \sqrt{\Theta}}{\partial \eta} = \text{constante} \, .$$

Nous avons donc intérêt dans le cas actuel à prendre y et non x comme variable principale. Posons: $\rho = \dfrac{dx}{dy}$,

$$\Theta = 1 + \rho^2 , \qquad \Omega^2 = (h - 2gy)(1 + \rho^2) ;$$

il nous suffit d'écrire:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \rho} = a \quad \text{(constante)} \, .$$

Pour $t = 0$, le mobile part de l'origine O ($x = 0$, $y = 0$) avec une vitesse de projections ($v_0 \cos \alpha_0$, $v_0 \sin \alpha_0$). On a donc:

$$\rho_0 = \operatorname{cotg} \alpha_0 , \qquad \Theta_0 = \frac{1}{\sin^2 \alpha_0} , \qquad \Omega_0^2 = \frac{h}{\sin^2 \alpha_0} ;$$

d'ailleurs, d'après le théorème des forces vives, $h = v_0^2$; donc:

$$\Omega_0 = \frac{v_0}{\sin \alpha_0} .$$

Par dérivation, nous avons:

$$2\Omega \frac{\partial \Omega}{\partial \rho} = 2\rho(h - 2gy) ,$$

$$a\Omega = \rho(h - 2gy) ,$$

$$\frac{av_0}{\sin \alpha_0} = \frac{\cos \alpha_0}{\sin \alpha_0} v_0^2 , \qquad a = v_0 \cos \alpha_0 .$$

L'équation de la trajectoire se présente par suite sous la forme suivante:

$$a^2 . (h - 2gy)(1 + \rho^2) = \rho^2(h - 2gy)^2 ,$$

$$a^2(1 + \rho^2) = \rho^2(h - 2gy) ,$$

$$a^2 = \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 (h - a^2 - 2gy) ,$$

$$v_0^2 \cos^2 \alpha_0 = \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 (v_0^2 \sin^2 \alpha_0 - 2gy) ;$$

$$x - x_0 = \pm \int \frac{dy}{\sqrt{v_0^2 \sin^2 \alpha_0 - 2gy}} . v_0 \cos \alpha_0 ,$$

$$x - x_0 = \mp \frac{v_0 \cos \alpha_0}{g} \sqrt{v_0^2 \sin^2 \alpha_0 - 2gy} ;$$

la trajectoire est donc la parabole d'équation:

$$v_0^2 \sin^2 \alpha_0 - 2gy = \frac{g^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha_0} (x - x_0)^2 ;$$

en écrivant que pour $y = 0$, $x = 0$, on détermine la valeur de la constante x_0:

$$x_0 = \frac{v_0^2}{g} \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 ;$$

l'équation définitive de la parabole trajectoire est enfin:

$$\frac{2v_0^2 \cos^2 \alpha_0}{g} y + x^2 - 2xx_0 = 0 ,$$

$$y = - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha_0} + x \operatorname{tang} \alpha_0 .$$

C'est l'équation bien connue.

Passons au second exemple.

Dans le cas des forces centrales, uniquement fonction de la distance et en dynamique du plan:

$$2T = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2, \qquad U(r),$$

θ ne figure pas dans Ω. Il faut alors prendre r comme variable indépendante, et poser:

$$\eta = \frac{d\theta}{dr}, \qquad \Theta = r^2\eta^2 + 1, \qquad \Omega^2 = (U + h)(r^2\eta^2 + 1);$$

l'équation $\frac{\partial \Omega}{\partial \eta} = a$ (constante) conduit à la quadrature:

$$\theta = \pm a \int \frac{dr}{r^2\sqrt{U + h - \frac{a^2}{r^2}}}.$$

4. *Extension au cas d'un nombre quelconque de paramètres.* — Il suffit de prendre q_k, par exemple, pour coordonnée indépendante, et de poser:

$$\frac{dq_1}{dq_k} = \eta_1, \qquad \frac{dq_2}{dq_k} = \eta_2, \qquad \frac{dq_{k-1}}{dq_k} = \eta_k.$$

$$\Theta = Q_1\eta_1^2 + Q_2\eta_2^2 + \dots + Q_{k-1}\eta_{k-1}^2 + Q_k.$$

$$\Omega^2 = \Theta.(U + h);$$

Les $k - 1$ équations indépendantes du temps sont alors:

$$\frac{d}{dq_k}\left(\frac{\partial \Omega}{\partial \eta_1}\right) = \frac{\partial \Omega}{\partial q_1},$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\frac{d}{dq_k}\left(\frac{\partial \Omega}{\partial \eta_{k-1}}\right) = \frac{\partial \Omega}{\partial q_{k-1}}.$$

5. *Démonstration du théorème de Liouville.* — Pour simplifier l'exposé de la démonstration — (qui sera rapidement rendue générale ensuite) — je supposerai que l'énergie cinétique T a pour expression

$$T = (A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_k)\left(q_1'^2 + q_2'^2 + \dots + q_k'^2\right).$$

que la fonction des forces U est

$$U = \frac{U_1 + U_2 + \dots + U_k}{A_1 + A_2 + \dots + A_k},$$

et que la constante T — U des forces vives est nulle. Je prendrai q_k pour variable indépendante qui, pour simplifier l'écriture, sera désignée par q et je poserai :

$$\eta_1 = \frac{dq_1}{dq}, \quad \eta_2 = \frac{dq_2}{dq}, \dots \eta_{k-1} = \frac{dq_{k-1}}{dq}.$$

Les dérivés des fonctions

$$A_1(q_1), \quad U_1(q_1), \quad A_2(q_2), \quad U_2(q_2), \dots A_k(q_k), \quad U_k(q_k)$$

seront désignées par accentuation.

Dans ces conditions :

$$\Theta = (A_1 + A_2 + \dots + A_k)\left(\eta_1^2 + \eta_2^2 + \dots + \eta_{k-1}^2 + 1\right),$$
$$\Omega^2 = (U_1 + U_2 + \dots + U_k)\left(\eta_1^2 + \eta_2^2 + \dots + \eta_{k-1}^2 + 1\right);$$

pour simplifier encore l'écriture et l'impression, il y a lieu de poser :

$$\eta_1^2 + \eta_2^2 + \dots + \eta_{k-1}^2 = H - 1, \qquad U_1 + U_2 + \dots + U_k = U_0.$$
$$\Omega^2 = U_0 \,.\, H.$$
$$\Omega \frac{\partial \Omega}{\partial \eta_1} = \eta_1 \,.\, U_0, \qquad 2\Omega \frac{\partial \Omega}{\partial q_1} = U_1' \,.\, H;$$

la dérivation totale, par rapport à $q_k = q$ de l'avant-dernière égalité ci-dessus donne :

$$\Omega \frac{d}{dq}\left(\frac{\partial \Omega}{\partial \eta_1}\right) + \frac{d\Omega}{dq} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial \eta_1} = \frac{d\eta_1}{dq} \cdot U_0 + \eta_1 \frac{dU_0}{dq};$$

l'équation générale de la théorie de l'élimination du temps,

$$\frac{d}{dq}\left(\frac{\partial \Omega}{\partial \eta_1}\right) = \frac{\partial \Omega}{\partial q_1},$$

transforme l'équation précédente en la suivante:

$$\Omega \frac{\partial \Omega}{\partial q_1} + \frac{d\Omega}{dq} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial \eta_1} = U_0 \frac{d\eta_1}{dq} + \eta_1 \frac{dU_0}{dq} \; ;$$

$$\frac{1}{2} HU_1' + \frac{\eta_1 U_0}{\Omega} \cdot \frac{d\Omega}{dq} = U_0 \frac{d\eta_1}{dq} + \eta_1 \frac{dU_0}{dq} \; ,$$

$$\frac{1}{2} HU_1' + \frac{\eta_1 U_0}{2\Omega^2} \left(U_0 \frac{dH}{dq} + H \frac{dU_0}{dq} \right) = U_0 \frac{d\eta_1}{dq} + \eta_1 \frac{dU_0}{dq} \; ,$$

$$HU_1' + \frac{\eta_1}{H} \left(U_0 \frac{dH}{dq} + H \frac{dU_0}{dq} \right) = 2U_0 \frac{d\eta_1}{dq} + 2\eta_1 \frac{dU_0}{dq} \; .$$

$$H^2 U_1' + \eta_1 U_0 \frac{dH}{dq} = 2HU_0 \frac{d\eta_1}{dq} + \eta_1 H \frac{dU_0}{dq} \; ,$$

$$U_0 \left(2H \frac{d\eta_1}{dq} - \eta_1 \frac{dH}{dq} \right) + \eta_1 H \frac{dU_0}{dq} - H^2 U_1' = 0 \; :$$

il est évident que $U_1' = \frac{1}{\eta_1} \cdot \frac{dU_1}{dq}$; l'équation obtenue est donc:

$$U_0 (2H \,.\, d\eta_1 - \eta_1 \,.\, dH) + \eta_1 H \,.\, dU - \frac{H^2}{\eta_1} \,.\, dU_1 = 0 \; ;$$

elle s'écrit encore:

$$d \frac{U_0 \eta_1^2}{H} = dU_1 \; ;$$

une intégration, avec une constante additive α_1, donne alors:

$$\frac{U_0 \eta_1^2}{H} = U_1 + \alpha_1 \; ;$$

on a donc un système d'intégrales premières:

$$\frac{\eta_1^2}{H} = \frac{U_1 + \alpha_1}{U_0} \; , \; \ldots \; \frac{\eta_{k-1}^2}{H} = \frac{U_{k-1} + \alpha_{k-1}}{U_0} \; ;$$

l'addition membre à membre de ces égalités donne:

$$\frac{H-1}{H} = \frac{U_0 - U_k + \alpha_1 + \cdots + \alpha_{k-1}}{U_0} \; , \qquad \frac{1}{H} = \frac{U_k - \alpha_1 - \alpha_2 \cdots - \alpha_{k-1}}{U_0} \; ;$$

on peut poser, avec une constante α_k telle que

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k = 0 ,$$

les égalités suivantes:

$$\eta_1^2 = \frac{U_1 + \alpha_1}{U_k + \alpha_k} , \qquad \eta_{k-1}^2 = \frac{U_{k-1} + \alpha_{k-1}}{U_k + \alpha_k} ;$$

le problème est résolu par quadratures:

$$\frac{dq_1^2}{U_1 + \alpha_1} = \frac{dq_2^2}{U_2 + \alpha_2} = \ldots = \frac{dq_k^2}{U_k + \alpha_k} .$$

Si l'on se place dans le cas le plus général,

$$T = (A_1 + A_2 + \ldots + A_k)\left(B_1 q_1'^2 + B_2 q_2'^2 + \ldots + B_k q_k'^2\right) ,$$
$$T - U = h ,$$

il est manifeste qu'il faut remplacer U_1 par $U_1 + hA_1$, ... U_k par $U_k + hA_k$, dq_1^2 par $B_1 . dq_1^2$, . . dq_k^2 par $B_k\, dq_k^2$; d'où les formules bien connues:

$$\frac{B_1\, dq_1^2}{U_1 + hA_1 + \alpha_1} = \frac{B_2\, dq_2^2}{U_2 + hA_2 + \alpha_2} = \ldots = \frac{B_k\, dq_k^2}{U_k + hA_k + \alpha_k} .$$
$$\alpha_1 + \ldots + \alpha_k = 0 .$$

Le théorème des forces vives donne finalement l'expression de temps avec k quadratures.

LA SECTION MATHÉMATIQUE DE L'INSTITUT NORMAL SUPÉRIEUR DE BOLIVIE

PAR

Constant Lurquin (La Paz, Bolivie).

I. — Dans une note antérieure [1], nous avons fait connaître la méthode et les principes didactiques qui caractérisent l'enseignement mathématique à l'école normale primaire de Sucre, en Bolivie. Dans les lignes qui suivent nous nous proposons d'exposer brièvement l'organisation et la fonction éducative de la section des sciences mathématiques de l'institut normal supérieur de cette jeune république de l'Amérique latine. Fondée en 1917 pour la préparation et la formation à la fois théorique, pédagogique et technique des professeurs d'enseignement secondaire, cette école normale comprend différentes sections presque absolument autonomes. Elles n'ont de commun que quelques cours généraux relatifs aux sciences de l'éducation, langues étrangères, travaux manuels et graphiques. La section mathématique est l'objet de soins attentifs de la part des autorités administratives d'instruction et a déjà fourni au pays un contingent de jeunes professeurs actifs, laborieux et enthousiastes. Il est d'ailleurs acquis que l'institut normal supérieur est la pépinière des professeurs qui seront les artisans de réformes nombreuses, profondes et définitives dans l'enseignement secondaire.

II. — Plan général d'études. Les dispositions réglementaires exigent des candidats à l'admission le diplôme d'études secondaires complètes. Le système de la coéducation est mis en pratique. La durée des études est de quatre années. Le gouvernement accorde de nombreuses bourses. L'enseignement théorique comprend des cours de mathématiques supérieures, d'astronomie et de physique et, en dernière année, du travail de séminaire en vue de la préparation d'une petite dissertation originale. Les cours spéciaux de métho-

[1] Plan d'études mathématiques de l'enseignement normal primaire en Bolivie. (*L'Enseignement mathématique*, 19e année, p. 345-349, 1917.)

dologie mathématique sont d'un caractère fondamental et se répartissent sur les différentes années d'études. Il y a des examens réguliers annuels. En outre à l'épreuve finale, le candidat professeur défend sa dissertation et donne deux leçons de mathématiques à l'école secondaire. Le travail des étudiants est sanctionné par le titre de « professeur de mathématiques ». Voici un résumé synthétique des matières d'enseignement.

1. *Enseignement scientifique*. C'est la partie théorique qui comprend:

Revision du programme mathématique de l'enseignement secondaire (arithmétique, algèbre, géométrie).

Compléments d'arithmétique et de géométrie élémentaires.

Compléments d'algèbre: Fractions continues. Analyse indéterminée. Analyse combinatoire. Binôme de Newton. Calcul des radicaux. Fonction exponentielle. Complément de la théorie des logarithmes.

Trigonométrie plane et sphérique: Fonctions circulaires: formules générales. Tables et équations trigonométriques. Triangles rectilignes: triangles rectangles et quelconques. Quadrilatères. Applications numériques et topographiques. Triangles sphériques: formules générales; triangles rectangles et quelconques; applications.

Géométrie analytique. Deux dimensions: homogénéité; transformation des coordonnées. Ligne droite et cercle. Courbes du second degré; centres: diamètres et axes; tangentes et normales; pôles et polaires; ellipse, hyperbole et parabole; foyers et directrices; sections coniques; applications. Trois dimensions: point; plan; ligne droite. Surfaces de révolution.

Géométrie descriptive. Représentation du point, de la droite et du plan: problèmes correspondants; les polyèdres: représentation. sections planes, intersections; rabattements, rotations; vraies distances et grandeurs angulaires.

Notions sommaires de *géométrie projective*.

Algèbre supérieure. Eléments de la théorie des déterminants. Quantités complexes. Théorie des équations algébriques, équations numériques. Eléments du calcul des différences.

Analyse infinitésimale. Calcul différentiel: infiniment petits; différentielles. Applications analytiques: vraies valeurs, formule de Taylor et de Maclaurin; maxima et minima des fonctions d'une variable. Changement de variables. Applications géométriques: tangente et normale à une courbe plane; analyse des courbes planes; enveloppes; courbure; courbes gauches, tangente, plan osculateur, courbure et torsion. Calcul intégral: fonction primitive; intégrale indéfinie; intégrales définies simples; quelques méthodes d'intégration. Théorie élémentaire des intégrales définies. Applications géométriques: mesure des aires planes, rectification des courbes, volume d'un solide à bases parallèles, aire des surfaces de révolution. Intégrales doubles. Applications: cubature des solides et quadrature des surfaces en général. — Equations différentielles: formation; équations différen

tielles du premier ordre; équations différentielles linéaires. Appendice: notions sur la théorie des fonctions d'une variable complexe.

Calcul des probabilités. Principes généraux; probabilités totales et composées; espérance mathématique; fonction θ. Théorème de Bernoulli et loi de Poisson. Probabilité des causes. Théorie des erreurs d'observation.

Exercices de mathématiques[1]. Travaux graphiques de géométrie descriptive. Travail de séminaire.

Cosmographie générale. Topographie, Astronomie physique. Eléments d'astronomie physique. Exercices pratiques de topographie.

Physique expérimentale. Mécanique rationnelle. Physique mathématique générale. Manipulations de physique.

2. *Enseignement pédagogique.* C'est la partie technique qui sera traitée en détail au paragraphe suivant et comprenant principalement:

a) la méthodologie spéciale de l'enseignement des mathématiques au collège secondaire.

b) l'étude détaillée des programmes mathématiques secondaires.

c) les exercices didactiques à l'école d'application consistant en leçons suivies d'une critique raisonnée.

III. — Préparation professionnelle. Il n'est sans doute pas inutile de rappeler que les écoles normales supérieures sud-américaines (les deux principales sont «el instituto pedagogico» de Santiago du Chili et «el instituto del profesorado secundario» de Buenos Aires) constituent un exemple intéressant de conciliation d'une culture scientifique supérieure avec une préparation professionnelle intensive. Nous avons adopté également ce point de vue dans l'œuvre d'organisation de la section mathématique de l'institut normal supérieur de Bolivie. Les moyens suivants ont été employés pour réaliser l'initiation technique des aspirants au professorat secondaire. La préparation professionnelle comprend une partie théorique et une partie pratique. La première est d'un caractère véritablement scientifique et constitue la base de la seconde. En d'autres mots, cette partie théorique est un enseignement essentiellement méthodologique et comprend les cours:

1. *Méthodologie mathématique générale:* exposé des méthodes de raisonnement, d'investigation et d'enseignement mises en œuvre dans l'étude des sciences exactes.

2. *Méthodologie mathématique spéciale de l'enseignement secondaire:* étude détaillée des programmes d'instruction avec attention particulière à l'analyse et au développement des matières d'enseignement.

3. *Instructions méthodologiques pour les programmes mathématiques*

---

[1] A l'Institut normal supérieur de La Paz, des tableaux noirs individuels disposés le long des murs de la classe de mathématiques, permettent le travail collectif de tous les élèves d'un même cours.

secondaires: cours complémentaire du précédent et relatif à l'examen des principes et directives pédagogiques indispensables à l'application rationnelle et féconde des programmes.

4. *Etude historico-critique des mathématiques élémentaires* (arithmétique, géométrie. algèbre, trigonométrie). La partie pratique de la préparation professionnelle est réalisée au moyen du programme:

1. *Exercices pratiques d'enseignement dans les écoles secondaires d'application.* Dès la seconde année d'études, les aspirants professeurs assistent à des leçons modèles. Pendant les deux dernières années des leçons sont données par les aspirants eux-mêmes. Cet apprentissage pédagogique se fait sous la direction du professeur de l'institut normal et de celui du lycée.

2. *Travaux didactiques.* Chaque étudiant construit, pour ses besoins personnels, un matériel didactique destiné à l'enseignement des mathématiques élémentaires au collège secondaire: tableaux muraux; collection de corps géométriques [1]; séries graduées d'applications, exercices, problèmes; etc.

IV. — Laboratoire d'enseignement mathématique. Le souci de l'initiation professionnelle théorique et pratique par une méthode scientifique et adéquate nous a conduits à élaborer un organisme spécial: le laboratoire d'enseignement mathématique. C'est un élément primordial dans la formation et le développement des facultés et des initiatives de l'étudiant. Il crée à la fois une ambiance d'intellectualité et de travail ainsi qu'une atmosphère de bonne et franche solidarité. Voici ses principales activités:

1. *Bibliothèque mathématique* formée de traités didactiques, d'ouvrages méthodologiques, de livres d'enseignement et de revues pédagogiques. La bibliothèque est une salle de travail pour les élèves.

2. *Collections mathématiques* formées de tableaux muraux, instruments mathématiques, séries de corps géométriques, surfaces pour la géométrie, modèles élémentaires pour la mécanique, matériel des élèves, etc.

3. *Cercle d'études mathématiques* pour fortifier les rapports entre professeurs et étudiants et s'occuper d'organiser des conférences, lectures, discussions, échanges d'idées sur des sujets mathématiques variés.

4. *Bureau de statistique scolaire* pour l'interprétation mathématique des résultats de mesures anthropologiques faites dans les écoles de Bolivie.

5. *Publications* destinées à faire connaître l'activité scientifique de la section. Nous signalons les travaux suivants qui sont publiés: sobre algunas transformaciones de trigonometria esferica; demostracion analitica del teorema de Bernoulli; l'introduction du calcul

---

[1] La construction de ce matériel est connexe au cours de travaux manuels.

des dérivées dans l'enseignement secondaire; sur la notion de probabilité.

6. *Rédaction des nouveaux programmes* de mathématiques pour l'enseignement secondaire et des instructions pédagogiques pour leur application.

En terminant cette note nous exprimons l'espoir de pouvoir faire connaître bientôt une étude d'ensemble sur l'enseignement mathématique en Bolivie, qui formera une contribution de cette république sud-américaine aux travaux de la Commission internationale de l'enseignement mathématique.

CHRONIQUE

Etats-Unis. — Thèses de doctorat.

Doctorats ès sciences mathématiques décernés par les universités américaines pendant l'année universitaire 1920-1921. En voici la liste d'après le *Bulletin of the American Mathematical Society* :

N. M. ALDERTON (California): Involutory quartic transformations in space of four dimensions. — B. M. ARMSTRONG (Illinois): Mathematical induction in group theory. — E. M. BERRY (Iowa): Diffuse refection. — R. BLODGETT (Radcliffe) : Determination of the coefficient in interpolation formulae and a study of the approximate solution of integral equations. — P. H. DAUS (California) : Normal ternary fraction expansions for the cube roots of integers.— W. E. EDINGTON (Illinois) : Abstract group definitions and applications. — M. C. FOSTER (Yale) : Rectilinear congruences referred to special surfaces. — Ph. FRANKLIN (Princeton): Four color Problems. — M. I. LOGSDON (Chicago): Equivalence and reduction of pairs of hermitian forms. — I. ROMAN (Chicago) : Transformation of waves through a symmetrical optical instrument. — D. V. STEED (California): Lines on the hypersurface of order $2n-3$ in space of n dimensions. — J. SUN (Syracuse): Some determinant theorems. — F. D. SUTTON (Johns Hopkins) : Certain chains of theorems in reflective geometry. — E. E. WOOD (Chicago): Certain relations between the projective theory of surfaces and the projective theory of congruences.

Société mathématique suisse.

Réunion de Bienne, 23 avril 1922.

La Société mathématique suisse a tenu une réunion de printemps à Bienne, le dimanche 23 avril 1922, sous la présidence de M. G. Dumas, professeur à l'Université de Lausanne. Sur l'invitation du comité, MM. les professeurs W. Blaschke et Hecke, de l'Université de Hambourg, et M. Plancherel, de l'Ecole polytechnique fédérale de Zurich, ont présenté les conférences dont on trouvera ci-après un résumé. En outre, des communications furent présentées par MM. E. Guillaume, G. Polya et D. Mirimanoff.

Conférences.

1. *Conférence* de M. E. Hecke (Hambourg). — *Arithmétique et Théorie des fonctions.* — Les plus grands progrès de l'arithmétique ont été effectués lorsqu'on a appliqué aux questions qui y ressortissent le moyen puissant qu'offre l'analyse des variables continues. Il suffit de se rappeler le nom du fondateur de la théorie analytique des nombres : Dirichlet, ainsi que ceux de Gauss, Abel, Kronecker, Kummer, qui firent voir l'importance de la fonction exponentielle et de la fonction elliptique modulaire pour l'arithmétique supérieure.

Une question importante se pose : *Quel secours doit-on attendre de l'analyse* dans l'édification complète de la théorie des corps de nombres algébriques de degrés supérieurs, théorie que l'on doit à Kummer, Dedekind et Hilbert ? *Quels problèmes de théories des fonctions ces questions arithmétiques soulèvent-elles ?*

Le conférencier esquisse les méthodes et les résultats en rapport avec ces matières.

Dans le corps quadratique réel $K(\sqrt{3})$, les « nombres entiers » sont les nombres $\mu = m + n\sqrt{3}$ (m, n, étant rationnels entiers) pour lesquels il est aisé de définir la divisibilité. Les nombres les plus importants du corps sont les diviseurs du nombre 1; ce sont par suite des diviseurs de tous les nombres entiers. C'est précisément le cas du nombre $\varepsilon = 2 + \sqrt{3}$ « l'unité fondamentale » $\left(\frac{1}{\varepsilon} = 2 - \sqrt{3}\right)$ et des nombres $\pm \varepsilon^n$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) que l'on désigne tous sous le nom d'« unités »; grâce à ces nombres, il est possible de décomposer chaque nombre entier μ en un produit de facteurs entiers, par exemple $\mu = \varepsilon . \frac{\mu}{\varepsilon}$; ces décompositions en facteurs sont peu intéressantes. Les nombres premiers dans $K(\sqrt{3})$ sont des nombres entiers du corps qui ne peuvent être décomposés en un produit de facteurs

entiers — les facteurs unités étant exclus. On peut alors démontrer que chaque nombre entier du corps est décomposable d'une seule manière en un produit de facteurs premiers, pourvu que l'on fasse abstraction des facteurs unités.

Dirichlet a déjà reconnu la signification de la fonction:

$$\zeta_k(s) = \sum_{(\mu)}{}' \frac{1}{|N(\mu)|^s} \qquad (N(\mu) = \mu\mu' = m^2 - 3n^2)$$

qui est, par rapport au corps $K(\sqrt{3})$, l'analogue de ce qu'est la fonction $\zeta(s)$ de Riemann pour le corps naturel. Dans l'expression de $\zeta_k(s)$, la sommation porte sur toutes les valeurs entières $\mu \neq 0$, du corps qui ne sont pas associées, c'est-à-dire telles que deux d'entre elles ne diffèrent pas par un facteur unité. Cette fonction de la variable s, par suite de l'unicité de la décomposition d'un entier, est représentable en un produit infini :

$$\zeta_k(s) = \prod_{(\pi)} \frac{1}{1 - \frac{1}{|N(\pi)|^s}},$$

où π passe par tous les nombres premiers non associés. Les propriétés de la fonction analytique $\zeta_k(s)$ jouent un grand rôle dans la recherche des nombres premiers du corps. L'un des premiers résultats relatifs à ce point est le théorème de Dirichlet, qui assure qu'il existe une infinité de nombres premiers π.

Considérons maintenant l'ensemble des nombres $m + n\sqrt{3}$ comme une multiplicité à deux dimensions; les recherches récentes ont eu pour but l'étude de certaines fonctions des deux variables qu'on peut attacher au corps. Voici comment il nous paraît que le pas essentiel peut être effectué dans cette direction : Par analogie avec les recherches classiques, formons la forme quadratique définie qui correspond au corps $K(\sqrt{3})$, soit $A\mu^2 + A'\mu'^2$, où μ et μ' sont conjugués et A et A' positifs; puis formons pour $s > 1$ la série convergente

$$\sum_{\mu} \frac{1}{(A\mu^2 + A'\mu'^2)^s}$$

la sommation étant étendue à toutes les valeurs entières de μ, à l'exclusion de $\mu = 0$. En multipliant les dénominateurs par un nombre approprié C^s on peut s'arranger pour que $AA' = 1$; posons alors $A = e^x$, $A' = e^{-x}$, nous obtenons alors la fonction

$$Z(s\,;\,x) = \sum_{\mu} \frac{1}{(e^x\mu^2 + e^{-x}\mu'^2)^s}$$

des deux variables s et x. De telles fonctions de s ne sont pas inconnues en analyse, mais ce qui fait leur importance pour la théorie arithmétique du corps K, c'est leur périodicité en x. En effet, puisque μ parcourt toute la suite des entiers du corps, $\varepsilon\mu$ parcourt aussi toute cette suite, par conséquent :

$$Z(s\,;\,x + 2\log\varepsilon) = Z(s\,;\,x)\,.$$

On peut donc développer Z en série de Fourier

$$Z(s\,;\,x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n e^{\frac{\pi i n}{\log \varepsilon} x}\,.$$

Il se trouve précisément que c_0 (à un facteur banal près) est $\zeta_k(s)$ et que les autres coefficients c_n sont liés simplement aux fonctions :

$$\zeta(s\,,\,\lambda_n) = \sum_{(\mu)} \frac{\lambda_n(\mu)}{|\,N(\mu)\,|^s} = \prod_{(\pi)} \frac{1}{1 - \dfrac{\lambda_n(\pi)}{|\,N(\pi)\,|^s}} \qquad (n = 0\,,\,1\,.\,...)$$

où

$$\lambda_n(\mu) = e^{\frac{\pi i n}{\log \varepsilon}\log\left|\frac{\mu}{\mu'}\right|}\,;$$

on voit que

$$\lambda_n(\varepsilon\mu) = \lambda_n(\mu)\,; \qquad \lambda_n(\alpha\beta) = \lambda_n(\alpha)\,.\,\lambda_n(\beta)\,.$$

Cette suite infinie de fonctions est en quelque manière un équivalent de la fonction de deux variables Z $(s; x)$. Par suite de l'unicité de la décomposition d'un entier du corps en produit de facteurs premiers, on tire des faits précédents, le résultat suivant: *L'expression* $m^2 - 3\,n^2$ *représente une infinité de nombres premiers, même si l'on ne considère que les nombres* m, n *situés dans le plan des* m, n *à l'intérieur d'un angle de sommet* 0(0. 0) *et de valeur aussi petite que l'on veut.*

La représentation intégrale bien connue de $\Gamma(s)$ permet de passer à une autre fonction de 2 variables, qui n'est pas autre chose qu'une série thêta à deux variables:

$$\vartheta(\tau\,,\,\tau') = \sum_{\mu} e^{\pi i(\tau\mu^2 + \tau'\mu'^2)}\,,$$

la sommation étant étendue à tous les nombres entiers du corps; τ et τ' sont des variables complexes dont la partie imaginaire a un

coefficient positif. La théorie des fonctions théta permet de déduire les propriétés d'invariance:

$$\vartheta(\varepsilon^2\tau, \varepsilon'^2\tau') = \vartheta(\tau, \tau'), \qquad \vartheta(\tau+\alpha, \tau'+\alpha') = \vartheta(\tau, \tau') \qquad (1)$$

(pour tout entier α)

et

$$\vartheta^8\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}, \frac{\alpha'\tau'+\beta'}{\gamma'\tau'+\delta'}\right) = (\gamma\tau+\delta)^4(\gamma'\tau'+\delta')^4\,\vartheta^8(\tau, \tau')$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ étant quatre entiers quelconques du corps, assujettis à satisfaire à la condition $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, et à certaines congruences relatives au module 4.

Avec l'aide d'une formule particulière de l'espèce précédente, on peut démontrer que $Z(s; x)$ est prolongeable et l'on en tire une équation fonctionnelle pour cette même $Z(x; s)$; par suite, on en déduit des résultats analogues pour toutes les $\zeta(s, \lambda_n)$. Celles-ci sont, après multiplication par $(s-1)$, des fonctions transcendantes entières de s.

Grâce à ces fonctions théta, nous avons réussi à atteindre le domaine des *fonctions modulaires à deux variables*. On en déduit des conclusions qui peuvent être considérées comme une généralisation de la théorie de la division du cercle, et de celle de la multiplication complexe des fonctions elliptiques. Si l'on n'a égard qu'à l'invariance suivant les équations (1), on arrive, par exemple, aux séries suivantes:

$$\varphi(\tau, \tau') = \sum_{\mu>0} e^{\pi i(\tau\mu+\tau'\mu')}\,N(\mu)^{k-1}$$

k étant un nombre fixe $\geqq 1$; la sommation ne porte que sur les entiers totalement positifs du corps c'est-à-dire sur ceux pour lesquels on a, à la fois $\mu > 0$, $\mu' > 0$. Ces fonctions représentent la véritable généralisation de la fonction exponentielle pour le cas de plusieurs variables; elles se décomposent en fractions rationnelles, pour ainsi dire:

$$\varphi(\tau, \tau') = A(k)\sum_{\mu}\frac{1}{(\tau\sqrt{3}+\mu)^k(\tau'\sqrt{3}-\mu')^k},$$

$A(k)$ étant indépendant de τ et τ'; la sommation porte sur tous les entiers du corps. Cette équation correspond à la décomposition bien connue de $\cot \pi z$, $\frac{1}{\sin^2\pi z}$, etc.... Mais alors que ces fonctions sont prolongeables dans tout le plan des z, les pôles et un point singulier essentiel mis à part, on constate que $\varphi(\tau, \tau')$ n'est définie que dans le domaine où τ et τ' ont des coefficients de $\sqrt{-1}$ positifs. Il est possible d'étudier l'allure de φ dans le voisinage des points (singuliers),

frontières de ce domaine. En effet, puisque $\varphi(\varepsilon\tau, \varepsilon'\tau') = \varphi(\tau, \tau')$ on en déduit pour $\varphi(\tau e^x, \tau' e^{-x})$ un développement de Fourier d'après $e^{\frac{2\pi i x}{\log \varepsilon}}$, ce développement met alors en évidence l'allure de φ dans le voisinage de $\tau = \tau' = 0$; φ est infini comme $\frac{\text{const}}{\tau\tau'}$; des développements analogues sont valables dans le voisinage des points $\tau = \frac{\rho}{2\sqrt{3}}$, $\tau' = \frac{-\rho'}{2\sqrt{3}}$ où ρ est un non-entier du corps. Lorsqu'on s'approche de ces points φ ne devient infini que comme $\mathcal{C} \log\left(\tau - \frac{\rho}{2\sqrt{3}}\right)\left(\tau' + \frac{\rho'}{2\sqrt{3}}\right)$; ces facteurs $\mathcal{C}$ sont liés aux *nombres de classes de certains corps supérieurs.*

Pour le traitement analytique de la théorie additive des nombres dans $K(\sqrt{3})$, les fonctions φ forment le moyen le plus commode.

Enfin par une nouvelle sommation, les fonctions φ engendrent les fonctions modulaires et celles-ci donnent lieu à des représentations analogues aux *séries d'Einstein.* Par exemple, sommons par rapport à tous les μ entiers, et plus par rapport aux seuls nombres non associés $\varkappa(\varkappa \neq 0)$, dans l'expression:

$$f(\tau, \tau') = \sum_{(\varkappa)} \frac{1}{(\varkappa\varkappa')^k} + \sum_{(\varkappa)} \sum_{(\mu)} \frac{1}{(\varkappa\tau + \mu)^k (\varkappa'\tau' + \mu')^k}.$$

Pour une valeur entière de $\varkappa$ supérieure à 2, $f(\tau, \tau')$ est absolument convergente et l'on a:

$$f\left(\frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta}, \frac{\alpha'\tau' + \beta'}{\gamma'\tau' + \delta'}\right) = (\gamma\tau + \delta)^k (\gamma'\tau' + \delta')^k f(\tau, \tau')$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ étant des entiers du corps de déterminant 1.

2. — Conférence de M. Michel Plancherel (Zurich): *Sur le passage à la limite des équations aux différences aux équations différentielles dans les problèmes aux limites de la physique mathématique.* — Le passage du discret au continu peut se faire en mécanique de deux manières différentes. Ou bien on effectue le passage à la limite sur les équations du mouvement; on est ainsi conduit à des équations différentielles ou aux dérivées partielles que l'on regarde alors comme les équations du mouvement des milieux continus. Ou bien on effectue plus tard ce passage à la limite, à savoir sur les solutions du problème discret. Alors que la première manière est celle que les mathématiciens du XVIIIme et du début du XIXme siècle ont souvent utilisée pour trouver les équations des milieux continus, la seconde a été entre les

mains de physiciens tels que lord Rayleigh un procédé heuristique puissant pour trouver les solutions des problèmes aux limites de la théorie des équations aux dérivées partielles, par exemple, l'existence d'une infinité de vibrations fondamentales et leurs propriétés. Tout naturellement la question se pose: est-ce que ces deux passages à la limite conduisent aux mêmes résultats? En d'autres termes: les petits mouvements d'un système continu autour d'une position d'équilibre peuvent-ils être envisagés comme cas limite des petits mouvements d'un système fini de points matériels?

Formulé mathématiquement dans le cas le plus simple, le problème est le suivant: Soit

$$\frac{d}{dx}\left(p\frac{du}{dx}\right) + qu + \lambda u = f(x) \qquad (1)$$

$$u(o) = u(1) = 0 \qquad (2)$$

un problème aux limites pour une équation adjointe à elle-même. On suppose $p(x) > 0$. Soit d'autre part

$$\frac{1}{h^2}\Delta\left(p_i \Delta u_{i-1}\right) + q_i u_i + \lambda u_i = f_i\ , \quad i = 1, 2, \ldots, \quad n-1 \qquad (3)$$

$$u_0 = u_n = 0 \qquad (4)$$

le problème aux limites pour l'équation aux différences correspondante. Ici

$$h = \frac{1}{n}\ , \quad p_i = p\left(\frac{i}{n}\right), \quad q_i = q\left(\frac{i}{n}\right), \quad f_i = f\left(\frac{i}{n}\right).$$

Peut-on affirmer que si n tendant vers l'infini et $\frac{i}{n}$ vers x, on a lim $u_i = u(x)$? Peut-on calculer les valeurs et les fonctions fondamentales de l'équation homogène correspondant à (1) comme limites des valeurs et des solutions fondamentales des équations homogènes correspondant à (3) ?

La réponse est affirmative et le but de la conférence était d'esquisser la méthode permettant de donner cette réponse.

Les étapes de la démonstration sont en gros les suivantes:

A. On introduit pour les équations aux différences (3) une expression jouant pour elles le même rôle que la fonction de Green de l'équation (1) et ayant des propriétés analogues.

B. On résoud directement le passage à la limite du problème

$$\frac{1}{h^2}\Delta^2 u_i = f_i\ , \quad i = 1, 2, \ldots, n-1 \qquad (5)$$

$$u_0 = u_n = 0 \qquad (6)$$

au problème
$$\frac{d^2u}{dx^2} = f(x) \qquad (7)$$
$$u(0) = u(1) = 0. \qquad (8)$$

C. On ramène ensuite la résolution de l'équation (1) sous les conditions (2) à celle d'une équation intégrale

$$u(x) + \int_0^1 K(\lambda\,;\, x,\, y)\, u(y)\, dy = F(x) \qquad (9)$$

où K dépend de la fonction de Green de (7).

On ramène, d'une manière analogue, la résolution des équations (3) sous les conditions (4) à celle d'un système

$$u_i + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} K_{ik}\, u_k = F_i \qquad (10)$$

où K_{ik} dépend de λ et de la fonction de Green de (5). De plus, lorsque n tend vers l'infini et lorsque

$$\frac{i}{n} \longrightarrow x \,, \quad \frac{k}{n} \longrightarrow y$$

$$lim\ K_{ik} = K(\lambda\,;\, x,\, y) \,, \quad lim\ F_i = F(x)$$

Les résultats classiques de M. Hilbert sur la résolution d'une équation intégrale par le passage à la limite d'un système d'équations algébriques permettent alors de conclure que la solution u_i de (10) converge vers la solution $u(x)$ de (9).

La méthode s'étend au cas des équations aux dérivées partielles. Dans l'étape B l'équation $\Delta u = f$ remplace tout naturellement l'équation (7). Mais le passage à la limite de B n'est plus aussi immédiat et demande une étude assez délicate. De même dans l'étape C, les noyaux qui se présentent ne sont plus bornés, ce qui exige quelques précautions nouvelles.

3. — Conférence de M. Blaschke. — *Chapitres choisis de géométrie différentielle.* — Le Conférencier expose les méthodes et les problèmes de la *géométrie différentielle affine*, c'est-à-dire de l'ensemble des questions qui se formulent au moyen d'expressions invariantes vis-à-vis des transformations affines (projectivités avec conservation du parallélisme). On se rend compte que l'on peut construire une géométrie différentielle invariante vis-à-vis de l'affinité, présentant une analogie remarquable et étroite avec la géométrie différentielle ordinaire; on y peut, par exemple, définir les notions de longueur d'arc, courbure et torsion, puis pour les surfaces courbes, les notions d'aire, de normale à la surface, de lignes de courbure, d'élément d'arc, etc.,

ces notions possédant entre elles les mêmes relations que les notions correspondantes de la géométrie ordinaire.

Comme exemple d'application de ces méthodes l'auteur a démontré les théorèmes suivants:

Chaque ovale a au moins six points possédant une conique osculatrice stationnaire.

Un corps convexe dont toutes les lignes de gravité sont rectilignes est nécessairement un ellipsoïde. Les lignes de gravité sont les courbes, lieux des centres de gravité de sections planes parallèles.

Enfin, l'auteur exposa les plus simples problèmes de variation de la géométrie affine (Intégrales simples et intégrales doubles avec ou sans conditions auxiliaires).

La bibliographie du sujet se compose des mémoires classés sous le titre de « Ueber affine Geometrie, I-XXV dans les *Leipziger Berichte* 1916-1919, XXVI à XXXII dans la *Mathematische Zeitschrift*, 1922, et XXIII à XXXVII dans les *Abhandlungen des math. Seminars der Hamburgischen Universität*, 1 (1922). Le deuxième volume des *Vorlesungen über Differentialgeometrie* du conférencier lui-même (Springer, Berlin, 1923) donnera un exposé synthétique de la question.

COMMUNICATIONS.

1. — M. G. POLYA (Zurich). — *Prolongement analytique.* — Je dirai qu'une fonction $f(z)$ est de « type normal » dans l'angle $\alpha \leq \arc z \leq \beta$ si $f(z)$ est holomorphe dans cet angle et y satisfait à une inégalité de la forme $|f(z)| < Ae^{a|z|}$, A et a étant des constantes positives. Pour une fonction entière de type normal l'angle comprend le plan entier. Soit $g(z)$ une fonction entière de type normal. Je désignerai la fonction

$$h(\varphi) = \overline{\lim_{r=\infty}} \frac{lg\,|g(re^{i\varphi})|}{r}$$

de la variable réelle φ comme « l'indicateur » de $g(z)$.

1. L'indicateur est la « fonction caractéristique » (= Stützgeradenfunktion) d'une courbe convexe, dite la « figure adjointe » de $g(z)$, qui dans des cas particuliers peut se réduire à un polygone, à un segment de droite ou à un point.

2. Le prolongement analytique des séries

$$\bar{g}(0)\,w^{-1} + \bar{g}'(0)\,w^{-2} + \bar{g}''(0)\,w^{-3} + \ldots = \mathcal{B}(w)$$

$$\bar{g}(0)\,e^{-w} + \bar{g}(1)\,e^{-2w} + \bar{g}(2)\,e^{-3w} + \ldots = \mathcal{C}(w)$$

$$\bar{g}(lg1)\,1^{-1-w} + \bar{g}(lg2)\,2^{-1-w} + \bar{g}(lg2)\,3^{-1-w} + \ldots = \mathcal{D}(w)$$

est holomorphe et uniforme à l'extérieur de la figure adjointe de $g(z)$ mais a un point singulier sur chaque droite qui s'appuie sur cette figure (chaque « Stützgerade »). Dans le cas des séries $\mathcal{B}(w)$ et $\mathcal{D}(w)$

je parle du plan entier des w, $g(z)$ étant une fonction de type normal quelconque, dans le cas de la série $\mathcal{C}(w)$ je ne considère qu'une bande horizontale de largeur 2π à l'intérieur de laquelle la figure adjointe de $g(z)$ est supposée comprise.

3. Une fonction $f(z)$ de type normal dans le demi-plan $\mathcal{R}(z) \geqq 0$ satisfaisant aux conditions

$$f(0) = f(1) = f(2) = f(3) = \ldots = 0$$

$$|f(+ir)| + |f(-ir)| < \exp\left(r\left(\pi - \frac{a}{lgr \cdot lg_2 r \ldots lg_{m-1} r (lg_m r)^{1+\varepsilon}}\right)\right)$$

pour r assez grand, a étant une constante positive, s'annulle identiquement si $\varepsilon = 0$, mais peut être $\not\equiv 0$, si $\varepsilon > 0$.

4. Une fonction entière $g(z)$ satisfaisant à une inégalité de la forme $|g(z)| < |z|^a e^{\pi|z|}$ pour $|z|$ suffisamment grand qui s'annulle pour $z = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ est $\equiv \mathfrak{P}(z) \sin \pi z$, ou $\mathfrak{P}(z)$ est un polynome.

5. Soit N (r) le nombre des zéros de $g(z)$ dans le cercle $|z| \leqq r$, $g(z)$ désignant une fonction entière de type normal. On a

$$\varliminf_{r=\infty} \frac{N(r)}{r} \leqq \frac{U}{2\pi}$$

U désignant le pourtour de la figure adjointe de $g(z)$.

6. Admettons pour simplifier que tous les points singuliers sur le cercle de convergence d'une série entière soient des pôles. On peut affirmer que l'arc entre deux pôles consécutifs quelconques n'excède pas une fraction de la circonférence égale au taux des coefficients différents de zéro de la série en question. Admettons maintenant, que les coefficients sont réels et différents de zéro. Si le point positif du cercle de convergence est un point ordinaire de la série l'arc de régularité qui le contient ne surpasse pas une fraction du cercle égale au taux des variations des coefficients. (Les taux en question sont déterminés par des $\overline{\lim}$.)

On remarquera que ces énoncés apportent quelques précisions à des théorèmes bien connus de MM. Borel, Carlson, Fabry, Lindelöf, Phragmén, Vivanti etc. C'est surtout grâce à la remarque 1 qu'une simplification notable et une coordination naturelle de toutes les questions connexes deviennent possibles.

2. — M. D. Mirimanoff (Genève). — *Sur un problème de la théorie de la mesure.* — Il y a deux ans environ, M. Plancherel a attiré mon attention sur le problème suivant:

Problème. Etant donné deux ensembles linéaires E_x et E_y répartis, le premier sur un segment OA de l'axe Ox et le second sur un segment OB de l'axe Oy, on mène par les points de E_x des droites parallèles à Oy et par les points de E_y des droites parallèles à Ox. Soient E l'ensemble de *tous* les points d'intersection de ces deux familles de

droites et E_λ la projection orthogonale de E sur une droite quelconque $O\lambda$ formant avec Ox un angle ϑ. Quelle est la mesure de E_λ ?

Je donnerai la solution de ce problème pour le cas où les ensembles E_x et E_y appartiennent à la catégorie des ensembles parfaits que M. Denjoy désigne sous le nom d'ensembles présentant le caractère (A) [1] et que j'appelle ensembles parfaits de première espèce.

Soit E un ensemble parfait de 1re espèce construit sur un intervalle (a, b). On sait que son complémentaire se compose d'un ensemble d'intervalles ouverts δ_i que j'appellerai, avec M. W. H. Young, les intervalles noirs de E.

On peut établir la propriété suivante: Si α et β sont deux points quelconques de (a, b) n'appartenant pas à un même intervalle noir de E (l'un des points α, β peut être situé en dehors de (a, b)) et si $\mathcal{E}$ est un ensemble parfait quelconque de 1re espèce construit sur (α, β), les ensembles E et $\mathcal{E}$ ont des points communs.

Revenons à notre problème.

Soient E_x et E_y deux ensembles parfaits de 1re espèce construits sur OA et OB; l'ensemble plan E construit à partir de E_x et E_y est enfermé à l'intérieur d'un rectangle. A tout intervalle noir δ_i de E_x correspond une *bande noire verticale* comprise entre les parallèles à Oy passant par les extrémités de δ_i. De même, à tout intervalle noir de E_y correspond une bande noire *horizontale*.

Soit maintenant d une droite quelconque coupant le contour du rectangle, et d_0 la portion de d comprise à l'intérieur de ce contour. On peut établir le théorème suivant:

Théorème. Pour que la droite d passe par un point de E, il faut et il suffit que les deux extrémités de d_0 n'appartiennent pas à une même bande noire.

La solution du problème de M. Plancherel en découle immédiatement.

Supposons, pour fixer les idées, $OA = OB = 1$ et $0 < \vartheta \leq \frac{\pi}{4}$.

On a alors

$$m(E_\lambda) = \sin\vartheta + \cos\vartheta - \sum_i (\delta_i \cos\vartheta - \sin\vartheta) ,$$

la somme étant étendue à tous les i tels que $\delta_i > tg\,\vartheta$.

Un exposé complet de ces recherches paraîtra dans le t. IV des *Fundamenta mathematicae*, actuellement sous presse.

3. M. Ed. Guillaume (Berne). — *A propos des discussions de la Théorie d'Einstein au Collège de France.* — L'auteur rappelle l'objection qu'il a présentée à Paris, quelques semaines auparavant, et qui a été reproduite dans la *Revue générale des Sciences* (nº 11, p. 322-324, 1922).

[1] *Accademia dei Lincei*, novembre 1920, p. 291 et 316.

Académie des Sciences de Paris. — Prix décernés.

MATHÉMATIQUES. — *Grand Prix des sciences mathématiques*, prix fondé par l'Etat: 3000 fr. — L'Académie avait mis au concours la question suivante: *Détermination de classes étendues de surfaces par des propriétés données de leurs lignes géodésiques considérées dans l'espace ordinaire.* Aucun mémoire n'a été déposé sur cette question. — Le prix est décerné à M. Jean LE ROUX, professeur à la Faculté des Sciences de Rennes, pour l'ensemble de ses travaux.

Prix Poncelet, 2000 fr., à M. J. DRACH, professeur à la Faculté des Sciences de Paris.

Prix Francœur, 1000 fr., à M. ANTOINE, maître de conférences à la Faculté des Sciences de Strasbourg, pour ses travaux sur la géométrie.

MÉCANIQUE. — *Prix Montyon*, 700 fr., à M. Farid BOULAD, membre de l'Institut d'Egypte, ingénieur du service des ponts et chemins de fer de l'Etat égyptien.

Prix Fourneyron, 1000 fr., à M. J.-A. FARCOT d'ALBARET, pour ses travaux sur les moteurs thermiques.

ASTRONOMIE. — *Médaille Lalande*, à M. Norris RUSSEL, directeur de l'Observatoire de Princeton.

Prix Benjamin-Valz, 460 fr., à M. J. CAZY, professeur à la Faculté des Sciences de Lille, pour ses travaux de Mécanique céleste et en particulier pour son mémoire intitulé: *De l'allure du mouvement dans le problème des trois corps quand le temps croît indéfiniment.*

Médaille Janssen, à M. C. STŒRMER, professeur à l'Université de Christiania, pour ses travaux sur les aurores boréales.

PRIX GÉNÉRAUX. — *Prix Houllevigue.* 5000 fr., à M. Rodolphe SOREAU, professeur au Conservatoire national des arts et métiers, pour ses travaux sur l'aviation et son ouvrage *Nomographie ou traité des abaques.*

FONDS DE RECHERCHES SCIENTIFIQUES. — *Fondation Henri Becquerel*, 3000 fr., à M. DANJÈON, astronome à l'Observatoire de Strasbourg. — *Fondation Loutreuil*, 3000 fr., à M. Auguste LEBEUF, directeur de l'Observatoire national de Besançon; 15,000 fr. à M. Jean MASCART, directeur de l'Observatoire de Lyon; 15,000 fr., à l'Académie des Sciences, pour la publication de l'inventaire des périodiques scientifiques dans les bibliothèques de Paris.

Nouvelles diverses. — Nominations et distinctions.

Allemagne. — M. H. FALKENBERG, privat-docent à l'Université de Koenigsberg, est nommé professeur extraordinaire à l'Université de Giessen.

M. F. Hartogs, de l'Université de Munich, est nommé professeur de mathématiques à l'Université de Francfort a. M.

M. D. Hilbert a été nommé docteur honoraire de l'Université de Francfort et de l'Ecole Polytechnique de Zurich.

M. R. König, de l'Université de Tubingue, est nommé professeur à l'Université de Munster.

M. H. Rademacher, privat-docent à l'Université de Berlin, est nommé professeur extraordinaire à l'Université de Hambourg.

M. J. Schur, professeur à l'Université de Berlin, est nommé membre de l'Académie des Sciences de Berlin.

Belgique. — Le gouvernement vient d'accorder un subside à M. Stuyvaert pour lui permettre d'imprimer sa *Méthodologie mathématique.*

France. — *Faculté des Sciences de Paris.* — M. Cartan, professeur de mécanique rationnelle, est chargé du cours de mécanique analytique et de mécanique céleste (chaire de M. Painlevé). — M. Montel, professeur de mathématiques générales, est chargé du cours de mécanique rationnelle. — M. Denjoy, professeur à l'Université de Strasbourg, est chargé du cours des mathématiques générales. — Pour les conférences, sont désignés: MM. Cahen (mécanique rationnelle), Lambert (astronomie).

Université de Strasbourg. — L'Institut de Mathématiques continue sa marche ascendante. Depuis l'armistice, il a délivré deux diplômes d'études supérieures et deux doctorats ès sciences; dix de ses auditeurs ont été admis à l'agrégation de mathématiques. En ce qui concerne les certificats d'études supérieures délivrés par la Faculté des Sciences, le nombre de ceux qui relèvent des sciences mathématiques a suivi la progression suivante: 1919, 13; 1920, 18; 1921, 31; 1922, 40.

Italie. — *Reale Accademia dei Lincei.* Dans la section des Mathématiques pures et appliquées ont été élus: MM. P. Burgatti et L. Tonelli (Bologne), L. Lombardi (Rome), M. Panetti (Turin), membres correspondants; MM. E. T. Whittaker (Edimbourg), E. Landau (Göttingue), associés étrangers.

Charles Cailler.

L'*Enseignement Mathématique*[1] a déjà signalé la mort prématurée de son distingué collaborateur, M. Charles Cailler, décédé le 30 janvier 1922, à l'âge de 57 ans. Savant de grande valeur et maître incom-

[1] Tome XXII, p. 225. — Voir aussi la Notice sur Ch. Cailler, suivie de la liste de ses publications, par H. Fehr, *Actes de la Soc. helv. des Sciences nat.*, 1922; ainsi que celle de R. Wavre, dans les *Archives des Sciences phys. et nat.*, Genève, 1922. N. D. L. R.

parable, Charles Cailler a enseigné les mathématiques à l'Université de Genève pendant plus de 30 ans. J'ai eu la bonne fortune d'assister, il y a 25 ans, à quelques-unes de ses leçons et notamment à son cours de mécanique, à un cours d'hydrodynamique et à un cours de calcul des probabilités. J'en ai gardé un souvenir inoubliable. A cette époque M. Cailler était encore très jeune, mais déjà dans sa manière d'exposer les théories les plus difficiles et les plus transcendantes, il avait ces qualités d'élégance et de charme qui ont toujours fait l'admiration de ses élèves et de ses collègues. Déjà il avait cette finesse et cette clarté, ce sens assez rare de la mesure et des proportions et ce souci de la rigueur qu'il tenait peut-être en partie de son maître Charles Cellérier et qu'on trouve dans toutes ses publications. C'était un mathématicien de race, — il était né géomètre.

Guidé par un instinct mathématique très sûr, il se mouvait à l'aise au milieu des problèmes les plus compliqués, les plus subtils, les plus ardus. Dans ses travaux sur l'équation d'Abel et les fonctions de Bessel, dans ses mémoires sur les géométries non-euclidiennes, dans ses notes sur la théorie d'Einstein, aussi bien que dans le grand ouvrage sur la mécanique qu'on va, je l'espère, publier prochainement et qui nous réserve des surprises, il a fait preuve d'une sagacité, d'une pénétration et d'une profondeur hors ligne.

Sa pensée ne glissait pas sur la surface des problèmes dont il abordait l'étude, elle cherchait à aller au fond des choses. Et l'on avait le sentiment que dans ses recherches il était guidé, comme l'a dit Poincaré en parlant du vrai géomètre, « par quelque vague conscience d'une géométrie plus profonde, et plus cachée, qui seule fait le prix de l'édifice construit ».

D. Mirimanoff (Genève).

Nécrologie.

M. Amstein, professeur honoraire de l'Université de Lausanne, est décédé dans sa 82me année.

M. Charles-Léonard Bouton, professeur à la Harvard University Cambridge, Mass., est décédé à l'âge de 53 ans.

M. Eugène Clevers, qui fut délégué de la Belgique au Congrès de Cambridge, en 1912, vient de mourir à Gand à l'âge de 67 ans.

M. H. Grassmann, professeur à l'Université de Giessen et fils du savant géomètre Hermann Grassmann, est décédé le 21 février 1922, à l'âge de 65 ans.

M. G.-B. Halsted. — Le géomètre américain G. B. Halsted est mort à New York dans sa 65me année. On lui doit notamment un traité de géométrie rédigé d'après les principes de Hilbert (*Rational Geometry*, 1904, revised 1907, trad. en français par P. Barbarin, 1911), ainsi que de nombreuses notes et traductions dans le domaine de la géométrie non-euclidienne. Halsted a aussi traduit plusieurs

ouvrages de H. Poincaré, Science and Hypothesis, The Value of Science, Science and Method.

M. A. Höfler, professeur à l'Université de Vienne, est décédé le 26 février 1922, à l'âge de 68 ans.

M. G.-J. Kapteyn. — Nous apprenons avec regret la mort du savant astronome hollandais, Jacobus Kornelius Kapteyn, professeur à l'Université de Groningue, décédé le 18 juin 1922, dans sa 72me année. G.-J. Kapteyn était correspondant de l'Académie des Sciences de Paris, membre associé de la Royal Astronomical Society de Londres et membre d'honneur de nombreuses sociétés scientifiques.

NOTES ET DOCUMENTS

FRANCE

Dispense de la licence en vue du doctorat ès sciences.

Sur la proposition du Conseil supérieur de l'Instruction publique le Ministre de l'Instruction publique et des Beaux-Arts a pris un arrêté permettant l'accès au doctorat de candidats déjà pourvus de grades étrangers admis comme équivalents ou supérieurs au diplôme de licence. Nous nous bornons à reproduire ici la liste concernant les grades scientifiques donnant accès au *doctorat ès sciences.* Des dispositions analogues ont été adoptées pour les facultés des Lettres et de Droit.

Sont dispensés de produire le diplôme de licencié les candidats au doctorat qui pourront justifier des titres ou grades suivants reconnus à cet égard comme équivalents ou supérieurs:

Grande-Bretagne et Irlande. — B. A. honneurs 1re classe des universités d'Oxford et de Cambridge.

B. S. honneurs 1re classe de l'université de Londres et des universités provinciales.

M. H. honneurs 1re classe des universités écossaises.

B. A. honneurs 1re classe des universités irlandaises.

Belgique. — Doctorat ès sciences, grade légal.

Bulgarie. — Certificat de 2me examen des universités délivré après quatre années d'études.

Danemark. — Maîtrise ès sciences. — Candidature à la maîtrise ès sciences.

Etats-Unis. — Candidats présentés par une des universités désignées dans la liste ci-annexée et munis soit de la maîtrise ès sciences soit du doctorat en philosophie, soit d'un certificat attestant qu'ils ont accompli au moins deux années d'études en vue du doctorat.

Finlande. — Candidature en philosophie, section physique mathématique.

Hollande. — Maîtrise ès sciences.

Italie. — Laurea in matematica. Laurea in fisica et in chimica. Laurea in scienze naturali.

Pologne. — Maîtrise en philosophie (sciences).

Roumanie. — Licence ès sciences.

Suède. — Licence ès sciences.

Suisse. — 1. En vue du doctorat ès sciences mathématiques: Doctorat ès sciences mathématiques des universités romandes. Doctorat en philosophie des universités alémaniques et de l'Ecole polytechnique fédérale (avec thèse de mathématiques). Licence en mathématiques des universités de Genève, Fribourg et Neuchâtel.

2. En vue du doctorat ès sciences physiques: Doctorat ès sciences physiques des universités romandes. Doctorat en philosophie des universités alémaniques et de l'Ecole polytechnique fédérale (avec thèse de physique ou de chimie). Licence physique et chimique et licence physique et naturelle de l'Université de Genève. Licence physique de l'université de Lausanne.

3. En vue du doctorat ès sciences naturelles: Doctorat ès sciences naturelles des universités romandes. Doctorat en philosophie des universités alémaniques et de l'Ecole polytechnique fédérale (avec thèse de sciences naturelles). Licence ès sciences naturelles des universités de Genève et Neuchâtel.

Tchéco-Slovaquie. — Trois examens de doctorat (rigorosa).

Yougo-Slavie. — Diplôme de licencié des facultés de Belgrade, Skoplje et Subotica. Doctorat des Universités de Zagreb et Lubljana.

Annexe. — *Membres de l'association des universités américaines.* — University of California. — Catholic university of America. — University of Chicago. — Clark university. — Columbia university. — Cornell university. — Harvard university. — University of Illinois. — Indiana university. — State university of Iowa. — Johns Hopkins university. — University of Kansas. — Leland Stanford Junior university. — University of Michigan. — University of Minnesota. — University of Missouri. — University of Nebraska. — Northwestern university. — Ohio State university. — University of Pennsylvania. — Princeton university. — University of Virginia. — University of Wisconsin. — Yale university. — Berkeley, California. — Washington (district fédéral de Columbia). — Chicago Illinois. — Worcester, Massachusetts. — New York city. — Ithaca, New-York. — Cambridge, Massachusetts. — Urbana, Illinois. — Bloomington, Indiana. — Iowa city, Iowa. — Baltimore, Maryland. — Lawrence, Kansas. — Stanford university, California. — Ann Arbor, Minnesota. — Minneapolis, Minnesota. — Columbia, Missouri. — Lincoln, Nebraska. — Evanston, Illinois. — Columbus, Ohio. — Philadelphia, Pensylvania. — Princeton, New-Jersey. — Charlottesville, Virginia. — Madison, Wisconsin. — New Haven, Connecticut.

Cours universitaires.

Année 1922-1923.

ÉTATS-UNIS D'AMÉRIQUE

Columbia University; *New York.* — T. S. Fiske : Differential Equations (first term). — F. N. Cole : Algebra. — D. E. Smith : History of Mathematica. — C. J. Keyser : Introduction to mathematical philosophy (first term). — Logical foundations of mathematics. — E. Kasner : Einstein's

theory of gravitation. — W. B. Fite : Theory of Functions. — J. F. Ritt : Functions of several complex variables (first term). — Algebraic numbers (second term). — G. A. Pfeiffer : Isoperimetric problems (second term). — J. Douglas : Differential Geometry (first term).

Cornell University; (*Ithaca*). — J. I. Hutchinson : Entire functions. — V. Snyder : Algebraic Geometry. — F. R. Sharpe : Vector analysis. — W. B. Carver : Advanced calculus. — A. Ranum : Differential geometry. — D. C. Gillespie : The definite integral. — W. A. Hurwitz : Infinite series. — C. F. Craig : Probabilities. — P. W. Owens : Projective Geometry. — H. M. Morse : Einsteins theory (first term). — Dynamical systems (second term). — W. L. G. Williams : Modern higher algebra. — F. W. Reed : Elementary differential Equations. — H. S. Vandiver : Finite groups. — G. M. Robison : Advanced analytic geometry.

Harvard University; (*Cambridge, Mass.*). — W. F. Osgood : Differential and integral calculus (advanced course) ; Theory of Functions (introductory course). — J. L. Coolidge : Probability ; Algebra ; Algebraic plan curves. — E. V. Huntington : The fundamental concepts of mathematics. — O. D. Kellogg : Dynamics (second course); Introduction to the Theory of potential functions and Laplaces equation ; Potential functions (advanced course). — G. D. Birkhoff : The analytic theory of heat and problems in elastic vibrations; Linear differential equations of the second order, real variables. — W. C. Graustein : Introduction to modern geometry ; Differential geometry of curves and surfaces. — J. L. Walsh : Infinite series and products ; Theory of numbers ; Entire functions. — Ph. Franklin : Elementary theory of differential equations ; Analysis situs.

University of Chicago. — E. H. Moore : Vectors, matrices, and quaternions ; Matrices in general analysis. — L. E. Dickson : Theory of numbers; Solid analytics; Theory of Equations. — H. E. Slaught : Differential Equations; Elliptic integrals; Calculus. — G. A. Bliss : Definite integrals; Elliptic functions; Calculus. — F. R. Moulton : Analytic differential equations; Advanced ballistics. — W. D. Mac Millan : Analytic mechanics. Celestial mechanics. — A. C. Lunn : Units and dimensions; Dynamics of continuous media; Canonical equations and quantum theory; Thermodynamics. — M.I. Logsdon : Theory of algebraic invariants; Calculus. — J. W. A. Young : Limits and series.

University of Illinois; (*Urbana*). — E. J. Townsend : Real variables. — G. A. Miller : Finites groups. — J. B. Shaw : Linear operators. — A. B. Coble : Differential geometry. — R. D. Carmichael : Linear differential equations in real variables. — A. Emch : Antomorphic functions. — A. R. Crathorne : Theory of statistics. — A. J. Kempner : Modern algebra. — H. Blumberg : Introduction to higher mathematics.

Johns Hopkins University; (*Baltimore*). — F. Morley : Higher geometry (first term); Theory of functions (second term). — A. Cohen : Applications of calculus, differential equations, and mechanics. — L. S. Hulburt : Advanced calculus; Projective geometry and higher plane curves. — J. R. Musselman : Elementary theory of probability.

Massachusetts Institute of Technology. — F. S. Woods : Advanced Calculus. — C. L. E. Moore : Theoretical aeronautics. — H. B. Phillips :

Thermodynamics. — J LIPKA : Analytical mechanics. — N. WIENER : Fourier's series and integral equations. — G. RUTLEDGE : Theory of functions. — S. D. ZELDIN : Vector analysis. — J. S. TAYLOR : Mathematics of investment.

University of Michigan; (*Ann Arbor*). — J. L. MARKLEY : Solid analytic Geometry (first term) ; Theory of functions of a complex variable ; Theory of functions of real variables. — J.W. GLOVER : Theory of probability (first term); Finites differences (second term); Advanced mathematical theory of interest and life contingencies. — W. B. FORD : Advanced calculus, with special reference to Fourier series and harmonic analysis ; Infinite series and products; Elements of the calculus of variations (first term). — L. C. KARPINSKI : Higher algebra; Theory of numbers; History of mathematics. — J. W. BRADSHAW : Introduction to modern geometry (second term); Projective geometry . — R. B. ROBBINS : Casualty actuarial theory. — R. W. BARNARD : Differential equations (first term); Mathematical Theory of statistics, advanced course. — A. ZIWET : Hydrodynamics. — P. FIELD : Projective geometry for engineers (first term) ; Vector analysis (second term). — T. R. RUNNING : Graphical methods (first term) Empirical formulas (second term); Advanced calculus (first term); — T. E. HILDEBRANDT : Theory of the potential (first term). — V. C. POOR : Theoretical mechanics. — L. J. ROUSE : Fourier series (second term).

University of Pennsylvania; (*Philadelphia*). — E. S. CRAWLEY : Modern analytic geometry (first term); Differential equations (first term); Higher plane curves (second term). — G. H. HALLETT : Infinite series and products (first term); Functions of a complex variable (second term). — H. B. EVANS : Quaternions and vector methods (second term). — O. E. GLEEN : Calculus of variations. — F. H. SAFFORD : Mathematical theory of elasticity. — C. G. CHAMBERS : Introduction to higher algebra. — H. H. MITCHELL : Linear groups (first term); Advanced calculus (second term). — M. J. BABB : History of Mathematics. — F. W. BEAL : Differential geometry. — J. R. KLINE : Foundations of Mathematics (first term); Continuous transformations (second term).

University of Wisconsin; (*Madison*). — E. P. LANE : Modern analytical geometry. — E. B. VAN VLECK : Functions of real variable. — Integral equations. — H. W. MARCH : Theoretical hydrodynamics. — C. S. SLICHTER : Potential theory. — E. B. SKINNER : Higher algebra. — A. DRESDEN : Calculus of variations.

Yale University; (*Conn.*). — E. W. BROWN : Mechanics; Advanced mechanics; Hydromechanics. — J. PIERPONT : Functions of a complex variable; Projective and differential geometry; Approximation methods. — P. F. SMITH : Differential equations. — W. A. WILSON : Theory of aggregates. — E. J. MILES : Advanced Calculus; Calculus of variations. — J. I. TRACEY : Advanced analytic geometry. — W. L. CRUM : Mathematical statistics. — J. K. WHITTEMORE : Advanced differential geometry.

FRANCE

Paris, *Collège de France.* — Les cours publics et gratuits commenceront le 1er décembre.

Sciences mathématiques. — M. LEBESGUE, de l'Institut: Mathématiques.

Sur quelques questions d'analysis situs à propos des travaux de Camille Jordan. Mardi et jeudi à 17 heures, à partir du 5 décembre. — M. HADAMARD, de l'Institut: Mécanique analytique et mécanique céleste. Les premières années de l'œuvre de H. Poincaré, les mercredis, à 17 heures. Le professeur dirigera les conférences d'analyses de Mémoires, les samedis, à 10 h. $^1/_2$. Le cours ouvrira après le 15 janvier. — M. DELTHEIL: Mathématiques (fondation Peccot). La théorie des probabilités géométriques.

Sciences physiques et chimiques. — M. BRILLOUIN, de l'Institut: Physique générale et mathématique. Théorie des principales théories des solides. Chaleurs spécifiques. Grandes déformations. Plasticité. Rupture. Théorie électrique de l'élasticité des solides. Rôle des quanta ; les mercredis à 17 h. $^1/_2$, et les samedis à 17 h. $^1/_4$, à partir du 6 décembre. — M. LANGEVIN: Physique générale et expérimentation. Phénomènes haute fréquence; les mardis à 17 heures, à partir du 5 décembre.

Le Collège de France ne confère aucun grade et ne délivre aucun diplôme. Toutefois les professeurs peuvent donner des certificats d'assiduité aux auditeurs qui s'inscrivent sur les registres déposés dans les salles de cours.

D'autre part, des certificats de recherches pourront être délivrés par les professeurs aux personnes ayant travaillé sous leur direction. Ces certificats sont visés par l'administrateur,

ITALIE[1]

Bologna; *Università.* — BURGATTI: Teoria matematica dell'elettricità, 3. — PINCHERLE: Teoria delle equazioni differenziali lineari. Argomenti vari di matematica superiore in relazione alla matematica elementare, 5. — TONELLI: Calcolo delle variazioni, 3.

Catania; *Università.* — APRILE: Le algebre regolari ed alcune applicazioni geometriche delle medesime, 3. — CIPOLLA: Sostituzioni lineari e gruppi, 4. — LAZZARINO: Dinamica dei sistemi rigidi, semirigidi e continui, 4. — PICONE: Integrali di Lebesgue. Approssimazione di una funzione per combinazioni lineari di fuzioni di an'assegnata successione. Nuovi metodi di approssimazione per le soluzioni di problemi della Fisica matematica, 4.

Genova; *Università.* — LORIA: Geometria infinitesimale, 3. — SEVERINI: Equazioni a derivate parziali, 4. — SILLA: Teoria del potentiale e campo elettromagnetico, 3.

Messina; *Università.* — CALAPSO: Teoria generale delle superficie, 4. — GIAMBELLI: Geometria numerativa degli iperspazi. Breve introduzione alla Geometria sopra una curva algebrica, 4. — PALATINI: Sistemi continui. Teoria delle onde, 4.

Napoli; *Università.* — AMODEO: Storia delle Scienze Matematiche: L'epoca di Newton e Leibniz, 3. — MARCOLONGO: Calcolo differenziale assoluto. Relatività generale, 3. — MONTESANO: Geometria dello spazio rigato: suoi legami con la geometria delle transformazioni birazionali, 3. — PASCAL: Gli integrali e le funzioni abeliane, 3. — SCORZA: Metodologia matematica, 3.

---

[1] Les cours fondamentaux, tels que Analyse algébrique et infinitésimale, Géométrie analytique, descriptive, projective, Mécanique rationnelle, existant dans toute université, ne figurent pas dans la liste.

Padova; *Università.* — Amaldi: Questioni attinenti ai principi della geometria, 3. — D'Arcais: Funzioni analitiche. Serie di Fourier, 4. — Gazzaniga: Teoria dei numeri, 3. — Ricci: Metodi di calcolo differenziale assoluto ed applicazioni alla teoria generale dell'elasticità, 4. — Soler: Funzioni sferiche. Teoria del potenziale. Teoria della forma dei pianeti, 3. — Tonolo: Geometria infinitesimale delle superficie, 3.

Palermo; *Università.* — De Franchis: Teoria generale delle curve e superficie algebriche, 4. — Gebbia: Teoria matematica dell'elettricità e del magnetismo, 4 ½. — Signorini: Elasticità, 3. — N. N.: Analisi superiore, 3.

Pavia; *Università.* — Berzolari: Geometria sopra una curva algebrica con metodo algebrico e con metodo trascendente, 4. — Brusotti: Sulla classificazione dei problemi in algebra e geometria elementare, con speciale riguardo alle equazioni risolubili per radicali e ai problemi classici della geometria greca, 3. — Gerbaldi: Teoria delle funzioni ellitiche, 3. — Vivanti: Teoria delle funzioni analitiche, 4.

Pisa; *Università.* — Armellini: Teoria della Luna, 3. — Bianchi: Teoria delle funzioni di variabile complessa. Funzioni algebriche e integrali abeliani, 3. — Maggi: Elementi di dinamica analitica. Questioni varie di idrodinamica, 4 ½. — N. N.: Geometria superiore, 3.

Roma; *Università.* — Bisconcini: Applicazioni di analisi infinitesimale, 3. — Cantelli: Calcolo delle probabilità, 3. — Matematica attuariale, 3. — Castelnuovo: Curve algebriche sghembe, 3. — Crudeli: Introduzione allo studio della elettricità e del magnetismo, 3. — Enriques: Vedute superiori sulle matematiche elementari, 3. — Levi-Civita: Calcolo differenziale assoluto con applicazioni, 3. — Pannelli: Proprietà fondamentali delle superficie algebriche, 3. — Perna: Risoluzione delle equazioni algebriche, 3. — Volterra: Termodinamica, 3; Equazioni della dinamica e metodi generali d'integrazione, 3. — Zondadari: Applicazioni della geometria descrittiva alla teoria delle ombre e alle equazioni differenziali, 3.

Torino; *Università.* — Boggio: Meccanica analitica e relatività, 3. — Fubini: Le equazioni differenziali e i vari tipi di sviluppi in serie che si presentano nella fisica matematica, 3. — Segre: Geometria dei cerchi e delle sfere, 3. — Somigliana: Potenziali newtoniani e teorie elettromagnetiche, 3. — Togliatti: Geometria non-Euclidea, 2.

SUISSE

Semestre d'hiver (octobre 1921 à mars 1922).

Bâle; *Université.* — W. Matthies: Mechanik deformierbarer continua; 5; Uebungen, 1; Math.-Phys. Seminar, 2. — H. Mohrmann: Diff. und Integralrechnung, I. 5; Differentialgleichungen, 4; Math. Seminar, 1. — O. Spiess: Zahlentheorie, 3; Funktionentheorie, 3; Math. Seminar, 1; Determinanten, 1. — R. Flatt: Pädagog. Seminar, math.-phys. Abteilung IV; Repetitorium der Algebra, 2. — M. Knapp: Geschichte der Astronomie, 2; Astrologie, 1; Lektüre aus Keplers Werken.

Berne; *Université.* — Crelier : Integralrechnung, 3; Zahlentheorie, 3; Funktionentheorie, 3; Math. Seminar. — Gonseth : Differential-geometrie, 2; Geometrische Analysis, 2; Geometrisches Seminar, 2; Analytische Geometrie des Raumes, 3; Algebraische Analysis II, 3. — Berliner : Höhere Algebra, 2. — Joss : Einführung in die nichteuklidische Geometrie, 2. — R. de Saussure : Geometrie der Bewegung, 2; Linien Geometrie und komplexe Grössen. — Michel : Ueber unendliche Reihen, 2; Math. Uebungen, Differential Gleichungen, 2. — Mauderli : Einleitung in die Astronomie, 3; Uebungen, 2; Astronomische Chronologie, Astronomisches Seminar. — Moser : Renten und Versicherungs Rechnung, 2; Reihen für *e* und ihre Ableitung aus dem Makehamschen Sternegesetz; Seminar. — Bohren : Math. Statistik, 2; Grundlagen der Sozialversicherung.

Fribourg; *Université.* — Bays : Mécanique rationnelle, 3; Exerc. 1; Théorie des fonctions de variable complexe, 4. — Van der Corput : Einf. in die höhere Mathematik, 4; Uebgn dazu, 1; Höhere Algebra, 3; Uebgn dazu, 1.

Genève; *Université.* — Fehr : Elém. de mathém. sup. 3; Exerc., 2; Conférences d'algèbre et de géométrie, 2; Algèbre sup., 2; Méthodologie mathém., 2. — Wavre : Calcul diff. et intégral, 3; Exerc. 2; Mécanique rationnelle, 3; Exerc. 2. — Mirimanoff : Calcul des probabilités, 1; Fonctions elliptiques, 2. — R. Gautier : Astronomie phys., 2. — G. Tiercy : Mécanique physique, théorie des déformations, 1.

Lausanne; *Université.* — G. Dumas: Calcul diff. et intégral, 6; Exerc. 2; Répét., 1; Complément du Calcul intégral, 2; Répét. 1. — X. : Théorie des fonctions, 3. — M. Lacombe : Géométrie descriptive, 4; Epures, 4; Répét. 1; Géométrie analytique, 3; Répét. 1; Géométrie de position, 3. — B. Mayor : Mécanique rationnelle, 3; Exerc. 2; Mécanique analyt., 1; Physique mathém., 2. — Maillard : Astronomie sphérique, 3; Mathématiques générales, 4; Exerc., 2; Répét., 1; Mécanique, 2; Exerc. et répét., 2. — Sam. Dumas: Calcul des probabilités, 3. — Ch. Jacottet : Fonctions algébriques, 2.

Neuchâtel; *Université.* — L.-G. Du Pasquier : Calcul différentiel et intégral, 3; Exerc., 2; Théorie des groupes, 2; Fonctions analyt. et ellipt., 1; Calcul des variations, 1; Calcul des probabilités, 1; Théorie de la relativité, 1; Sém. de mathém. — L. Gaberel : Géométrie analyt. et infinit., 3; Géométrie descriptive, 1. — G. Juvet : Le calcul différentiel absolu et la théorie des orbites planétaires, 1; Astronomie sphérique, 2; Exerc. 1; Théorie des marées. 1. — Jaquerod : Mécanique rationnelle, 2.

Zurich; *Université.* — Fueter : Einf. in die mathem. Behandlung der Naturwissenschaften, mit Uebgn, 5; Variationsrechnung, 3; Math. Seminar, 2. — Speiser : Diff. und Integralrechnung, 4; Uebgn. 1; Wahrscheinlichkeitsrechnung, 3; Seminar. — Disteli : Darst. Geometrie, 4; Einf. in die Schraubentheorie, 2. — Wolfer : Einl. in die Astronomie, 3; Uebg. 2; Bahnbestimmung von Planeten u. Kometen, 2. .

Zurich; *Ecole polytechnique fédérale section normale.* — Hirsch : Höh. Mathematik, I, 6; Repet., 1; Uebgn., 2; III, 3; Uebgn., 1. — Franel : Mathématiques supérieures, I, 6; Répét., 1; Exercices, 2; III, 3; Exercices, 1. — Grossmann : Darstell. Geometrie, 4; Repet., 1; Uebgn., 4; projektive Geometrie, 1; géom. Seminar, 2; graph. Methoden, 2. — Kolross : Géométrie descriptive, 4; Répét. 1; Exerc., 4. — Meissner : Mechanik II, 4;

Repet., 1; Uebgn., 2. — PLANCHEREL: Théorie des fonctions, 2; Variationsrechnung, 2; math. Sem. — WEYL : Analyt. Geometrie, 3; Vektoranalysis, 1; Analysis situs. 2; math. Sem. — POLYA : Einf. in d. Analysis reeller Grössen, I, 2; Analyt. Zahlentheorie, 2. — BÆSCHLIN : Vermessungskunde, 4; Höh. Geodäsie, 3; Repet., 1. — WOLFER : Einleitung in die Astronomie, 3; Uebgn., 2; Bahnbestimmungen von Planeten u. Kometen, 2. — AMBERG : Einführung in den math. naturw. Unterricht. — MARCHAND : Les méthodes statistiques de recherches, 1.

Cours libres. — BEYEL : Rechenschieber mit Uebgn., 1; Darst. Geometrie: 2; Flächen 2. Grades, 1. — KIENAST : Funktionentheorie, 2. — KRAFT : Vektoranalysis, 1; Geometrische Analysis, 3.

BIBLIOGRAPHIE

P. APPELL. — **Education et Enseignement.** Notices et Discours. (Nouvelle Collection scientifique E. Borel.) — 1 vol. in-8° de VIII-304 pages; 8 fr.; F. Alcan, Paris, 1922.

Ce Recueil de Notices et de Discours constitue un exposé des idées de M. Appell sur la Science et l'Enseignement. Précieuses alors qu'elles étaient éparses, elles le seront bien davantage encore sous la forme d'un volume qui devrait être un livre de chevet pour tous les professeurs et pour ceux de leurs élèves qui s'interrogent, parfois un peu anxieusement, sur la meilleure manière d'utiliser leurs connaissances.

L'ouvrage sera d'une analyse plus facile si l'on rassemble d'abord les titres des différents articles. I. La géométrie infinitésimale. — II. L'analyse mathématique. — III. De l'expérience en géométrie. — IV. L'éducation de la jeunesse. — V. Un mathématicien (Jacobi). — VI. L'avenir de la Science dans les Universités. — VII. L'Alsace pendant l'oppression allemande. — VIII. La Chimie et l'Industrie. — IX. L'Ecole normale supérieure en 1906. — X. L'Ecole normale en 1907. — XI. L'Enseignement des Sciences et la formation de l'esprit scientifique. — XII. Les Universités régionales. — XIII. Les sciences dans l'Education nationale. — XIV. L'Université de Paris. — XV. La Faculté des Sciences de Paris. — XVI. Relations avec l'Amérique latine. — XVII. L'avenir de l'aviation. — XVIII. Deux mathématiciens français (G. Darboux et H. Poincaré). — XIX. Henri Poincaré. — XX. La Météorologie. — XXI. Les travaux publics après 1871. — XXII. Le lycée de Nancy en 1873. — XXIII. L'Ecole normale et la botanique. — XXIV. Le rôle des recherches scientifiques. — XXV. La guerre. — XXVI. Les sciences et la guerre. — XXVII. L'Alsace après la délivrance. — XXVIII. L'œuvre du secours national. — XXIX. La Société des Nations. — XXX. La résurrection de Reims. — XXXI. Morts pour la France. — XXXII. La Pologne libre.

Il n'est point possible assurément de reproduire ici toutes les idées contenues dans ces trente-deux écrits, mais les conclusions qui s'en dégagent sont

merveilleusement unitaires et ne se dérobent point à un bref tableau d'ensemble.

La Notice I se rapporte à Ossian Bonnet, esprit géométrique prophétique à tant d'égards. On lui doit surtout une formule unissant la courbure géodésique d'un contour et la courbure totale d'une cloison, ce qui est probablement la première formule du type stokien, contenant une courbure superficielle, qui soit apparue en Géométrie.

En III, il s'agit des idées philosophiques de M. de Freycinet sur l'origine expérimentale de cette science. On pourrait encore les méditer à l'heure actuelle et se convaincre ainsi que bien des choses intéressantes ont été dites entre Riemann et Einstein.

En II et V nous trouvons Hermite et Jacobi. Que dire sur de si grands noms; ce qu'on oublie parfois c'est l'extrême déférence d'un véritable homme de génie vis-à-vis d'un autre plus âgé qu'il doit considérer comme un maître. Les lettres de Jacobi à Legendre et d'Hermite à Jacobi sont des modèles du genre. Cela doit nous consoler des misérables élucubrations que des universitaires déshonorant leur poste et heureusement en fort petit nombre dirigent parfois contre des travaux qu'ils ne peuvent comprendre et qui émanent de personnalités incomparablement supérieures à la leur.

En IV M. Appell dit aux élèves du Lycée Saint-Louis: « Je trouve que vous apprenez trop de détails, qu'on vous fait trop de cours....; nous procédons comme si l'imprimerie n'était pas inventée... ! »

En VI il fait l'apologie des travaux originaux: « Un établissement scientifique dont les professeurs se consacreraient uniquement à l'exposé de la science que d'autres ont faite serait voué à une décadence rapide. »

En XI, il donne une définition du savant: c'est l'homme qui doit avoir l'esprit de recherche, une curiosité toujours en éveil, une patience inlassable et surtout de l'initiative. Il s'élève, avec M. André Pelletan, contre l'idée du concours suffisant à classer un individu pour toute sa vie.

En XIII, la Science établit une autorité incontestée, celle du fait objectif, à une époque où l'autorité basée sur les conventions sociales tend à disparaître. Le baccalauréat est énergiquement pris à partie: il divise la nation en deux castes dont l'une seulement peut prétendre à toutes les fonctions publiques. Le titre, le parchemin, fût-il scientifique, est un préjugé de l'esprit littéraire.

En XV, ce malheureux baccalauréat n'est, dans les Facultés scientifiques, qu'une survivance du passé. Bravo ! Comme on comprend cela quand on enseigne et qu'on examine dans une Faculté pourvue de nombreux instituts techniques !

En XVIII et XIX nous revenons à de grands savants. Signalons des documents peu connus: les notes obtenues par Henri Poincaré à ce toujours maudit baccalauréat. Et cela tourne encore un petit peu plus au désavantage du diplôme.

L'article XXI est l'éloge d'un savant technicien d'origine alsacienne, M. Alfred Picard.

En XXII nous revenons à Henri Poincaré, élève en mathématiques spéciales au Lycée de Nancy. On trouve chez l'élève l'esprit humoristique qui transparaissait encore quelquefois, plus tard, chez le grand homme

En XXIII il s'agit de Van Tieghem, type du savant cherchant la Vérité *une*, sans aucune relativité, aussi bien dans la Science que dans la vie.

Les derniers discours ou écrits se rapportent à la guerre, au terrible

phénomène qui, si l'on y comprend ses répercussions, n'a point cessé de secouer effroyablement le monde depuis 1914. M. Appell en a suivi les péripéties avec un dévouement inlassable pour les œuvres qui, comme le Secours National, s'efforçaient d'adoucir tant de misères, et avec une confiance inébranlable en une fin juste qui rendrait aux Alsaciens, en particulier à lui et aux siens, la patrie autrefois perdue. Une foi ardente est dans ces pages. Aux élèves du Lycée de Reims, récemment rouvert, il demande de représenter la France au travail de même que les aînés ont représenté la France aux armées. Pour l'éminent géomètre, il est évident que le patriotisme se prouve d'abord en travaillant. Et le travail apporte par surcroît une tranquillité d'esprit qui ne se dément pas dans les circonstances les plus sombres.

Qu'il me soit permis ici de terminer par une anecdote qui me paraît se placer tout naturellement avec tant d'autres qui vont au cœur.

C'était dans les premières semaines de la guerre. Nos troupes battaient en retraite après Charleroi. Faut-il rappeler quelle angoisse nous étreignait. Pour ma part, le travail original était impossible et je devais avoir de nombreux imitateurs car, en août 1914, les Notes mathématiques étaient à peu près absentes des Comptes rendus de l'Académie des Sciences. Le 7 septembre parut une communication de M. Appell, *Sur une transformation de certaines fonctions déduites des fonctions* Θ *de degrés supérieurs*. Je la lus vers le 15, à cette date la victoire de la Marne était acquise ! Nous pouvions admirer l'héroïsme de nos soldats et, par surcroît, les propriétés des fonctions Θ. Mais M. Appell avait dû évidemment travailler à ce sujet justement avant le prodigieux revirement qui sauvait la France, dans des jours si sombres qu'on pouvait les croire désespérés. Personne n'imaginera qu'il avait réussi à s'abstraire du terrible drame mais il avait tenu, sans doute, à donner un exemple de calme et de courage qui, pour ma part, me ramena immédiatement à la recherche mathématique !

A. Buhl (Toulouse).

Henri Bergson. — **Durée et simultanéité,** à propos de la théorie d'Einstein. — 1 vol. in-16, VIII + 245 p., 8 fr., Felix Alcan, Paris 1922.

Rappelons que le problème de la durée, « la clef des plus gros problèmes philosophiques », fut le principal objet des études si profondes et philosophiquement si remarquables du grand philosophe français.

Depuis plus de trente ans il oppose le temps réel et psychologiquement vécu au temps mathématique projeté dans l'espace.

Plus d'un penseur attendaient, avec quelque impatience, qu'il voulût bien se prononcer sur la conception du temps, que les physiciens ont dégagé des formules d'Einstein-Lorentz et c'est par là qu'une analyse bibliographique de ce petit livre peut prendre place ici.

Les théories d'Einstein attirèrent son attention dès 1911. Ce travail de subtile méditation, il l'avait entrepris sans songer à le publier, mais, comme nous l'indique la préface, il se rendit bientôt compte qu'il présentait un intérêt général.

M. Bergson tente de légitimer philosophiquement, par des arguments qui paraîtront peut-être un peu spécieux, la notion commune du temps universel. Cette étude contient un examen très profond de l'expérience de Michelson, de la transformation de Lorentz ainsi que de la métaphysique que l'on a tenté de dégager, trop hativement, de la conception relativiste.

« Cet examen, dit M. Bergson, nous donna un résultat assez inattendu. Non seulement les thèses d'Einstein ne paraissaient plus contredire, mais encore elles confirmaient, elles accompagnaient d'un commencement de preuve la croyance naturelle des hommes à un temps unique et universel. Elles devaient simplement à un malentendu leur aspect paradoxal. »

Au début de son étude M. Bergson semble refuser aux physiciens le droit de parler, à la fois, de deux observateurs en chair et en os, O et O', dans deux systèmes S et S' en translation uniforme l'un par rapport à l'autre. Si x et t sont des intervalles d'espace et de temps effectivement mesurés ou vécus par l'observateur O, les quantités correspondantes par la transformation de Lorentz, x' et t', ne sont que des fictions mathématiques et non des quantités effectivement mesurées. L'horloge de s' ne marque pas t', semble-t-il, quoique l'affirmation de l'auteur ne soit pas absolument formelle sur ce point.

Le point de vue de M. Bergson est donc opposé à celui des physiciens. Plus que cela, les expériences faites sur le déplacement des raies spectrales semble l'infirmer. Plus loin, cependant, M. Bergson déclare que l'équivoque impliquée dans l'interprétation des thèses d'Einstein est d'ordre plutôt métaphysique et qu'il est très difficile de la démasquer. Aussi, s'efforce-t-il de la faire entrevoir dans plusieurs exemples, dont il fait par ailleurs une analyse des plus fines et en retournant la question sur toutes ses faces. Cette équivoque, sur le terrain de la physique, nous déclarons ne pas l'apercevoir. Nous oserions même avancer, malgré la très grande autorité de l'auteur et le respect que nous lui vouons, que son attitude présente quelques flottements. Il semble avoir mis à la fin de son étude beaucoup d'eau dans son vin. Reprenons l'argument fondamental qui tend à légitimer l'hypothèse d'un temps unique et universel.

Supposons deux systèmes S et S' en translation uniforme. Nous pouvons toujours supposer en plus que S' est un duplicata de S. En vertu du principe de relativité S et S' sont interchangeables et leur différence est indiscernable, lorsqu'on se place à l'intérieur de l'un ou de l'autre de ces deux systèmes. Donc, il est naturel de supposer qu'ils vivent un seul et même temps. En raisonnant ainsi M. Bergson prend le principe fondamental de la relativité dans un sens ultra-relativiste, nous semble-t-il, dans son abstraction pure, en lui conférant une portée philosophique absolue.

Mais objecterions-nous, c'est l'aspect des phénomènes physiques qui reste le même et l'écoulement pur d'un temps n'est pas un phénomène physique, à moins qu'il ne se confonde avec le mouvement d'une horloge prise d'ailleurs dans sa conception la plus générale. Les temps pris à l'état pur dans l'un et l'autre système, ne revêtent aucune forme et se comportent mathématiquement comme de simples variables indépendantes. D'ailleurs, que signifie « un seul et même temps » M. Bergson le remarque lui-même lorsqu'il ajoute: « or, il est généralement difficile au philosophe d'affirmer avec certitude que deux personnes vivent le même rythme de durée. Il ne saurait même donner à cette affirmation un sens rigoureux et précis. »

M. Bergson ne paraît donc confirmer l'hypothèse d'un temps universel que d'une manière idéale et abstraite, en donnant au principe de relativité un sens absolu et métaphysique.

M. Bergson semble d'ailleurs accorder à la fin de son étude qu'il n'y a pas physiquement ou mathématiquement d'échappatoire aux formules de Lorentz.

Ce petit livre, d'un style alerte et vif, fourmille de remarques fines, suggestives et profondes. L'auteur voit en Einstein le véritable successeur de Descartes et dans la relativité généralisée l'aboutissement de la conception cartésienne de la physique: rien ne semble plus juste aujourd'hui.

Rolin Wavre (Genève).

L. Bieberbach. — **Lehrbuch der Funktionentheorie.** Band I : *Elemente der Funktionentheorie.* — 1 vol. de IV-314 pages; broché 18 fr. 70; relié 21 fr. 35; B. G. Teubner, Leipzig und Berlin, 1921.

Ce qui frappe dans les ouvrages didactiques de M. Bieberbach, et il en a publié plusieurs, c'est le souci constant de la précision et de la rigueur la plus parfaite et, chose assez rare, une grande clarté dans l'exposition des théories les plus subtiles. M. Bieberbach a su éviter l'écueil d'un formalisme étroit et sec, qui fait le désespoir des débutants. Chaque fois qu'un raisonnement court le risque de devenir trop abstrait, l'image vient à l'appui de la démonstration, et l'on comprend que cet appel à l'intuition est légitime, puisqu'il ne s'agit au fond que d'un langage plus commode et qu'il est toujours facile d'en donner l'équivalent analytique.

Ce premier volume est consacré à la partie classique de la théorie des fonctions analytiques: représentation conforme, intégrale de Cauchy, prolongement analytique, fonctions algébriques et leurs intégrales, un aperçu de la théorie des fonctions elliptiques, les théorèmes classiques de Weierstrass et de Mittag-Leffler et une étude fort intéressante de la fonction $\Gamma(z)$.

Mais ce qui distingue ce volume de quelques ouvrages similaires, c'est que l'auteur y a tenu compte, dans une mesure plus large qu'on ne le fait habituellement, des travaux des mathématiciens contemporains. En parlant par exemple des séries à termes complexes, il indique, sans la démontrer il est vrai, une très belle propriété de ces séries découverte par M. Steinitz en 1913 et qui est l'analogue d'un théorème classique de Riemann. De même dans les paragraphes consacrés aux séries à termes variables, et en particulier aux séries entières, il fait connaître quelques généralisations relativement peu connues du théorême d'Abel sur la limite vers laquelle tend la somme d'une série entière lorsqu'on se rapproche d'un point du cercle de convergence; il compte du reste reprendre l'étude de ce problème, qui a fait l'objet de recherches importantes, dans le second volume de son ouvrage.

Dans un autre chapitre il donne une démonstration très élégante du théorème fondamental de Cauchy-Goursat que l'on doit à M. Pringsheim. Très intéressantes sont aussi ses remarques à propos de la formule fondamentale de Cauchy, dont les démonstrations, qu'il critique, ne sont pas toujours, en effet, à l'abri de tout reproche.

Mais l'un des chapitres les plus curieux, à notre avis, est celui qui est consacré à la théorie du prolongement analytique. Après avoir défini la notion très délicate de fonction analytique d'après Weierstrass, qui souvent arrête les débutants, il établit le beau théorème de Poincaré-Volterra et arrive à la conception de Riemann qui complète celle de Weierstrass et qui lui permet de préciser la notion délicate aussi de points singuliers, à laquelle il avait déjà consacré des remarques importantes dans son article « Neuere Untersuchungen über Funktionen von komplexen Variablen » (Enc. der math. Wiss., 1921).

En lisant ce chapitre, il apparaît nettement combien il est utile, dans

l'étude de ce problème, de rapprocher les points de vue de Riemann et de Weierstrass. La même remarque s'applique du reste à bien des problèmes de la théorie des fonctions. Les théories de Cauchy, de Riemann et de Weierstrass se rejoignent les unes les autres, se pénètrent et se complètent et il nous semble, en effet, qu'on a tort, comme le fait remarquer avec raison M. Bieberbach dans la préface à son ouvrage, de les traiter dans des chapitres séparés.

C'est à des théories plus récentes, dont une grande partie se rattachent aux belles recherches de Poincaré, de M. Picard et de M. Hadamard, que sera consacré le second volume du traité de M. Bieberbach. La plupart de ces travaux ont déjà été exposés dans les monographies sur la théorie des fonctions publiées sous la direction de M. Borel et dans le petit volume de M. Landau « Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie ». Il reste à coordonner et à classifier ces résultats, à y mettre de l'ordre et de l'unité, ce qui n'est pas chose facile, car le champ est très vaste, mais la tâche que M. Bieberbach s'est imposée sera grandement facilitée par ses travaux antérieurs.

L'excellent ouvrage de M. Bieberbach est avant tout destiné aux étudiants, mais il pourra servir de guide à tous ceux qui désirent se mettre au courant de la théorie moderne des fonctions analytiques.

D. Mirimanoff (Genève).

E. Goursat. — **Leçons sur le Problème de Pfaff.** — 1 vol. gr. in-8° de VIII-388 pages; 30 francs; J. Hermann, Paris, 1922.

La publication de ces Leçons tombe admirablement à une époque où se développe un Calcul tensoriel qui, à beaucoup d'égards, prend modèle sur l'analyse des formes de Pfaff. Quant au problème pfaffien lui-même, il est toujours posé comme son créateur l'a posé. Il s'agit d'abord de l'étude de la forme

$$\omega = X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \ldots + X_n dx_n \ .$$

L'équation $\omega = 0$ définit une variété à $n-1$ dimensions si de certaines conditions d'intégrabilité sont satisfaites. Sans conditions, on peut toujours la réaliser sur une variété à une dimension c'est-à-dire sur une courbe. Or, entre les deux cas, il doit y avoir manifestement des cas intermédiaires avec variétés intégrales à $n - r$ dimensions. Ceci conduit à rechercher d'abord, pour ω, des *formes canoniques* que Pfaff envisageait déjà au travers d'intégrations successives et compliquées mais que des travaux modernes (notamment ceux de Gaston Darboux, de MM. Goursat et Cartan) rendent d'une considération beaucoup plus aisée.

Si l'on cherche à attacher à ω des variétés à deux dimensions, on est immédiatement conduit au *covariant bilinéaire* ω' de ω dont les coefficients

$$a_{ik} = \frac{\partial X_i}{\partial x_k} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i}$$

satisfont aux identités

$$\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_l} + \frac{\partial a_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial a_{li}}{\partial x_k} = 0 \ .$$

Nous sommes à un petit pas des équations de l'Electromagnétisme; d'ailleurs le calcul des variations et la Géométrie donnent plusieurs interprétations de ω'. Les a_{ik} permettent de construire quatre systèmes S_1, S_2, S_3, S_4 d'équations pfaffiennes; c'est surtout le fait, pour ces systèmes, de se composer d'équations non distinctes qui entraîne des réductions de structure pour ω. Telle est la substance essentielle du Chapitre I.

Le Chapitre II se rapporte à l'intégration d'une équation $\omega = 0$. Qui est seulement habitué aux méthodes classiques d'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre reconnaît sans peine qu'il y a là une extension de ces méthodes. Le langage est le même: systèmes caractéristiques, intégrales lieux de caractéristiques, etc..... D'ailleurs l'équation

$$p_1 = f(x_1, x_2, \dots, x_n, z; p_2, \dots, p_n)$$

revient évidemment à

$$\omega = f dx_1 + p_2 dx_2 + \dots + p_n dx_n - dz = 0 .$$

Avec le Chapitre III nous arrivons aux formes symboliques de différentielles. Cette expression, consacrée par l'usage, pourrait cependant prêter à l'erreur pour qui n'aurait pas encore abordé ces captivantes théories. Les nouvelles formes dont il s'agit sont naturellement à leur place sous les intégrales multiples, alors que, dans le même ordre d'idées, la forme ω ci-dessus pourrait être placée sous une intégrale simple. Elles ne sont pas moins tangibles que ω, mais elles obéissent à des règles de calcul à symbolisme vectoriel. Les produits $dx_1 \, dx_2 \dots$ n'admettent point la duplication des facteurs et changent de signe quand on intervertit deux facteurs consécutifs. C'est ce que M. Goursat a excellemment expliqué sur d'ordinaires intégrales doubles.

On pressent maintenant comment vont s'orienter les recherches. On étudiera les réductions canoniques des différentielles d'ordre supérieur qui viennent d'être introduites.

L'extrême intérêt de la chose, le principal même est que la théorie établie pour la forme linéaire ω s'étend aisément, élégamment, à tous les ordres. Les formules les plus pratiques qui apparaissent alors sont vraisemblablement celles qu'on peut dire du type *stokien*. Une intégrale multiple porte sur une certaine forme et est égale à une intégrale d'ordre supérieur d'une unité, à champ d'intégration déformable, cette dernière intégrale portant sur la *dérivée* de la forme primitive. C'est sans doute ici qu'apparaît, de la manière la plus visible, ce contact avec le Calcul tensoriel que M. Goursat signale lui-même. Nous ne sommes plus maintenant tout près des équations de l'Electromagnétisme; nous y sommes ! Ce sont les équations (54) de la page 151 [1].

Le Chapitre IV traite de l'application des formes symboliques au problème de Pfaff; il s'agit, bien entendu, du problème de Pfaff tel qu'il a été posé au début pour la forme linéaire ω. Le symbolisme du chapitre précédent n'a étudié des formes différentielles, à de certains points de vue plus com-

[1] Th. De Donder. *Champ électromagnétique de Maxwell-Lorentz et champ gravifique d'Einstein*, 1920. *Gravifique einsteinienne*, 1921. Paris, Gauthier-Villars.

A. Buhl. *Electromagnétisme et Gravifique* (Annales de la Fac. des Sc. de Toulouse. 1920).

plexes, que pour qu'on puisse maintenant les adjoindre à ω et définir notamment des *formes dérivées*, d'ordres divers pour ω. En prenant successivement ces dérivées on finit toujours par en rencontrer une qui est identiquement nulle et c'est sans doute là la manière la plus claire de concevoir la *classe* ou la forme canonique de ω.

On montre alors, très élégamment, que la dernière dérivée non nulle permet d'écrire immédiatement un système d'équations linéaires aux dérivées partielles, dit *système adjoint* Σ_1, dont les intégrales sont précisément les variables canoniques de la forme réduite. Un système Σ_2 construit de même à partir de l'avant dernière dérivée est identique au système S_3 du chapitre I. De là, on peut redescendre vers l'intégration de systèmes arbitrairement donnés d'équations aux dérivées partielles du premier ordre et, dans le même ordre d'idées, vers la construction des transformations de contact.

Le Chapitre V expose la théorie des invariants intégraux, en partant des définitions de Poincaré. Il importe maintenant d'être bref; nous dirons donc simplement que M. Goursat a traité de ces invariants dans leurs rapports très intimes avec les différentielles symboliques, les intégrales premières et la permutation des intégrales d'un système d'équations différentielles ordinaires.

Le Chapitre VI nous conduit aux systèmes formés de plusieurs équations de Pfaff. Ici la difficulté croît considérablement; elle est analogue ou, pour mieux dire, elle généralise la difficulté de passer d'équations aux dérivées partielles du premier ordre aux équations d'ordre supérieur. Inversement les équations d'ordre supérieur peuvent être traduites par des systèmes pfaffiens.

Dans le chapitre VII, consacré aux systèmes dérivés et au problème de Monge, l'intervention de dérivées partielles du second ordre se précise en des questions telles que celle des transformations de contact *prolongées*. Il s'agit d'équations de transformation qui contiennent non seulement des x, y, z, p, q, cas où elles seraient des transformations de contact ordinaires, mais aussi des r, s, t. Ce prolongement dépend de conditions d'intégrabilité de certains systèmes pfaffiens. Il y a là des choses impossibles à décrire brièvement mais dont l'intérêt est d'autant moins niable qu'elles semblent appeler de nouvelles et profondes recherches.

Le problème de Monge généralise l'équation $\omega = 0$ en remplaçant ω par une forme différentielle homogène mais non linéaire par rapport aux dx. Il dépend, lui aussi, d'un système pfaffien spécial.

Enfin le chapitre VIII termine l'ouvrage par les multiplicités intégrales et le genre d'un système de Pfaff. Ici sont condensés les théorèmes d'existence analogues à ceux qui concernent les équations aux dérivées partielles. On y trouve des nombres entiers qui caractérisent les systèmes différents, ou mieux encore le degré d'arbitraire des solutions possibles. Ces recherches, de plus en plus élevées, mènent aux travaux de M. Ch. Riquier. Elles sont, en très grande partie, l'œuvre de M. E. Cartan; elles touchent à l'analysis situs, aux difficultueuses questions de déformation dans les hyperespaces non-euclidiens. Et comme les noms de MM. Riquier et Cartan ne vont évidemment point sans être précédés de celui de M. E. Goursat lui-même, il n'est pas inutile de souligner, comme je l'ai fait en maints autres endroits, que la France ne manque point de savants créateurs pour lesquels la très belle analyse des théories einsteiniennes n'a jamais eu de secrets.

A. Buhl (Toulouse).

G. Juvet. — **Introduction au calcul tensoriel et au calcul différentiel absolu.** Préface de M. Jacques Hadamard. — 1 vol. in-8°, 100 p.; 12 fr.; Librairie scientifique Albert Blanchard, place de la Sorbonne, Paris 1922.

Un phénomène physique est le siège d'actions qui se transmettent par contact suivant des lois déterminées. Mais nous ne pouvons formuler ces lois qu'en faisant choix d'un système de coordonnées, car elles expriment des relations entre grandeurs résultant de mesures faites sur le phénomène. Ces lois revêtent dans le système que l'on a choisi une forme particulière. Dans tout autre système de repérage, elles revêtiraient une forme différente, elles apparaîtraient sous un autre aspect.

Or le principe fondamental de relativité formulé par Einstein est le suivant :

Les lois de la physique doivent être valables dans un système de référence absolument quelconque.

En d'autres termes, une loi physique n'a pas de signification absolue lorsqu'elle n'est exprimable que dans un système de référence particulier, parce qu'elle est entachée de ce qu'il y a de subjectif dans cette manière spéciale de regarder le phénomène. Si la loi correspond à une réalité physique, on doit pouvoir la formuler indépendamment d'un choix particulier du système de référence. Nous ne pouvons pas, toutefois, nous débarrasser complètement du système de repérage et faire de la physique exactement comme les Grecs faisaient de la géométrie, d'une manière intrinsèque. Il nous faut pour un instant au moins un système de mesure particulier. Que se passe-t-il lorsque l'on change de système de coordonnées. Les éléments qui entraient dans l'expression de la loi changent de valeur. Alors de deux choses l'une : ou bien la relation qui lie les nouveaux éléments dans les nouvelles coordonnées est de même forme que celle qui lie les anciens éléments dans les anciennes coordonnées, ou bien il n'en est rien.

Dans le premier cas, la loi sera « covariante » vis-à-vis d'une transformation de coordonnées et le principe de relativité revient à affirmer que les lois de la physique doivent revêtir une forme covariante.

En d'autres termes, l'expression d'une loi physique se transforme lorsqu'on change de système de référence mais elle doit se transformer suivant un mode déterminé.

Dès lors, les relativistes étaient en droit de demander aux mathématiciens de former le thème d'un calcul qui permît, étant donnée l'expression d'une loi dans un système particulier, d'exprimer immédiatement cette loi dans un système quelconque et de dégager *a priori* les caractères de covariance.

Grâce aux travaux de Riemann, Christoffel, Ricci et Levi-Civita, les géomètres étaient en possession de ce nouveau calcul, bien avant qu'Einstein en montra la portée physique. C'est le calcul tensoriel.

Un tenseur est un ensemble de quantités (ses composantes) données dans un système de référence et qui se transforme lorsqu'on passe de ce système à un autre, suivant un mode déterminé, au moyen des relations qui expriment les nouvelles coordonnées en fonction des anciennes. Transporté sur le terrain de la géométrie infinitésimale, qui est aussi celui des actions par contact en physique, le calcul tensoriel devient le calcul différentiel absolu. Les expressions des nouvelles composantes d'un tenseur étaient linéaires et homogènes en fonction des anciennes, si ces composantes sont nulles dans un système, elles sont nulles dans tous les autres. L'annu-

lation d'un tenseur, c'est-à-dire de ses composantes, sera donc propre à représenter une loi physique conformément au principe de relativité. Il en est de même d'une égalité entre deux tenseurs.

On peut dire que le calcul différentiel absolu fut un instrument d'une vertu presque magique pour dégager et formuler les lois conformes au principe de relativité. Je n'ai donc pas besoin d'insister sur l'importance de cette introduction au calcul tensoriel, où M. G. Juvet, s'adressant spécialement au débutant, a réussi à donner d'une manière très simple et très claire les principes fondamentaux du maniement de cette nouvelle algèbre, en ne négligeant pas de développer, pour ceux auxquels le nouvel algorithme, pourrait paraître trop formel, quelques applications simples à la géométrie élémentaire.

On trouvera dans cette introduction les principes du calcul vectoriel et de l'algèbre tensorielle, puis la géométrie d'une multiplicité quelconque attachée à la forme métrique de Riemann. Il faut faire mention spéciale de la question du déplacement parallèle d'après M. Leví-Civita, qui immerge la multiplicité dans un espace euclidien à un nombre suffisant de dimensions. Cette manière d'envisager le déplacement se trouve dans un mémoire du *Circolo matematico* de l'année 1917, mais elle n'est pas traitée dans les ouvrages de MM. Eddington, Weyl, Marcolongo, ou Becquerel, dont nous avons déjà fait l'analyse pour cette Revue.

L'introduction de M. Juvet contient aussi une ample bibliographie du calcul tensoriel.

Rolin Wavre (Genève).

Beppo Levi. — **Abbaco da 1 a 20**. Illustrazioni di Ellebi. — 1 vol. in-8°, de 60 p. ; 3 l. 50 ; B. Levi, editore ; Parma, 1922.

Ceci est sans doute l'ouvrage mathématique le plus élémentaire que nous ayons jamais analysé. C'est le premier livre d'arithmétique à mettre entre les mains d'un enfant ; il rappelle, par l'aspect, les plus jolis et artistiques alphabets illustrés. Il est destiné à enseigner non les rudiments de la lecture, mais ceux de la science des nombres.

Avec l'aide d'un excellent dessinateur, l'auteur a fort joliment groupé des bambins, des animaux, des fleurs, des fruits, etc,, et c'est à ces groupes d'êtres ou d'objets qu'il fait correspondre les nombres entiers. Il définit ceux-ci par l'adjonction de l'unité à l'entier précédent, et ce, toujours par de jolies images.

Il développe la notion d'addition, puis celle des trois autres opérations fondamentales, mais sans jamais faire intervenir de nombres supérieurs à 20. Il insiste beaucoup sur l'idée de *moitié*, idée typique et aussi simple que possible pour la division. Lina et Charlot font de profondes réflexions pour se partager 9 figues ; on peut, à la rigueur, en couper une en deux. Mais si le jardinier voulait mettre 17 plantes sur deux rangs ? Profond mystère ! Il y a donc des nombres qu'on ne peut diviser ? C'est charmant et le dessinateur est toujours un collaborateur précieux.

Après ces pages enfantines, l'auteur en a mis quelques autres destinées aux parents et contenant des conseils qui rappellent assez que c'est un mathématicien de valeur qui a voulu se mettre à la portée des petits.

Voilà une œuvre italienne digne d'être imitée en toutes les langues.

A. Buhl (Toulouse).

Paul Lévy. — **Leçon d'analyse fonctionnelle**, professées au Collège de France (collection de monographie sur la théorie des fonctions). Préface de M. J.-H. Hadamard. — 1 vol. in-8°, vi + 442 p.; 35 fr.; Gauthier-Villars et Cie, Paris, 1922.

Au début de ce siècle, les analystes fondaient une grande espérance sur la notion de fonction de ligne, introduite dans la science par M. Volterra et sur ses développements qui constituent le calcul fonctionnel. Il semblait que de cette notion on pût dégager, un jour, le plus puissant instrument de l'analyse.

Malgré cela, aujourd'hui encore, ceux qui ont fait du calcul fonctionnel leur spécialité sont très peu nombreux. M. Paul Lévy fut presque seul à tenir le flambeau, ces dernières années, en développant l'analyse fonctionnelle pour elle-même et dans le sens d'une généralisation du calcul infinitésimal. Nous ne saurions faire la part assez grande aussi à l'école de M. Fréchet, mais elle est dirigée plus spécialement vers la partie abstraite de cette nouvelle discipline. M ntionnons aussi M. Gateaux, mort à la guerre en septembre 1914, à qui l'on doit quelques-unes des notions les plus profondes et les plus originales.

Si l'on a pu comparer le calcul fonctionnel à la montagne qui accouche d'une souris, nous estimons que le livre si riche d'idées fécondes et suggestives en même temps que de résultats cristallisés et désormais classiques, que M. Paul Lévy publie aujourd'hui, contribuera à augmenter l'intérêt que l'on porte à ces questions et fera peut-être renaître, plus éprouvée, la grande espérance d'autrefois.

Il faut distinguer deux domaines dans le calcul fonctionnel.

Une fonction de lignes est un nombre dont la valeur dépend de toutes les valeurs d'une fonction appelée argument, ce nombre variant en général lorsqu'on fait varier l'argument. L'exemple le plus simple de fonction de ligne, ou de fonctionnelle est l'intégrale définie.

Dans l'étude des fonctions de points $f(x)$, on néglige habituellement l'étude du champ de variabilité de la variable indépendante, car dans les cas ordinaires, celui-ci se réduit à un intervalle et il n'y a rien de plus simple. Mais, lorsqu'il s'agit d'une fonction de lignes, les choses se présentent différemment et le premier domaine qui est ouvert au calcul fonctionnel est l'étude des ensembles de fonctions ou de lignes et des caractères de continuité ou de discontinuité de la fonctionnelle définie sur ces ensembles.

Cette étude a été entreprise par MM. Arzela, Hilbert, Montel et surtout, d'un point de vue plus systématique et abstrait par M. Frechet. M. Tonelli a réuni les propriétés essentielles de ces ensembles dans son livre *Fondamenti del calcolo delle variazioni* dont nous avons dit un mot dans une notice précédente.

Le second domaine est l'extension aux fonctionnelles des notions de dérivation, d'équation différentielle et, après elles, de tout le calcul infinitésimal.

D'importants résultats ont été obtenus dans cette voie.

M. Hadamard, dans ses *Leçons sur le calcul des variations*, M. Volterra dans ses *Leçons sur l'intégration des équations différentielles aux dérivées partielles professées à Stockholm*, puis dans deux monographies de la collection Borel *Leçons sur les équations intégrales et les équations intégro-différentielles* et *Leçons sur les fonctions de ligne;* M. Paul Lévy, lui-même, dans sa thèse et dans différents mémoires parus dans les

Rendiconti del circolo matematico di Palermo avaient déjà introduit la notion de dérivée fonctionnelle et d'équations aux dérivées fonctionnelles qui généralise la notion d'équation différentielle. Ces différents auteurs ont spécialement approfondi les questions d'analyse fonctionnelle en rapport avec des problèmes classiques de physique mathématique.

C'est ce second domaine qu'explore le jeune professeur de l'Ecole polytechnique de Paris dans ses leçons d'analyse fonctionnelle et cela par intérêt purement analytique.

Dans ce vaste champ, M. Volterra et M. Hadamard ont cueilli quelques fleurs d'un remarquable éclat; l'équation aux dérivées fonctionnelles partielles, à laquelle conduit le problème de Dirichlet, l'expression de la variation de la fonction de Green et l'équation d'Hadamard, la représentation d'une fonctionnelle linéaire par une limite d'intégrale, constituent des résultats, on ne peut plus élégants, propres à encourager les chercheurs.

Le livre actuel contient une foule de questions nouvelles. M. Paul Lévy a plus d'une fois proclamé que tout chapitre de l'analyse a sa généralisation dans le calcul fonctionnel. Ce sont quelques-unes de ces généralisations qu'il a développées.

Il s'est donc placé sur un terrain plus général, parfois entièrement nouveau, et a procédé d'une manière plus systématique que M. Volterra en particulier.

Un exposé complet de l'analyse fonctionnelle devrait contenir la théorie des fonctions à une infinité de variables, des formes quadratiques à une infinité de dimensions et des équations intégrales, ainsi que tout le calcul des variations. Mais ce sont là des enfants émancipés et pour ainsi dire détronqués. M. Lévy a dû se restreindre à ce qui procède de l'idée de fonction de ligne dans ce qu'elle a de plus pur.

Il étudie différentes formes de continuité d'une fonctionnelle, puis les représentations générales d'une fonctionnelle continue, qui généralisent le développement en série de polynomes données par MM. Hadamard, Frechet et Riesz.

Puis il aborde l'étude de la dérivation d'une fonctionnelle et de l'intégration de différents types d'équations aux dérivées fonctionnelles du premier ordre et parvient à la généralisation des notions d'intégrale complète, de caractéristique et de la méthode d'intégration de Cauchy.

M. Lévy avait déjà introduit dans sa thèse (1910) la notion d'équation complètement intégrale qui jette une vive lumière sur ces questions difficiles.

Mentionnons en passant une généralisation des équations de Jacobi-Hamilton dont s'était occupé déjà M. Prange.

Enfin, plusieurs chapitres sont consacrés à l'étude des équations aux dérivées fonctionnelles partielles du second ordre, d'une équation généralisant celle de Laplace et des fonctionnelles harmoniques. Cette étude introduit une formule qui généralise celle de Green et nécessite la notion d'intégrale dans le domaine fonctionnel, laquelle, comme l'a montré Gateaux, doit se ramener à celle de moyenne. Comme le fait remarquer l'auteur, tandis que, jusqu'ici, l'analyse fonctionnelle présentait avec l'analyse ordinaire une analogie remarquable, la théorie de la moyenne en calcul fonctionnel est quelque chose d'essentiellement nouveau.

L'étude de ce livre exige des connaissances très étendues.

M. Lévy a, autant que possible, rappelé sommairement les notions qui

sont indispensables pour épargner le temps des lecteurs qui pénétreraient dans ce vaste champ pour la première fois ; notamment les notions d'intégrales de Lebesgue et de Stieltjes.

L'analyse fonctionnelle est en plein défrichage. M. Lévy à qui l'on doit, avec M. Gateaux, les principaux résultats et les idées les plus suggestives et les plus profondes dans ce domaine, laisse de nombreuses questions inachevées. Il y a là matière à des recherches qui pourraient être très fructueuses. Ceux qui s'y sont spécialisés sont rares. Mais nous croyons que la publication de ce livre, impatiemment attendue, engagera quelques jeunes mathématiciens à suivre cette voie, en même temps qu'elle facilitera et systématisera leurs recherches. Rolin Wavre (Genève).

Ch.-J. de la Vallée-Poussin. — **Cours d'analyse infinitésimale.** — Quatrième édition ; 2 vol. in-8°. Tome I, IX + 434 p., 1921 ; tome II, XII + 478 p., 1922 ; A. Uystpruyst-Dieudonné, Louvain ; Gauthier-Villars et Cie, Paris.

Il serait superflu de rappeler l'importance et l'utilité, pour ceux qui étudient ou enseignent le calcul infinitésimal, du cours d'analyse de l'éminent mathématicien belge. La troisième édition, presque achevée, a disparu dans les flammes à Louvain en août 1914. Elle contenait une contribution personnelle étendue à la théorie des ensembles et de l'intégrale de Lebesgue. Depuis lors, M. de la Vallée-Poussin a publié ses recherches sur ce sujet dans son ouvrage : « Intégrale de Lebesgue, fonctions d'ensemble, classes de Baire » (Paris, Gauthier-Villars, 1916). Ces questions, ainsi que celles traitées en petit texte dans l'ancienne édition, ne figurent plus dans la nouvelle. Souhaitons qu'elles puissent prendre place, avec d'autres, comme l'auteur l'espère dans un troisième volume de la présente édition.

Un progrès essentiel, réalisé en mathématique pure durant ces dernières années, a consisté à réduire au minimum les suppositions que l'on doit faire sur un être mathématique, pour pouvoir lui attribuer telle propriété, qu'on lui reconnaît dans un cas particulier. S'il est plus simple de faire dans une démonstration quelques hypothèses surabondantes, sur l'être que l'on étudie, pour énoncer une proposition, il est, par contre, plus logique de réduire ces hypothèses autant que possible, pour atteindre à un plus haut degré de généralité. Une telle méthode, avare d'hypothèses, montre, en plus, la charpente d'une théorie, la manière dont les propositions s'emboîtent les unes dans les autres. Cette préoccupation se retrouve dans de nombreux chapitres de ce cours, notamment, au début, dans l'étude des fonctions continues, des conditions de dérivation et de différentiation des fonctions explicitement ou implicitement définies. C'est ainsi, par exemple, que l'auteur donne le théorème d'existence des fonctions implicites sous la forme générale de M. Young. Au même point de vue, les théorèmes d'existence des équations différentielles et les propriétés des intégrales envisagées dans un système donné, et comme fonctions des valeurs initiales ou de certains paramètres sont traités avec plus de soin qu'on ne le fait d'ordinaire. Si M. de la Vallée-Poussin n'a pas abordé, dans ce cours, l'étude des fonctions analytiques, des travaux de Cauchy, Riemann et Weierstrass, c'est au bénéfice d'une étude plus détaillée et plus minutieuse du domaine réel. Mentionnons, sans avoir la prétention d'être complet dans notre analyse, certains chapitres dont l'étude est spécialement approfondie.

Les intégrales eulériennes, exposées déjà dans la première édition, sont reprises ici d'une façon détaillée : nombres de Bernoulli, fonctions B et Γ, formule de Legendre, produit d'Euler, intégrale de Raabe, expression des eulériennes en produit infini et représentation asymptotique.

L'auteur nous avise modestement dans sa préface, que l'on reconnaîtra sans peine dans ce chapitre l'empreinte de l'enseignement d'Hermite.

Dans un nombre de pages équivalent, une trentaine environ, l'auteur donne un exposé qui nous paraît assez étendu des propriétés que l'on peut énoncer relativement aux séries de Fourier et aux séries trigonométriques, sans faire intervenir la notion d'intégrale de Lebesgue. Mentionnons : le théorème de Riemann en vertu duquel la manière dont se comporte la série de Fourier au point x ne dépend que des valeurs de la fonction dans le voisinage du point x ; la condition nécessaire et suffisante pour que la série de Fourier converge vers une limite déterminée ; les critères de convergence de la série vers la fonction qui lui a donné naissance, notamment ceux de Dini et de Jordan.

Puis un certain nombre de pages sont consacrées aux procédés de sommation des séries de Fourier, au théorème de Hardy-Landau, à l'étude des singularités des séries de Fourier, puis à l'étude des séries trigonométriques quelconques dans laquelle, comme on sait, la dérivée seconde généralisée de Riemann et un théorème de Schwarz jouent un rôle essentiel et permettent d'arriver au théorème de l'unicité du développement.

Mentionnons, en passant, une introduction très courte, mais très suggestive au calcul des différences finies. Les applications géométriques n'ont point été négligées. En particulier, l'étude des lignes tracées sur une surface y occupe une soixantaine de pages et les lignes géodésiques à elles seules une vingtaine. On sait l'importance de cette dernière notion, ainsi que celle de courbure dans la mécanique relativiste. Ceux auxquels l'étude de la multiplicité riemannienne à quatre dimensions paraîtrait trop formelle trouveront dans ces quelques pages et sans avoir besoin de consulter les leçons de Darboux, une étude détaillée de ces notions, attachées à la forme métrique de Riemann, pour une multiplicité visible et tangible à deux dimensions. Mentionnons les notions de courbure et de torsion géodésique; invariance de la courbure géodésique relativement à une déformation de la surface ; équation différentielle des géodésiques en coordonnées quelconques ; étude des lignes géodésiques infiniment voisines, condition pour qu'elles ne se coupent pas ; unicité d'une géodésique passant par deux points sur une surface à courbure négative ; expression de la longueur d'une géodésique, condition pour qu'elle jouisse de la propriété connue de minimum et enfin, coordonnées polaires géodésiques.

Je suspends ici cette analyse. Qu'il me suffise d'avoir montré que, pour le domaine réel, le cours de M. de la Vallée-Poussin est sur de nombreux points, plus détaillé que ceux de MM. Jordan, Picard ou Goursat, auxquels on sera souvent tenté de le comparer.

Il faudrait une analyse plus approfondie pour dégager l'apport personnel de l'auteur aux matières qui y sont abordées. Cet apport est certainement très important.

R. Wavre (Genève).

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

1. Livres nouveaux :

Tous les ouvrages adressés à la Rédaction sont signalés ici avec une brève indication de leur contenu, sans préjudice de l'analyse dont ils peuvent être ultérieurement l'objet sous la rubrique «Bibliographie».

L'Académie royale de Belgique depuis sa fondation (1772-1922). — 1 vol. in-8 de 342 p.; Hayez, Imp. de l'Académie, Bruxelles.

Publié à l'occasion du 150 anniversaire de l'Académie Royale de Belgique, ce livre fournit un tableau sommaire du rôle que joue cette institution dans la vie intellectuelle belge. On trouvera dans l'histoire de la classe des sciences un aperçu des travaux fournis par les savants qui ont appartenu à la section des sciences mathématiques et physiques Quetelet, Catalan, J. de Tilly, Paul Mansion, J. Massau, Fr. Deruyts, etc.).

American Mathematical Society, Colloquium Lectures, Volume V : **The Cambridge Colloquium 1916,** Part I. Griffith Conrad Evans : Functionals and their Applications selected Topics, including integral Equations. Part II : Oswald Veblen : Analysis Situs. — 1 vol. in-8, de 136 et 150 p.; American Math. Soc., New-York.

Ce volume contient les conférences faites en 1916 sous les auspices de l'*American Mathematical Society.* Dans la première partie sont reproduites les cinq conférences de M. Evans sur les problèmes fondamentaux du calcul fonctionnel et quelques-unes de ses applications, d'après les travaux de MM. Volterra, Bôcher, P. Lévy, E.-H. Moore, etc.).

La seconde partie comprend les conférences dans lesquelles M. Veblen expose les principes fondamentaux de l'Analysis situs des multiplicités d'après les travaux de Poincaré.

E. Bauer. — **La théorie de la relativité.** Préface de M. Langevin. — 1 vol. in-8, de 128 p., broché, 6 fr. Librairie de l'Enseignement technique, L. Eyrolles, Paris.

M. E. Bauer, professeur à la Faculté des Sciences de Strasbourg, vient de publier une excellente introduction à la théorie de la relativité. Nous la signalons tout particulièrement à l'attention de ceux qui désirent faire une première étude de la théorie sous la conduite d'un physicien.

« Ceux qui voudront bien suivre M. Bauer, dit M. Langevin dans sa Préface, peuvent être certains d'avoir un bon guide vers les hauts sommets récemment découverts et les grands horizons sur lesquels, çà et là, flotte encore un peu de la brume du matin, mais où notre avant-garde a déjà exploré des pays merveilleux ».

E. Borel. — **Méthodes et problèmes de théorie des fonctions.** (Collection de monographies sur la théorie des fonctions). — 1 vol. in-8 de 148 p.; Fr. 12; Gauthier-Villars et Cie, Paris.

Dans ce neuvième volume de la Collection de Monographies sur la théorie des fonctions, M. Borel a rassemblé un certain nombre de Notes et de Mémoires qui n'avaient pas trouvé place dans les Ouvrages antérieurs et dont certains lui ont paru cependant pouvoir être le point de départ de recherches nouvelles. Il les a fait précéder d'une courte *Introduction* où il a indiqué de quelle utilité peuvent être les comparaisons et le langage de la biologie en théorie des fonctions.

J. Boussinesq. — **Cours de physique mathématique de la faculté des sciences.** — Compléments au tome III : Conciliation du véritable déterminisme mécanique avec l'existence de la vie et de la liberté morale. — 1. vol. in-8 de XLVIII-217 p.; Fr. 30; Gauthier-Villars et Cie, Paris.

Dans ce volume l'auteur présente une série de notes complémentaires au tome III de sa théorie analytique de la chaleur. Dans son étude sur la conciliation du véritable déterminisme avec l'existence de la vie et de la liberté morale, il examine les objets suivants :

Considération sur la représentation analytique des phénomènes et sur leur division, indiquée par la théorie, prouvée par l'expérience, en deux classes très distinctes. — Exemples de solutions singulières en mécanique : elles ne s'y présentent que pour certains modes d'état initial, artificiellement irréalisables. — Sur l'existence, pressentie peut-être par Poisson, d'une dynamique supérieure ou dynamique des principes directeurs. Conclusion de ce Mémoire.

C. Brandenberger. — **Das abgekürzte Rechnen.** — 1 vol. in-8 de 22 p.; Fr. 1.50; Orell Füssli, Ed., Zurich.

Les maîtres de l'enseignement secondaire trouveront dans ce petit opuscule un excellent exposé des notions sur les approximations dans les calculs numériques destinées aux élèves des classes supérieures.

H. Galbrun. — **Introduction à la théorie de la relativité, Calcul différentiel absolu et géométrie.** — 1 vol. in-8 de 460 p.; Fr. 60; Gauthier-Villars et Co, Paris.

Après une étude complète des méthodes du calcul différentiel absolu, l'auteur expose la théorie du déplacement parallèle d'un vecteur, selon M. Lévi-Cività et selon M. Weyl. Dans une seconde partie, il analyse les difficultés présentées dans la théorie électromagnétique classique par l'interprétation des expériences de Michelson et de Fizeau ainsi que la solution que M. Einstein s'est proposé de leur donner en imaginant la théorie de la relativité restreinte.

M. Grossmann. — **Darstellende Geometrie**, I. Teil (Teubners Technische Leitfäden, Band 2), zweite durchgesehene Aufl. — 1 vol. in-8, de 81 p. avec 134 fig. et 100 exercices; Fr. 4.55; B. G. Teubner, Leipzig.

Le tome I du Précis de Géométrie descriptive de M. Marcel Grossmann, professeur à l'Ecole polytechnique fédérale de Zurich, contient les notions fondamentales de la méthode de Monge avec l'étude des problèmes rela-

tifs au prisme, à la pyramide et aux corps ronds. Cette nouvelle édition ne diffère de la première que par quelques améliorations dans le texte et les figures.

J. Haag. — **Cours complet de mathématiques spéciales**. — Tome III. *Mécanique*. — 1 vol. in-8 de 188 p.; Gauthier-Villars et Cie, Paris.

L'auteur expose les éléments de mécanique rationnelle qui figurent au programme de mathématiques spéciales. Les matières sont réparties comme suit : Notions générales de cinématique — Mouvements ponctuels remarquables — Cinématique du corps solide — Principes fondamentaux de la Dynamique — Dynamique du point — Notions sur la Dynamique des systèmes — Les unités en Mécanique — Statique — Applications de la statique.

Dans les applications et les exercices on trouvera de nombreux problèmes qui se présentent couramment en Physique ou dans l'industrie. Des exemples numériques permettent de familiariser le lecteur avec l'emploi des unités.

Hurwitz-Courant. — **Funktionentheorie** (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellung.) Vorlesungen über *allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen*, hrsggb. u. ergänzt durch einen Abschnitt über *Geometrische Funktionentheorie*. — 1 vol. in-8 de 392 p. avec 122 fig.; broché, Fr. 15; J. Springer, Berlin.

L'ouvrage comprend trois parties. Dans les deux premières, se trouvent reproduites les leçons sur la théorie générale des fonctions et les fonctions elliptiques, professées par A. Hurwitz à l'Ecole Polytechnique fédérale de Zurich, et basées principalement sur les méthodes de Weierstrass. Le point de vue de Riemann et ses développements modernes sont exposés dans la troisième partie, rédigée par M. Courant, professeur à l'Université de Gœttingue.

G. Jäger. — **Theoretische Physik**, t. III : Elektrizität und Magnetismus (Sammlung Göschen) Fünfte, verbesserte Auflage. — 1 vol. in-16 de 139 p.; avec 33 fig.; Fr. 1,50. Vereinigung wissenschaftlicher Verleger, Walter de Gruyter et Co., Berlin.

Cinquième édition, revue et complétée, du troisième volume de la Physique théorique rédigé par le professeur G. Jäger (Vienne) pour la collection Göschen. L'auteur expose les notions fondamentales de l'électrostatique, du magnétisme et de l'électromagnétisme.

K. Kommerell. — **Der Begriff des Grenzwerts in der Elementarmathematik.** (Beihefte zur Zeitschrift für math. und naturwiss. Unterricht hrsgbn von W. Lietzmann u. W. Hillers) Nr. 6. — 1 vol. in-8 de 62 p. avec 25 fig.; B. G. Teubner, Leipzig.

Ce fascicule reproduit, avec quelques compléments, les conférences sur la notion de limite que M. Kommerell, professeur à l'Ecole technique supérieure de Stuttgart, a été appelé à faire aux maîtres de l'enseignement secondaire du Wurtemberg. Il sera lu avec profit par tous ceux qui sont chargés d'initier leurs élèves à la notion de fonction et aux méthodes du calcul infinitésimal.

Sophus Lie. — **Gesammelte Abhandlungen** auf Grund einer Bewilligung aus dem norwegischen Forschungsfonds von 1919 mit Unterstützung der Videnskapsselskap zu Kristiania und der Akademie der Wissenschaften zu Leipzig herausgegeben von dem norwegischen Mathematischen Verein, durch Friedrich Engel und Paul Heegaard. Dritter Band : *Abhandlungen zur Theorie der Differentialgleichungen.* Erste Abteilung, herausgegeben von F. Engel. — 1 vol. in-8, cartonné, de 789 p.; H. Aschehoug, Kristiania.

C'est par ce volume que commence la publication des mémoires scientifiques du savant mathématicien norvégien Sophus Lie. Il renferme les travaux sur la théorie des équations différentielles qui ont paru de 1872 à 1882 (42 mémoires annotés par M. Fr. Engel).

L. Kiepert. — **Grundriss der Differential-Rechnung.** II. Band : Einige grundlegende Untersuchungen aus der Algebra und Funktionen von mehreren unabhängigen Veränderlichen. — 1 vol. in-8 de 360 p. avec 193 fig., Helwingsche Verlagsbuchhandlung, Hanovre.

Quatorzième édition du Tome II du traité bien connu de Calcul différentiel de M. Kiepert, professeur à l'Ecole technique supérieure de Hanovre. L'ouvrage est principalement consacré à des chapitres complémentaires d'algèbre (résolution des équations algébriques, déterminants) et à l'étude des fonctions de plusieurs variables (différentiation; applications géométriques; série de Taylor; maxima et minima).

F. Michel et M. Potron. — **La composition de mathématiques** dans l'examen d'admission à l'Ecole Polytechnique de 1901 à 1921. (Exercices d'application du cours de mathématiques spéciales). — 1 vol. in-8 de 452 p. avec figures; 40 fr.; Gauthier-Villars et Cie, Paris.

Ce nouveau *Recueil de problèmes* comprend, dans sa première partie, les solutions développées des problèmes donnés au Concours d'admission à l'Ecole polytechnique de 1901 à 1921. Dans la deuxième partie les auteurs ont réuni et classé, dans l'ordre même du programme, tous les problèmes simples auxquels ils ont été conduits dans la première partie : Algèbre et analyse. — Trigonométrie et Géométrie analytique dans le plan. — Géométrie analytique dans l'espace et Mécanique.

Les candidats trouveront donc pour chaque partie importante du cours, une série d'exercices se rapportant uniquement à ce point précis. Ce Recueil sera aussi très utile aux professeurs en leur fournissant de nombreux types d'exercices, dont il leur sera facile de varier les combinaisons, suivant la force de leurs élèves.

C. H. Müller u. G. Prange. — **Allgemeine Mechanik** Grundlegende Ansätze und elementare Methoden der Mechanik des Punktes und der Punktsysteme. Eine Einführung für Studierende der Natur- und Ingenieur-Wissenschaften. — 1 vol. in-8 de 551 p.; Helwingsche Verlagsbuchhandlung, Hanover.

Sous le titre de « Mécanique générale » les auteurs ont réunis dans cet Ouvrage les notions fondamentales de mécanique rationnelle indispensables aux physiciens et aux ingénieurs.

Neue Lehrpläne für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht an den höheren Lehranstalten nach den Meraner Lehrpläne vom Jahre 1905 neubearbeitet vom deutschen Ausschuss für den math. u. naturwiss. Unterricht. — 1 vol. in-8, de 45 p.; broché, Fr 1.45; B G. Teubner, Leipzig.

Nouveaux plans d'études détaillés pour les mathématiques et les sciences naturelles dans l'enseignement secondaire supérieur allemand, avec une préface de M. H. E. Timerding et de nombreuses annotations d'ordre méthodologique.

S. Pincherle. — **Gli Elementi della Teoria delle Funzioni Analitiche.** (Parte Prima). — 1 vol. in-8 de 401 p.; 45 lires; Nicola Zanichelli, Bologne.

Première partie du Cours sur les éléments de la théorie des fonctions analytiques que professe l'auteur à l'Université de Bologne. Excellente introduction comprenant les notions essentielles sur les fonctions elliptiques, les fonctions hypergéométriques, la fonction eulérienne et la fonction gamma.

K. Rohn. — **Stereometrie**, Ein Handbuch für Studierende und Lehrer, mit einem Geleitwort von F. Klein. — 1 vol. in-8 de 188 p. et 65 fig.; 4 fr.; R. Noske, Borna-Leipzig, 1922.

Sous le titre de Stéréométrie, M. Rohn, professeur à l'Université de Leipzig, a réuni quelques chapitres de Géométrie synthétique qui forment un complément utile à l'étude de la Géométrie élémentaire à 3 dimensions et de la Géométrie descriptive.

Projection oblique et projection centrale; propriétés projectives. — Sphère, cylindre et cône. — Inversion. Projection stéréographique. — Sections planes du cône. — Sections coniques considérées comme projections centrales d'une circonférence. — Déplacements simples d'une figure géométrique; translation; symétrie; rotation. — Problèmes.

Salmon-Fiedler. — **Analytische Geometrie des Raumes** unter Mitwirkung von A. Brill, neu herausgegeben von Karl Kommerell. Erster Teil: Die Elemente und die Theorie der Flächen zweiter Ordnung. Fünfte Auflage. — 1 vol. in-8, 612 p. et 71 fig., Fr. 22.25; B. G. Teubner, Leipzig, 1922.

La cinquième édition allemande de la Géométrie analytique à trois dimensions de Salmon a été entièrement remaniée par M. Kommerell qui a tenu compte des tendances actuelles de la science. Ce premier volume est consacré aux éléments de la Géométrie analytique à trois dimensions et à l'étude des quadriques :

Systèmes de coordonnées; coordonnées plückeriennes, coordonnées tétraédriques. — Formes quadratiques; invariants. — Quadriques; classification; propriétés générales; cubiques gauches; faisceaux de quadriques. — Propriétés focales des quadriques. — Cônes du 2e ordre et coniques sphériques. — Invariants et covariants des quadriques. — Métrique projective.

L. Schlesinger. — **Einführung in die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen auf funktionentheoretischer Grundlage.** — Dritte neubearbeitete Auflage. — 1 vol. in-8 de 320 p.; Fr. 10; Walter de Gruyter u. Co., Berlin.

Nouvelle édition, entièrement refondue, de « l'Introduction à la théorie

des équations différentielles » rédigée par M. Schlesinger, professeur à l'Université de Giessen. Mis en harmonie avec les progrès de la théorie des fonctions cet ouvrage constitue pour l'étudiant un très bon guide dans cet important domaine de l'analyse.

Th. Schmid. — **Darstellende Geometrie.** I. (Sammlg. Schubert 65). — 1 vol. in-8 de 283 p. avec 170 fig. relié; 3e édition; fr. 7.50; Vereinigung wissenschaftlicher Verleger, Walter de Gruyter et Co, Berlin, 1922.

Troisième édition de la Géométrie descriptive rédigé par M. Th. Schmid pour la Collection Schubert, d'après le Cours qu'il professe à l'Ecole technique supérieure de Vienne. Ce premier volume est consacré à la Géométrie de Monge (problèmes fondamentaux concernant la sphère, les surfaces coniques, les surfaces cylindriques) et aux principes de l'axonométrie orthogonale.

H. Schütze. — **Die mathematischen Grundlagen der Lebensversicherung.** (Math.-Phys. Bibliothek) Band 46. — 1 vol. in-16 de 48 p.; Fr. 0,95; B. G. Teubner, Leipzig.

Sous une forme très condensée l'auteur présente les notions essentielles qui forment une première initiation au calcul des assurances sur la vie. Son exposé est accompagné d'exemples et de tables numériques.

D. J. Struik. — **Grundzüge der mehrdimensionalen Differentialgeometrie in direkter Darstellung.** — 1 vol. in-8 de 198 p.; Julius Springer, Berlin.

L'auteur expose les principes fondamentaux de la Géométrie infinitésimale dans l'espace à n dimensions en tenant compte des travaux les plus récents.

M. Stuyvaert. — **Algèbre** (Premier degré) à l'usage des écoles primaires, moyennes, normales, Athénées et Collèges et des Autodidactes. — 1 vol. in-8 de 117 p., Fr. 4.50; Van Rysselberghe et Rombaut, Gand.

Ouvrage destiné à la première initiation à l'Algèbre. Ce premier volume comprend les chapitres suivants : Algèbre intuitive. — Nombres négatifs et calculs des polynomes. — Equations du premier degré. — Chacune de ces parties est accompagnée de nombreux exercices et problèmes.

G. N. Watson. — **A Treatise on the Theory of Bessel Functions.** — 1 vol. in-4, de 804 p.; 70 sh. net; Cambridge University Press, C. F. Clay, Londres.

Dans ce bel Ouvrage, très riche par sa documentation, M. Watson fait un exposé très complet de la théorie des fonctions de Bessel et de ses applications à la Physique mathématique. En voici le sommaire :

Bessel Functions before 1826. — The Bessel Coefficients. — Bessel Functions. — Differential Equations. — Miscellaneous Properties of Bessel Functions. — Asymptotic Expansions of Bessel Functions. — Bessel Functions of large Order. — Polynomials associated with Bessel Functions. — Functions associated with Bessel Functions. — Addition theorems. — Definite Integrals. — Multiple Integrals. — The Zeros of Bessel Functions. — Neumann Series and Lommel's Functions of two variables. — Kapteyn Series. — Series of Fourier. — Bessel and Dini-Schlömilch Series. — The Tabulation of Bessel Functions. — Table of Bessel Functions. — Bibliography. — Index of Symbols. — List of Authors quoted. — General Index.

J. Winternitz. — **Relativitätstheorie und Erkenntnislehre.** Eine Untersuchung über die Erkenntnistheoretischen Grundlagen der Einsteinschen Theorie und die Bedeutung ihrer Ergebnisse für die allgemeinen Probleme des Naturerkennens. (Wissenschaft und Hypothese, XXIII). — 1 vol. in-8° de 230 p. avec 6 fig.; broché Fr. 11,20; B. G. Teubner, Leipzig.

Dans ce nouveau volume de la collection « Wissenschaft u. Hypothese » l'auteur examine les bases de la théorie de la relativité, envisagées au point de vue de la théorie de la connaissance et il étudie leur rôle dans les problèmes généraux de la connaissance de la nature.

A. Witting. — **Abgekürzte Rechnung** (Mathematisch-Physikalische Bibliothek, Band 47). — **Funktionen Schaubilder und Funktionenstafeln.** (Id., Band 48). — 2 vol. in-16 de 51 et 41 p.; Fr. 0,95 par volume; B. G. Teubner, Leipzig.

M. Witting vient de rédiger deux nouveaux volumes de la collection des initiations mathématiques intitulé « Mathematisch-Physikalische Bibliothek ». Dans le premier, il a réuni quelques notions élémentaires sur l'approximation dans les calculs, présentées avec de nombreux exemples numériques; il les fait suivre d'une introduction au calcul logarithmique.

Dans l'autre, il examine la représentation graphique des fonctions simples avec tables numériques (carrés, racines carrées, etc.), Il s'attache plus particulièrement au rôle des fonctions $y = ax$; $y = ax + b$; $xy = k^2$; $y = ax^2$; $y = x^n$. — Il les accompagne de quelques indications sur l'interpolation.

2. Publications périodiques :

Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris. 2me *semestre* 1921. — 4 *juillet.* — Bertrand Gambier: Surfaces imaginaires applicables sur une surface de révolution ou sur une surface moulure réelle: systèmes cycliques réels correspondants. — 11 *juillet.* — S. Carrus: Recherches des systèmes triples orthogonaux. — 18 *juillet.* — M. Janet: Sur les caractéristiques de certains systèmes aux dérivées partielles comprenant autant d'équations que de fonctions inconnues. — A. Denjoy. — Sur un mode d'intégration progressif et les caractères d'intégrabilité correspondante. — 25 *juillet.* — P. Humbert: Formule de multiplication pour la fonction de Kusumer. — E. Borel: Sur les hypothèses fondamentales de la physique et de la géométrie. — 1er *août.* — L. Antoine: Sur les ensembles parfaits partout discontinus. — J. Kampe de Feriet: Sur certains systèmes associés d'équations aux différences finies et d'équations aux dérivées partielles linéaires. — 8 *août.* — P. Fatou: Sur les domaines de certaines fonctions uniformes. — Potron: Sur une représentation du groupe de 27 droites en groupe de collinéations quaternaires. — A. Demoulin: Sur les surfaces cerclées. — Kinossuke Ogura: Sur le mouvement d'une particule dans le champ d'un noyau chargé. — 22 *août.* — J. Kampe de Periet: Les fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur, à deux variables. — K. Ogura: Sur le mouvement d'une particule dans le champ d'un noyau chargé. — 29 *août.* — De Séguier: Sur le groupe quaternaire primitif d'ordre 25920 et le groupe hessien. — J. Chazy: Sur les courbes définies

par les équations différentielles du second ordre. — S. CARRUS : Sur les systèmes triples orthogonaux. — G. BERTRAND : La loi de Newton et la formule d'Einstein pour le périhélie des planètes. — 5 *septembre*. — S. BANACH : Sur les ensembles de points où la dérivée est infinie. — 19 *sept*. — J. KAMPE DE FERIET : Quelques propriétés des fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur à deux variables. — 26 *sept*. — Th. VAROPOULOS : Sur quelques propriétés des fonctions croissantes. — L. CASTEELS : Sur un type de génération quadratique doublement continue d'une cubique plane donnée par neuf points simples. — J. CHAZY : Sur la stabilité à la Poisson dans le problème de trois corps. — K. OGURA : Sur le champ statique de gravitation dans l'espace vide. — 3 *octobre*. — G. GIRAUD : Sur les équations non linéaires aux dérivées partielles du second ordre du type elliptique. — DROUIN Contribution à une étude générale des algorithmes illimités. — 10 *octobre* — TH. VAROPOULOS : Sur les fonctions croissantes. — P. FATOU : Sur les fonctions qui admettent plusieurs théorèmes de multiplication. — G. VALIRON : Le théorème de Picard-Borel dans la théorie des fonctions entières. — J. CHAZY : Sur la stabilité dans le problème des trois corps. — 17 *octobre*. — M. BRILLOUIN : Atome de Bohr. Fonction de Lagrange circum-nucléaire. — K. OGURA : Sur la courbure des rayons lumineux dans le champ de gravitation. — 24 *octobre*. — G. JULIA : Sur la permutabilité des substitutions rationnelles. — TH. VAROPOULOS : Sur les fonctions croissantes. — P. FATOU : Sur un groupe de substitutions algébriques. — RIABOUCHINSKI : Equations du mouvement d'un fluide rapportées à des axes mobiles. — 2 *novembre*. — M. GEVREY : Sur les équations linéaires aux dérivées partielles admettant une seule famille de caractéristiques imaginaires. — RIQUIER : Sur les familles complètes de figures intégrales d'un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre et sur l'application de leurs propriétés à la théorie des systèmes différentiels quelconques. — B. GAMBIER : Correspondance conforme entre deux surfaces avec conservation des lignes de courbure et de la valeur absolue du rapport des rayons de courbure principaux. — K. OGURA : Extension d'un théorème de Liouville au champ de gravitation. — 7 *nov*. — G. JULIA : Sur une classe d'équations fonctionnelles. — H. VILLAT : Sur certaines équations intégrales possédant une infinité de solutions avec un nombre illimité de paramètres arbitraires. — K. POPOFF : Sur le développement d'une fonction arbitraire en série suivant une suite de fonctions données. — P. BOUTROUX : Sur les fonctions associées à un groupe « autogène » de substitution. — RIABOUCHINSKI : Equations générales du mouvement de corps solides dans un fluide parfait incompressible . — A. BUHL : Sur le rôle des symétries analytiques dans les théories relativistes. — 14 *nov*. — B. DÉIRMENDJIAN : Sur une nouvelle démonstration d'un théorème de M. Picard et sur quelques généralisations de ce théorème. — J. KAMPÉ DE FÉRIET : Sur l'intégrale générale des systèmes d'équations aux dérivées partielles des fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur. — A. LÉVY : Sur les séries récurrents et sur des formes homogènes qui s'y rattachent. — R. GOSSE : Sur deux nouveaux types d'équations aux dérivées partielles du second ordre et de la première classe. — K. OGURA : Sur la théorie de la gravitation dans l'espace à deux dimensions. — J. CHAZY Sur les fonctions arbitraires figurant dans le ds^2 de la gravitation einsteinienne. — P. PAINLEVÉ : La gravitation dans la mécanique de Newton et dans la mécanique d'Einstein. — 21 *nov*. — TH. VARAPOULOS : Sur quelques propriétés des fonctions croissantes. — G. JULIA : Sur les fonctions entières

ou méromorphes. — 28 *nov.* — G. Mittag-Leffler: Le théorème de Cauchy sur l'intégrale d'une fonction entre des limites imaginaires. — G. Cerf: Sur les systèmes de Pfaff et les transformations des équations aux dérivées partielles. — J. Wolff: Sur les séries. — E. Borel: Remarques sur la Note de M. Wolff. — G. Valiron: Sur les fonctions entières et leurs fonctions inverses. — 5 *déc.* — G. Julia: Sur les solutions méromorphes de certaines équations fonctionnelles. — C. Guichard: Sur la géométrie infinitésimale du complexe linéaire. — 12 *déc.* — Séance publique annuelle. Le palmarès des prix et subventions accordés forme un total de fr. 330.500 répartis entre 97 lauréats. — 19 *déc.* — E. Borel: La théorie du jeu et les équations intégrales à noyau symétrique. R. Lagrange: Sur le calcul différentiel absolu. — J. Wolff: Sur les séries. — A. Denjoy: Sur les fonctions quasi-analytiques de variables réelles. — E. Delassus: Sur les chaînes articulées fermées. — E. Esclangon: Sur la relativité du temps. — 27 *déc.* — E. Borel: Les fonctions quasi analytiques de variables réelles. — M. Gevrey: Sur la détermination des intégrales des équations aux dérivées partielles d'ordre 2 p à m variables admettant une famille multiple de caractéristiques d'ordre p. — G. Bertrand: L'équation de Fredholm et les masses statiques de la première sorte.

Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung. — 30. Band, 1921. — R. Badus: Mathematik und räumliche Anschauung. — M. Bauer: Beweis von einigen bekannten Sätzen ueber zusammengesetzte Körper ohne Anwendung der Idealtheorie. — L. Berwald: Zur projektiven Differentialgeometrie der Ebene. — S. Breuer: Das Abelsche Gleichungsproblem bei Euler. — F. Dingeldey: Die Elemente des Krümmungskreises ebener Kurven bei projektiven Punkt und Linienkoordinaten. — P. Franck: Ueber paraboloidische Flächen. 3. Mitteilung. — J. A. Gmeiner: Arithmetische Bemerkungen; insbesondere über dir Peanoschen Axiome. — H. Hahn: Arithmetische Bemerkungen. — K. Kommerell: Affine Raumtransformationen und Affinoren. — L. Koschmieder: Zur komplexen Multiplikation der lemniskatischen Funktionen. Zur Theorie der Jakobischen Polynome. — E. Landau: Ueber die Hardy-Littlewoodschen Arbeiten zur additiven Zahlentheorie. — H. Liebmann: Johannes Thomae. Die Bour-Darbouxsche Biegungsgleichung und die Fundamentalgrössen zweiter Ordnung. — W. Lietzmann: Die Mathematik in der Schulreform. — A. Lœwy: Eine algebraische Behauptung von Gauss. II. — H. F. Mac Neish: Das Problem der 36 Offiziere. — L. Neder: Ueber stetige Funktionen mit überalldicht divergierender Fourierreihe. — R. Neumann: Beiträge zur Kenntnis der Laguerreschen Polynome. — O. Prange: W. R. Hamiltons Bedeutung für die geometrische Optik. Habilitationsrede. — H. Rademacher: Ueber eine Eigenschaft von messbaren Mengen positiven Masses. — E. Salkowski: Eine neue Klasse von Kurvenpaaren. — H. E. Timerding: Die Schulreform und der mathematische Unterricht.

Mathematische Annalen. 83. Band. — M. Noether: Hieronymus Georg Zeuthen. — E. Noether: Idealtheorie in Ringbereichen. — Von Ludwig: Ein neues Fundamentalsystem für symmetrische Funktionen. — M. Bauer: Ueber relativ Galoissche Zahlkörper. Id.: Ueber die Differente eines algebraischen Zahlkörpers. — O. Perron: Ueber diophantische Approximationen. — E. Kamke: Verallgemeinerungen des Waring-Hilbertschen

Satzes. — J. Radon: Mengen konvexer Körper, die einen gemeinsamen Punkt enthalten. — K. Reidemeister: Ueber die singulären Randpunkte eines konvexen Körpers. — H. Hake: Ueber de la Vallee Poussin Ober- und Unterfunktionen einfacher Integrale und die Integraldefinition von Perron. — A. Schur: Ueber die Schwarzsche Extremaleigenschaft des Kreises unter den Kurven konstanter Krümmung. — K. Boehm: Der Unabhängigkeitssatz für Doppelintegrale. — Id.: Ueber eine Eigenschaft der Minimalflächen. 84. Band. — O. Perron: Ueber Summengleichungen und Poincarésche Differenzialgleichungen. — E. Hilb: Lineare Differenzialgleichungen unendlich gleicher Ordnung mit ganzen rationalen Koeffizienten, II. — O. Perron: Lineare Differenzialgleichungen unendlich hoher Ordnung mit ganzen rationalen Koeffizienten. — E. Hilb: Lineare Differenzialgleichungen unendlich hoher Ordnung mit ganzen rationalen Koeffizienten, III. — J.-G. van der Corput: Zahlentheoretische Abschätzungen. — C. Siegel: Ueber Näherungswerte algebraischer Zahlen. — L. Tschakaloff: Arithmetische Eigenschaften einer unendlichen Reihe, II. — A. Razmadze: Ueber das Fundamentallemma der Variationsrechnung. — L. Neder: Zur Theorie der trigonometrischen Reihen. — R. Schauffler: Ueber wiederholbare Funktionen. — Th. Pöschl: Ebene Bipotentiale die nur von einer Veränderlichen abhängen. — G. Polya: Ueber eine Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung betreffend die Irrfahrt im Strassennetz. — H.-W.-E. Jung: Singuläre Punkte ebener algebraischen Kurven. — B. Baule: Ueber Kreise und Kugeln im Riemannschen Raum, II. — T. Bonnesen: Ueber eine Verschärfung der isoperimetrischen Ungleichheit des Kreises in der Ebene und auf der Kugeloberfläche nebst einer Anwendung auf eine Minkowskische Ungleichheit für konvexe Körper. — O. Mühlendyck: Ueber eine Beziehung zwischen dreidimensionalen Somenmanigfaltigkeiten und Vektorfeldern. — G. Szegö: Ueber die Randwerte einer analytischen Funktion. — G. Doetsch: Ueber die Summabilität von Potenzreihen auf dem Rande des Borelschen Summabilitätspolygons. — W. Alexandrow: Ueber die Ausdehnung eines Lemmas von Fejér auf die einfach unbestimmten Integrale. — E. Bessel-Hagen: Ueber die Erhaltungssätze der Elektrodynamik. — H. Kneser: Untersuchungen zur Quantentheorie. — W. Schmeidler: Ueber die Singularitäten algebraischer Gebilde, II.

Mathematische Zeitschrift. — 9. Band. — F. Carlson: Ueber Potenzreihen mit ganzzahligen Koeffizienten. — G.-H. Hardy u. J.-E. Littlewood. Some Problems of « Partitio, numerorum » II. Proof that every large number is the sum of at most 21 biquadrates. — A. Ostrowski. Bemerkung zur Hardy-Littlewoodschen Lösung des Waringschen Problems. — T. Carleman: Ueber eine nichtlineare Randwertaufgabe bei der Gleichung $\Delta u = 0$. — M. Torhorst: Ueber den Rand der einfach zusammenhängenden ebenen Gebiete. — H. Hahn: Ueber die stetigen Kurven der Ebene. — F. Hausdorff: Summationsmethoden und Momentfolgen. — I.-R. Bach: Zur Weylschen Relativitätstheorie und der Weylschen Erweiterung der Krümmungstensorbergriffs. — E. Salkowski: Orthogonale Kurvensysteme in der Ebene und auf der Kugel. — W. Blaschke: Ueber affine Geometrie. XXIX: Die Starrheit der Eiflächen. — S. Ramanujan: Congruence properties of partitions. — T. Carleman: Zur Theorie der Minimalflächen. — L. Bieberbach: Bemerkung zu meinem Beweis des Drehungssatzes für

schlichte und konforme Abbildungen. — G. Szegö: Ueber die Lebesgueschen Konstanten bei den Fourierschen Reihen. — J. Kürschak: Ein Irreduzibilitätssatz in der Theorie der symmetrischen Matrizen. — T. Carleman: Zur Theorie der lineare Integralgleichungen. — G. Szegö: Ueber orthogonale Polynome die zu einer gegebenen Kurve der komplexen Ebene gehören. — St. Jolles: Allgemeine Kollineationen und ihre Umkehrungen. — F. Hausdorff: Summationsmethoden und Momentfolgen, II. — R. Rothe: Zum Mittelwertsatze der Differentialrechnung.

10. Band. — St. Bobr: Eine Verallgemeinerung des v. Kochschen Satzes über die Absolute Konvergenz der unendlichen Determinanten. — R. Remak: Ueber die Zerlegung der kommutativen Gruppen in direkte unzerlegbare Faktoren. — H. Falckenberg: Ableitung der « Ergänzungsrelationen » aus den Formeln von Simon l'Huilier. — H. Weyl: Ueber die neue Grundlagenkrise der Mathematik. — R. Weitzenböck: Zur Tensoralgebra. — H. Weyl Zur Abschätzung von $\zeta(1 + it)$. — A. Rosenthal: Ueber Peanoflächen und ihren Rand. — J.-G. van der Corput: Zahlentheoretische Abschätzungen nach der Piltzschen Methode. — S. Szidon: Reihentheoretische Sätze und ihre Anwendungen in der Theorie der Fourierschen Reihen. — E. Landau: Ueber die Nullstellen Dirichletscher Reihen. — L. Lichtenstein: Untersuchungen über die Gestalt der Himmelskörper. Erste Abhandlung. Die Laplacesche Theorie der Gestalt des Erdmondes. — L. Berwald: Ueber affine Geometrie XXX: Die oskulierenden Flächen zweiter Ordnung in der affinen Flächentheorie. — C. Siegel: Approximation algebraischer Zahlen. — K. Reidemeister: Ueber Körper konstanten Durchmessers. — K. Kommerell: Klassifikation der Raumkorrelationen. — M. Lagally Ueber ein Verfahren zur Transformation ebener Wirbelprobleme. — H. Hamburger: Ueber die Riemannsche Funktiongleichung, der ζ — Funktion. — P. Tortorici: Alcune Osservazioni analitiche sulle congruenze rettilinee Waderenti a due superficie rigate. — G.-H. Hardy: The Zeros of Riemann's Zeta-Funktion on the critical line. — K. Reidemeister: Ueber affine Geometrie. XXXI: Beständig elliptisch oder hyperbolisch gekrümmte Eilinien.

Monatshefte für Mathematik und Physik, Wien. — XXX. Band. — L. Klug: Ueber zwei Konfigurationen. — K. Mayr: Wahrscheinlichkeitsfunktionen und ihre Anwendungen. — L. Klug: Ueber ein Dreikant, dessen Seitensumme zwei Rechte beträgt. — J. Luckhaub: Beiträge zur Geometrie der quadratischen und Hermiteschen Formen. — Id. Ueber den Winkel zweier windschiefen Geraden. — W. Gaedecke: Erzeugung einer speziellen Kuspidalkubik. — A. Rubinowicz: Herstellung von Lösungen gemischter Randwertprobleme bei hyperbolischen Differentialgleichungen zweiter Ordnung durch Zusammenstückelung aus Lösungen einfacher gemischter Randwertaufgaben. — W. Gross: Ueber Steigungszahlen. — M. Pasch: Die Ausartungen des Kreises. — Z. Zindler: Ueber konvexe Gebilde. — K. Mack: Papierstreifenkonstruktion einer durch konjugierte Durchmesser gegebenen Ellipse. — E. Bloch: Ueber Gesamtschwankungen von Funktionen mehrerer Veränderlichen. — A. Winternitz: Ueber zwei von Hamel herrührende Extremumsätze der Funktionentheorie. — W. Gaedecke: Beiträge zur Theorie der Kuspidalkubiken. — L. Klug: Die Verallgemeinerung der Feuerbachschen Sätze über den Neunpunktekreis. — J. Lense: Ueber die Integration eines p-fachen Differentialaus-

druckes von *n* unabhängigen Veränderlichen. — Th. Pöschl: Ueber ein System von Differentialgleichungen zweiten Grades. — R. Weitzenböck: Zur Theorie der Äquitangentialkurven. — Ph. Furtwangler u. M. Zeisel: Zur Minkowskischen Parallelepipedapproximation. — XXXI. Band. — E. Muller: Relative Minimalflächen. — E. Salkowski: Konvexe Äquitangentialkurven. — K. Zindler: Ueber konvexe Gebilde. — W. Wirtinger: Bemerkung zur Partialbruchzerlegung. — E. Helly: Ueber Systeme linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten. — J. Lense: Ueber eine kanonische Form der quadritischen Differentialausdrücke. — E. Zilsel: Versuch einer neuer Grundlegung der statischen Mechanik. — F.-W. Palm: Ueber die Umrissbestimmung von allgemeinen Schraub- und Drehflächen in zentral- und parallelperspektiven Darstellungen. — L. Vietoris: Stetige Mengen.

3. Thèse de doctorat:

Nous signalons sous cette rubrique les thèses de doctorat dont un exemplaire imprimé aura été adressé à la Rédaction, 110, Floressant, Genève.

Allemagne. — *Université de Giessen.* — J. Fuhrich. — *Zur natürlichen Geometrie ebener Transformationsgruppen* (Mitteilungen des Math. Seminars der Universität Giessen, VI. Heft). — 1 brochure in-8°, 12 p.; 1922.

J. Möll. — *Ueber eine Klasse gewöhnlicher Differentialgleichungen höherer Ordnung* (Mitteilungen des Math. Seminars der Universität Giessen, IV. Heft). — 1 brochure in-8°, 20 p.; 1922.

L. Monville. — *Analytische Beiträge zu Lies Abbildung des Imaginären der ebenen Geometrie.* (Mitteilungen des Math. Seminars der Universität Giessen, Heft V). — 1 brochure in-8°, 33 p.; 1922,

Suisse. — *Université de Berne.* — P. Thalmann. — *Ueber eine neue graphische Darstellung der komplexen Zahlen.* Sonderabdruck aus dem Jahrbuch der philosoph. Fakultät II der Universität Bern, Bd. III, 1923, — 1 brochure in-8°, 8 p.

Université de Zurich. — M. Riwlin. — *Ueber die Darstellung der Dreieksfunktion durch die Poincarésche Reihe.* — 1 fasc. in-8°, 48 p.; 1922.

Etats-Unis. — *Université de Chicago.* — Dans son *Bulletin of Information* de mai 1922 (Vol. XXII, N° 4), l'Université de Chicago publie la liste des thèses de doctorat en philosophie pour les diplômes qu'elle a délivrés de juin 1893 à décembre 1921. Les sciences mathématiques y figurent pour 94 thèses et l'astronomie mathématique pour 20. Nous les avons signalées au fur et à mesure dans nos listes annuelles.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE STÆCKEL PAR L'ÉLIMINATION DU TEMPS ENTRE LES ÉQUATIONS DE LAGRANGE

PAR

M. Emile TURRIÈRE (Montpellier).

Le théorème de LIOUVILLE a été généralisé par M. P. STÆCKEL et par M. E. GOURSAT[1] sous la forme suivante:

Soient $A_1, B_1, C_1 \dots Q_1$ des fonctions d'un seul paramètre q_1; $A_2, B_2, C_2 \dots Q_2$ des fonctions d'un seul paramètre q_2; $A_3, B_3, C_3 \dots Q_3$ des fonctions d'un seul paramètre q_3; etc.

Soient

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & . \\ B_1 & B_2 & B_3 & . \\ C_1 & C_2 & C_3 & . \\ . & . & . & \end{vmatrix} , \quad D = \begin{vmatrix} Q_1 & Q_2 & Q_3 & . \\ B_1 & B_2 & B_3 & . \\ C_1 & C_2 & C_3 & . \\ . & . & . & \end{vmatrix} ;$$

M_1, M_2, etc., étant les mineurs relatifs aux éléments des premières lignes de ces déterminants, soient enfin

$$T = \Delta \left(\frac{q_1'^2}{M_1} + \frac{q_2'^2}{M_2} + \frac{q_3'^2}{M_3} + \dots \right) , \quad \left(q_\alpha' = \frac{dq_\alpha}{dt} \right) , \quad U = \frac{D}{\Delta} .$$

L'intégration des équations de la dynamique avec les expressions précédentes de l'énergie cinétique T et de la fonction des forces U, pour un système à k paramètres $q_1, q_2, q_3 \dots$, est réduc-

---

[1] P. STAECKEL. Sur une classe de problèmes de dynamique, *C. R.*, t. CXVI, 6 mars 1893, p. 485-487.

E. GOURSAT. Sur une classe de problèmes de dynamique, *C. R.*, t. CXVI, 8 mai 1893, p. 1050-1051.

P. STAECKEL. Sur des problèmes de dynamique qui se réduisent à des quadratures, *C. R.*, t. CXVI, 5 juin 1893, p. 1284-1286.

tible à K^2 quadratures; $K(K-1)$ de ces quadratures déterminent les relations entre les paramètres; K quadratures entrent dans l'expression du temps.

Le théorème a été démontré comme application de la méthode de JACOBI. Je vais en donner une démonstration nouvelle, fondée sur l'emploi des équations obtenues après l'élimination du temps entre les équations de LAGRANGE. Cette démonstration généralise celle du théorème de LIOUVILLE, exposée dans un précédent travail [1].

Je vais établir la démonstration avec trois paramètres q_1, q_2 et q_3, mais sous une forme telle que la démonstration soit identique dans le cas général de K paramètres.

Le dernier paramètre, q_3, étant pris pour paramètre indépendant avec

$$\frac{dq_1}{dq_3} = \eta_1 , \quad \frac{dq_2}{dq_3} = \eta_2 ,$$

et en écrivant simplement q pour q_3, je poserai :

$$T = \Theta \left(\frac{dq}{dt}\right)^2 \qquad \Omega^2 = \Theta . U = DH \qquad \text{avec} \qquad H = \frac{\eta_1^2}{M_1} + \frac{\eta_2^2}{M_2} + \frac{1}{M_3} .$$

Je supposerai nulle tout d'abord la constante h de l'intégrale des forces vives, $T - U = h$. Les $K - 1 = 2$ équations de Lagrange, *après élimination du temps*, sont les suivantes :

$$\frac{d}{dq}\left(\frac{\partial \Omega}{\partial \eta_1}\right) = \frac{\partial \Omega}{\partial q_1} , \quad \frac{d}{dq}\left(\frac{\partial \Omega}{\partial \eta_2}\right) = \frac{\partial \Omega}{\partial q_2} .$$

En remarquant que

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \eta_1} = \frac{D}{\Omega}\frac{\eta_1}{M_1} , \quad \frac{\partial \Omega}{\partial \eta_2} = \frac{D}{\Omega}\frac{\eta_2}{M_2} ,$$

elles deviennent :

$$\frac{d}{dq}\left(\frac{D}{\Omega}\frac{\eta_1}{M_1}\right) = \frac{\partial \Omega}{\partial q_1} , \quad \frac{d}{dq}\left(\frac{D}{\Omega}\frac{\eta_2}{M_2}\right) = \frac{\partial \Omega}{\partial q_2} .$$

---

[1] Démonstration du théorème de LIOUVILLE par l'élimination de temps entre les équations de LAGRANGE. *L'Enseignement mathématique*, t. XXII, 1921-1922, p. 277-285.

La première s'écrit encore :

$$\frac{2D}{\Omega}\frac{\eta_1}{M_1}\frac{d}{dq}\left(\frac{D}{\Omega}\frac{\eta_1}{M_1}\right) = \frac{d}{dq}\left(\frac{D^2}{\Omega^2}\frac{\eta_1^2}{M_1^2}\right) = \frac{2D}{\Omega}\frac{\eta_1}{M_1}\frac{\partial\Omega}{\partial q_1} = \frac{D}{\Omega^2}\frac{\eta_1}{M_1}\cdot\frac{\partial(\Omega^2)}{dq_1},$$

c'est-à-dire:

$$\frac{d}{dq}\left(\frac{D}{H}\frac{\eta_1^2}{M_1^2}\right) = \frac{\eta_1}{HM_1}\cdot\frac{\partial(DH)}{\partial q_1}.$$

On obtient ainsi le système suivant de trois équations équivalant au système des deux premières d'entre elles:

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{d}{dq}\left(\frac{D}{H}\cdot\frac{\eta_1^2}{M_1^2}\right) &= \frac{\eta_1}{HM_1}\frac{\partial(DH)}{\partial q_1},\\
\frac{d}{dq}\left(\frac{D}{H}\cdot\frac{\eta_2^2}{M_2^2}\right) &= \frac{\eta_2}{HM_2}\frac{\partial(DH)}{\partial q_2},\\
\frac{d}{dq}\left(\frac{D}{H}\cdot\frac{1}{M_3^2}\right) &= \frac{1}{HM_3}\frac{\partial(DH)}{\partial q_3}.
\end{aligned}\right.$$

Je poserai maintenant :

$$\frac{D}{H}\frac{\eta_1^2}{M_1^2} - Q_1 = \lambda_1, \qquad \frac{D}{H}\frac{\eta_2^2}{M_2^2} - Q_2 = \lambda_2, \qquad \frac{D}{H}\frac{1}{M_3^2} - Q_3 = \lambda_3.$$

Les dérivées de Q_1, Q_2, Q_3 par rapport aux variables respectives q_1, q_2, q_3 seront désignées par Q_1', Q_2', Q_3' et, par suite:

$$\eta_1 Q_1' = \frac{dQ_1}{dq}, \qquad \eta_2 Q_2' = \frac{dQ_2}{dq}.$$

Avec ces notations, les équations deviennent :

$$\begin{aligned}
\frac{d\lambda_1}{dq} + \eta_1 Q_1' &= \frac{\eta_1}{HM_1}\left(D\frac{\partial H}{\partial q_1} + H\frac{\partial D}{\partial q_1}\right),\\
\frac{d\lambda_2}{dq} + \eta_2 Q_2' &= \frac{\eta_2}{HM_2}\left(D\frac{\partial H}{\partial q_2} + H\frac{\partial D}{\partial q_2}\right),\\
\frac{d\lambda_3}{dq} + \quad Q_3' &= \frac{1}{HM_3}\left(D\frac{\partial H}{\partial q_3} + H\frac{\partial D}{\partial q_3}\right).
\end{aligned}$$

Prenons la première. Comme Q_2, Q_3 et M_1 ne sont pas fonctions de q_1, cette équation devient :

$$M_1 \frac{d\lambda_1}{dq} + M_1 \eta_1 Q_1'$$

$$= \frac{\eta_1}{H} \left\{ - D \left(\frac{\eta_2^2}{M_3^2} \frac{\partial M_2}{\partial q_1} + \frac{1}{M_3^2} \frac{\partial M_3}{\partial q_1} \right) + H \left(M_1 Q_1' + Q_2 \frac{\partial M_2}{\partial q_1} + Q_3 \frac{\partial M_3}{\partial q_1} \right) \right\} ;$$

elle se réduit à la suivante :

$$M_1 \frac{d\lambda_1}{dq} + \eta_1 \left[\lambda_2 \frac{\partial M_2}{\partial q_1} + \lambda_3 \frac{\partial M_3}{\partial q_1} \right] = 0 .$$

Finalement, nous obtenons le système suivant de trois équations :

$$\frac{M_1}{\eta_1} \frac{d\lambda_1}{dq} + \lambda_2 \frac{\partial M_2}{\partial q_1} + \lambda_3 \frac{\partial M_3}{\partial q_1} = 0 ,$$

$$\lambda_1 \frac{\partial M_1}{\partial q_2} + \frac{M_2}{\eta_2} \frac{d\lambda_2}{dq} + \lambda_3 \frac{\partial M_3}{\partial q_2} = 0 ,$$

$$\lambda_1 \frac{\partial M_1}{\partial q_3} + \lambda_2 \frac{\partial M_2}{\partial q_3} + M_3 \frac{d\lambda_3}{dq} = 0 ;$$

avec l'identité

$$\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 + \lambda_3 M_3 = 0 ,$$

(qui résulte de la définition même des λ).

La forme de cette identité conduit à poser :

$$\lambda_1 = \beta B_1 + \gamma C_1 , \quad \lambda_2 = \beta B_2 + \gamma C_2 , \quad \lambda_3 = \beta B_3 + \gamma C_3 ;$$

puisque :

$$B_1 M_1 + B_2 M_2 + B_3 M_3 \equiv 0 , \quad C_1 M_1 + C_2 M_2 + C_3 M_3 \equiv 0 ;$$

β et γ sont, pour le moment, des fonctions arbitraires. Les équations linéaires et homogènes en $\frac{M_1}{\eta_1}$, $\frac{\partial M_2}{\partial q_1}$, $\frac{\partial M_3}{\partial q_1}$,

$$\frac{M_1}{\eta_1} \frac{d\lambda_1}{dq} + \lambda_2 \frac{\partial M_2}{\partial q_1} + \lambda_3 \frac{\partial M_3}{\partial q_1} = 0 .$$

$$\frac{M_1}{\eta_1} \frac{dB_1}{dq} + B_2 \frac{\partial M_2}{\partial q_1} + B_3 \frac{\partial M_3}{\partial q_1} = 0 ,$$

$$\frac{M_1}{\eta_1} \frac{dC_1}{dq} + C_2 \frac{\partial M_2}{\partial q_1} + C_3 \frac{\partial M_3}{\partial q_1} = 0 ,$$

entraînent l'équation :

$$\begin{vmatrix} \frac{d\lambda_1}{dq} & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \frac{dB_1}{dq} & B_2 & B_3 \\ \frac{dC_1}{dq} & C_2 & C_3 \end{vmatrix} = 0 ,$$

ou encore :

$$B_1 \frac{d\beta}{dq} + C_1 \frac{d\gamma}{dq} = 0 .$$

Pour la même raison :

$$B_2 \frac{d\beta}{dq} + C_2 \frac{d\gamma}{dq} = 0 , \qquad B_3 \frac{d\beta}{dq} + C_3 \frac{d\gamma}{dq} = 0 .$$

Ces conditions exigent que β et γ soient des constantes. En remontant alors à la définition des λ, les équations deviennent :

$$\frac{D}{H} \frac{\eta_1^2}{M_1^2} = Q_1 + \beta B_1 + \gamma C_1 ,$$

$$\frac{D}{H} \frac{\eta_2^2}{M_2^2} = Q_2 + \beta B_2 + \gamma C_2 ,$$

$$\frac{D}{H} \frac{1}{M_3^2} = Q_3 + \beta B_3 + \gamma C_3 ,$$

avec deux constantes arbitraires β et γ, ou encore:

$$\frac{\eta_1^2}{M_1^2(Q_1 + \beta B_1 + \gamma C_1)} = \frac{\eta_2^2}{M_2^2(Q_2 + \beta B_2 + \gamma C_2)} = \frac{1}{M_3^2(Q_3 + \beta B_3 + \gamma C_3)}$$

$$\pm \frac{dq_1}{M_1 \sqrt{Q_1 + \beta B_1 + \gamma C_1}} = \pm \frac{dq_2}{M_2 \sqrt{Q_2 + \beta B_2 + \gamma C_2}}$$

$$= \pm \frac{dq_3}{M_3 \sqrt{Q_3 + \beta B_3 + \gamma C_3}} .$$

Ces dernières relations conduisent aux équations (en prenant les signes $+$) :

$$\frac{B_1\,dq_1}{\sqrt{Q_1+\beta B_1+\gamma C_1}}+\frac{B_2\,dq_2}{\sqrt{Q_2+\beta B_2+\gamma C_2}}+\frac{B_3\,dq_3}{\sqrt{Q_3+\beta B_3+\gamma C_3}}=0,$$

$$\frac{C_1\,dq_1}{\sqrt{Q_1+\beta B_1+\gamma C_1}}+\frac{C_2\,dq_2}{\sqrt{Q_2+\beta B_2+\gamma C_2}}+\frac{C_3\,dq_3}{\sqrt{Q_3+\beta B_3+\gamma C_3}}=0,$$

intégrables par six quadratures.

Pour simplifier l'écriture, j'ai pris $h=0$. Dans le cas général, il suffit de changer U en $U+h$, c'est-à-dire D en $D+h\Delta$, ou encore Q_1 en Q_1+hA_1, Q_2 en Q_2+hA_2 et Q_3 en Q_3+hA_3. Le problème est ainsi résolu par les formules avec six quadratures suivantes; ces deux équations entre les seules coordonnées définissent les trajectoires :

$$\int\frac{B_1\,dq_1}{\sqrt{Q_1+hA_1+\beta B_1+\gamma C_1}}+\int\frac{B_2\,dq_2}{\sqrt{Q_2+hA_2+\beta B_2+\gamma C_2}}+\int\frac{B_3\,dq_3}{\sqrt{Q_3+hA_3+\beta B_3+\gamma C_3}}=\text{constante},$$

$$\int\frac{C_1\,dq_1}{\sqrt{Q_1+hA_1+\beta B_1+\gamma C_1}}+\int\frac{C_2\,dq_2}{\sqrt{Q_2+hA_2+\beta B_2+\gamma C_2}}+\int\frac{C_3\,dq_3}{\sqrt{Q_3+hA_3+\beta B_3+\gamma C_3}}=\text{constante};$$

(h, β, γ sont trois constantes arbitraires).

La loi du temps est ensuite déterminée par le théorème des forces vives. L'intégrale des forces vives est ici :

$$T=\Delta H\cdot\left(\frac{dq_3}{dt}\right)^2=U+h,$$

d'où

$$\left(\frac{dt}{dq_3}\right)^2=\frac{\Delta H}{U+h}=\frac{\Delta^2}{D+h\Delta}\cdot\frac{D+h\Delta}{M_3^2(Q_3+hA_3+\beta B_3+\gamma C_3)},$$

car on a :

$$\frac{D+h\Delta}{H}=M_3^2(Q_3+hA_3+\beta B_3+\gamma C_3);$$

l'expression de dt est donc :

$$dt=(A_1M_1+A_2M_2+A_3M_3)\frac{dq_3}{M_3\sqrt{Q_3+hA_3+\beta B_3+\gamma C_3}};$$

Ce qui, en vertu des expressions de $\frac{dq_1}{dq_3}$, $\frac{dq_2}{dq_3}$, devient (à une constante additive près):

$$t = \int \frac{A_1\, dq_1}{\sqrt{Q_1 + hA_1 + \beta B_1 + \gamma C_1}} + \int \frac{A_2\, dq_2}{\sqrt{Q_2 + hA_2 + \beta B_2 + \gamma C_2}} + \int \frac{A_3\, dq_3}{\sqrt{Q_3 + hA_3 + \beta B_3 + \gamma C_3}} .$$

D'une manière générale, on aurait K — 1 équations entre les seuls paramètres, chacune contenant K quadratures; le temps est ensuite donné par K quadratures. En tout, K^2 quadratures *indépendantes*.

Les résultats obtenus sont identiques à ceux fournis par l'application de la méthode de JACOBI.

Le théorème de LIOUVILLE est un cas particulier du théorème de STÆCKEL. Il suffit de prendre des valeurs constantes pour les B, pour les C et, par suite, pour les M. Dans le cas particulier du théorème de LIOUVILLE, la démonstration s'arrête avant l'introduction des λ ; M_1, M_2, M_3 étant réduits à l'unité, H étant indépendant de $q_1\, q_2$ ... on a simplement

$$\frac{d}{dq}\left(\frac{D}{H}\,\frac{\eta_1^2}{M_1^2}\right) = \eta_1\, Q_1' = \frac{dQ_1}{dq} .$$

C'est le résultat de ma précédente note. Les fonctions λ ici introduites sont constantes, dans le cas de théorème de LIOUVILLE.

20 mars 1922.

DÉMONSTRATION D'UN THÉORÈME DE MORLEY

PAR

B. NIEWENGLOWSKI (Paris).

Je rappellerai, en premier lieu, les propositions suivantes:

1° Soit I le centre du cercle inscrit au triangle ABC.

En appelant A, B, C les angles de ce triangle, on a

$$\widehat{BIC} = A + \frac{B}{2} + \frac{C}{2} = 90° + \frac{A}{2} .$$

2° Réciproquement, si le point I est, à l'intérieur du triangle ABC et sur la bissectrice de l'angle A et si, en outre,

$$\widehat{BIC} = 90° + \frac{A}{2}$$

le point I est le centre du cercle inscrit au triangle ABC.

Pareillement:

$$\widehat{AIC} = 90° + \frac{B}{2} ,$$

$$\widehat{AIB} = 90° + \frac{C}{2}$$

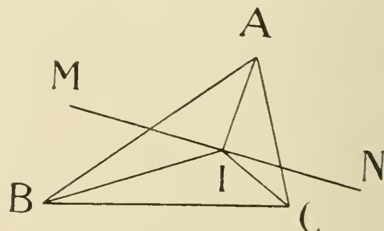


Fig. 1.

donc la perpendiculaire MN menée à AI par le centre I, fait avec IC et IB les angles

$$\widehat{CIN} = \frac{B}{2} , \qquad \widehat{BIM} = \frac{C}{2}$$

3° Supposons toujours que A I soit la bissectrice de l'angle A et posons $\widehat{ABI} = \beta$, $\widehat{IBC} = \beta'$; $\widehat{ACI} = \gamma$, $\widehat{ICB} = \gamma'$. Je dis

que si l'on a:

$$\widehat{CIN} = \beta \quad \text{et} \quad \widehat{BIM} = \gamma$$

I est le centre du cercle inscrit au triangle ABC.

En effet, les sommes $\beta + \gamma$ et $\beta' + \gamma'$ ayant, l'une et l'autre $\widehat{BIC}$ pour supplément, sont égales. On peut donc écrire

$$\beta + \gamma = \beta' + \gamma' = \frac{B + C}{2}$$

d'où il résulte que

$$\widehat{BIC} = A + \beta + \gamma = A + \frac{B + C}{2} = 90° + \frac{A}{2}$$

ce qui démontre la proposition.

Cela posé, soient D, E, F les milieux des côtés d'un triangle équilatéral HKL. Soient α, β, γ trois angles dont la somme $\alpha + \beta + \gamma = 60°$. A l'intérieur du triangle HEF, construisons le triangle isoscèle EFD' de façon que les angles $\widehat{HED'} = \widehat{HFD'} = \alpha$; pareillement, traçons les triangles isoscèles DFE' et DEF' tels que $\widehat{KFE'} = \widehat{KDE'} = \beta$; $\widehat{LDF'} = \widehat{LEF'} = \gamma$.

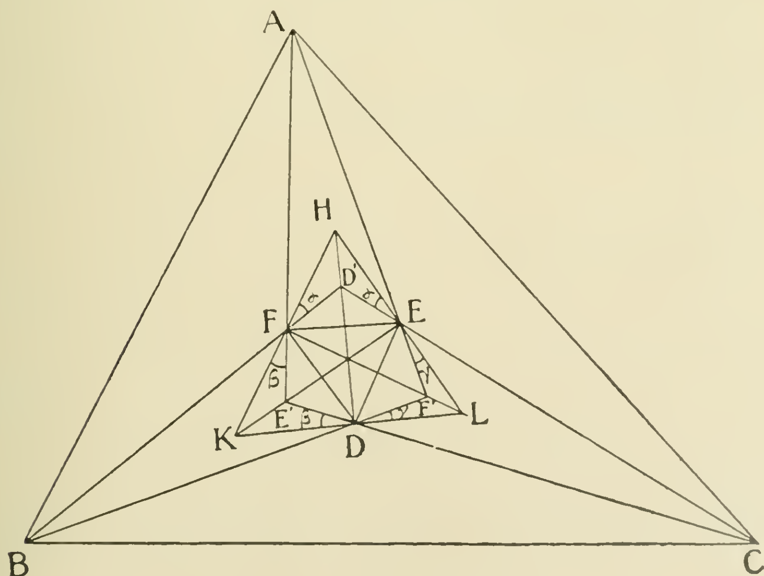


Fig. 2.

Appelons A le point de rencontre des droites E′F, F′E. Dans le triangle AEF, les angles adjacents au côté EF valant $60° + \beta$ et $60° + \gamma$, le troisième angle vaut α. Pareillement, si B est le point de rencontre des droites D′F, F′D et C celui des droites D′E, E′D, on voit que $\widehat{DBF} = \beta$, $\widehat{DCF} = \gamma$.

Remarquons maintenant que la droite DH passe par D′ et n'est autre que la bissectrice de l'angle BD′C, puisqu'elle est perpendiculaire au milieu de EF.

D'autre part $\widehat{LDC} = \beta$, $\widehat{KDB} = \gamma$; donc, d'après le lemme rapporté plus haut (3°), D est le centre du cercle inscrit au triangle BCD′. On verra de même que E est le centre du cercle inscrit au triangle ACE′ et F le centre du cercle inscrit au triangle ABF′. On en conclut que les angles A, B, C du triangle ABC valent 3α, 3β, 3γ respectivement. Les droites AE, AF partagent l'angle A en trois parties égales, de même BD, BF pour l'angle B et CD, CE pour l'angle C. On a ainsi démontré le théorème de Morley:

On partage chaque angle d'un triangle ABC en trois parties égales par les droites AE, AF; BD, BF; CD, CE *qu'on peut appeler trisectrices. Les trisectrices* BD, CD voisines du côté BC se rencontre en D; les trisectrices CE, AE voisines du côté CA se coupent en E et enfin les trisectrices voisines du côté AB se coupent en F.

Le triangle D E F est équilatéral.

RÉCRÉATION MATHÉMATIQUE.

LE JEU DE CLOCHE ET MARTEAU

PAR

M. JÉQUIER (Neuchâtel).

Connaissez-vous le Jeu de Cloche et Marteau ? Il est fort divertissant pour jeunes et vieux. Durant les longues soirées d'hiver, les membres des familles nombreuses spécialement rivalisent d'intuition aiguisée par la soif du gain pour découvrir les lois suivant lesquelles le Hasard manifeste ses volontés capricieuses et inéluctables, décevant souvent les espérances, en apparence les mieux fondées.

Il nous a paru curieux d'étudier ce jeu sous le jour du Calcul des Probabilités, à simple titre de curiosité mathématique et sans autre prétention.

Voici les *règles du jeu :*

1. Le nombre n des joueurs peut être quelconque; toutefois, il ne doit être ni trop faible, ni trop grand; il est généralement compris entre 5 et 10.

2. Chaque joueur reçoit au début de la partie un nombre m de jetons de la Caisse commune, qui est tenue par l'un des joueurs.

3. A part les jetons, le matériel du jeu comprend :

a) 8 dés à jouer. Chaque dé a 5 de ses faces non marquées, ou si l'on veut, marquées 0. La 6me face du 1er dé est marquée 1, la 6me face du 2me dé 2, etc., jusqu'au 6me dé, dont la 6me face est marquée 6. Le 7me dé porte sur une de ses faces

le dessin d'une Cloche (symbole Cl), le 8me dé a une de ses faces marquée d'un Marteau (M).

b) 5 cartes, à savoir : la *Cloche* (Cl), le *Marteau* (M.), *la Cloche-et le Marteau* (CM), le *Cheval* (Ch) et l'*Auberge* (Au).

4. Au début de la partie les cartes sont misées par l'un des joueurs choisi comme commissaire-priseur. Les cartes sont adjugées au plus offrant et dernier enchérisseur contre paiement comptant à la Caisse — paiement effectué au moyen des jetons précités.

5. Les mises terminées, le propriétaire du Cheval lance les 8 dés, qu'il passe ensuite à son voisin. Chaque joueur joue ainsi à tour et reçoit de la Caisse le montant indiqué par les dés. On lance les dés jusqu'à épuisement de la Caisse.

6. Lorsqu'un joueur amène le signe Cl ou le signe M, le montant indiqué par les 6 premiers dés doit être payé par la Caisse non à ce joueur, mais au propriétaire de Cl, respectivement de M.

7. Si un joueur amène, *à la fois*, les signes Cl et M, le montant indiqué par les dés sera payé par la Caisse au propriétaire de la carte CM

8. Lorsqu'un joueur quelconque, autre que le propriétaire du Ch, amène 0, sans figure, il doit payer 1 â celui-là.

9. Si un joueur quelconque amène 0, avec l'une ou l'autre des figures Cl et M ou toutes les deux à la fois, le joueur ne recevra ni ne paiera rien. La somme 1 sera payée au propriétaire du Ch par le propriétaire de la carte correspondant au dé amené, Cl, M ou CM.

10. Si le propriétaire du Ch amène 0, sans figure, chacun des autres joueurs devra lui payer 1.

11. L'Auberge ne peut rapporter à son propriétaire qu'à la fin de la partie et voici comment : l'encaisse commune baisse continuellement, puisque les mises terminées, la Caisse n'opère que des versements sans jamais rien toucher. Arrive donc un coup où la somme restant en caisse est trop faible pour payer le montant indiqué par les dés : on dit alors que l'Au est « ouverte ». Supposons qu'il reste r en caisse, les dés indiquant $s > r$. Le joueur ayant lancé les dés paiera à l'Au la différence $s - r > 0$. La somme r restera en caisse. Chacun des joueurs suivants qui amènera une somme $s > r$ paiera la différence

respective $s - r$ à l'Au, jusqu'à ce qu'un joueur amène $s \leq r$, somme qu'il recevra de la caisse. Dans le cas de l'inégalité le jeu continue; dans celui de l'égalité, il est terminé puisque la Caisse doit payer précisément la somme qui lui restait. On dit alors que la Caisse « saute ».

12. si un joueur amène $s > r$, avec une figure, c'est le propriétaire de la carte correspondante qui doit payer la différence $s - r$ à l'Au.

13. A partir du moment où l'Au est ouverte, et chaque fois que l'un des joueurs amène 0, sans figure, le propriétaire du Ch doit payer 1 à l'Au.

14. Si un joueur amène 0, avec une figure, c'est le propriétaire de la carte correspondante qui paie 1 à l'Au.

15. Le gagnant est celui des joueurs qui, la partie terminée, a le plus grand nombre de jetons.

Ceci posé, proposons-nous de calculer l'espérance mathématique de chaque carte, ainsi que le gain probable d'un joueur seul, sans carte.

Nous pouvons remarquer, tout d'abord, que les lois régissant les divers gains changent au moment où l'Au s'ouvre. On distinguera donc la première période de la partie, s'étendant depuis le début jusqu'à l'ouverture de l'Au, et la seconde période, depuis l'ouverture de l'Au jusqu'à la fin de la partie.

L'encaisse commune étant suffisamment grande au début, la partie entière comptera un nombre de coups assez grand pour que les lois du hasard (lois des grands nombres) permettent de calculer les diverses espérances mathématiques correspondant à la première période, avec un faible écart probable. Quant à la seconde période, elle compte généralement un nombre si faible de coups qu'il serait illusoire de vouloir lui appliquer les lois des grands nombres: dans les cas pratiques les écarts relatifs seraient beaucoup trop considérables.

Nous nous bornerons donc, dans cette étude, à calculer les diverses espérances mathématiques correspondant à la première période. Comme l'Au ne fonctionne que dans la seconde, cela revient à poser égale à 0 son espérance mathématique. Les espérances mathématiques qu'on calculera pour les autres cartes

ainsi que pour les gains des joueurs sans cartes seront toutes des valeurs maxima correspondant au cas, pas très rare, où la caisse saute sans que l'Au ait rien rapporté à son infortuné propriétaire. Les valeurs calculées serviront donc de limites à ne raisonnablement pas dépasser au moment de la mise des cartes. Il sera, d'ailleurs, raisonnable, lors des mises, de se tenir sensiblement au-dessous des espérances mathématiques maxima calculées, d'une part pour se réserver une marge correspondant à la somme que la carte misée pourra être appelée à payer à l'Au, d'autre part pour se ménager la probabilité d'un gain.

Appelons :

C le montant en caisse, au début de la partie, *une fois les mises terminées ;*

n le nombre de joueurs ;

N le nombre total de coups joués pendant la 1re période ;

a le versement moyen de la caisse, par coup.

On a, naturellement, la relation

$$C = N \cdot a \,. \tag{1}$$

Cette relation suppose que l'encaisse r, au moment où l'Au s'ouvre est négligeable devant C, ce qui est pratiquement toujours le cas.

Calcul de a. — Appelons μ la somme indiquée par les dés. μ a l'une des valeurs ci-après: 0, 1, 2, 3, 4 ... 19, 20, 21. Désignons par ν_μ le nombre de possibilités différentes d'amener μ points. On a la relation

$$a = \frac{\sum\limits_{\mu=0,1,2\ldots 21} (\nu_\mu \cdot \mu)}{\sum\limits_{\mu=0,1,2\ldots 21} (\nu_\mu)} \,. \tag{2}$$

qui indique que le nombre total des points amenés par des combinaisons de dés différentes est égal au nombre de ces combinaisons multiplié par la moyenne des points par coup.

Le tableau ci-après résume le calcul de sommes figurant dans l'expression 2. On vérifierait aisément l'exactitude des valeurs indiquées dans la colonne des ν_μ. Par exemple, un dé pré-

sente 5 possibilités différentes d'amener le 0, puisque 5 de ses faces ne sont pas marquées, 2 dés présentent 5^2 possibilités, etc., 6 dés 5^6 possibilités différentes.

On a donc

$$\sum_{\mu=0,1,2...21} (\nu_\mu) = 46656 = 6^6 \,. \tag{3}$$

$$\sum_{\mu=0,1,2...21} (\nu_\mu \,.\, \mu) = 162\,.\,296 \,. \tag{4}$$

La première de ces deux sommes a une valeur évidente, car le nombre des possibilités différentes de combiner 6 à 6 les 36 faces des 6 dés est donnée par le produit $6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 = 6^6$ qui est précisément égal à l'expression

$$(5 + 1)^6 = 5^6 + 6\,.\,5^5 + 15\,.\,5^4 + 20\,.\,5^3 + 15\,.\,5^2 + 6\,.\,5 + 1 = 6^6 \,.$$

μ	Nombre de possibilités d'amener μ points $= \nu_\mu$		$(\nu_\mu \,.\, \mu)$
0	5^6	$=$ 15625	0
1	5^5	$=$ 3125	3125
2	5^5	$=$ 3125	6250
3	$5^5 + 5^4$	$=$ 3750	11250
4	$5^5 + 5^4$	$=$ 3750	14000
5	$5^5 + 2.5^4$	$=$ 4375	21875
6	$5^5 + 2.5^4 + 5^3$	$=$ 4500	27000
7	$3.5^4 + 5^3$	$=$ 2000	14000
8	$2.5^4 + 2.5^3$	$=$ 1500	12000
9	$2.5^4 + 3.5^3$	$=$ 1625	14625
10	$5^4 + 3.5^3 + 5^2$	$=$ 1025	10250
11	$5^4 + 3.5^3 + 5^2$	$=$ 1025	11275
12	$3.5^3 + 2.5^2$	$=$ 425	5100
13	$2.5^3 + 2.5^2$	$=$ 300	3900
14	$5^3 + 3.5^2$	$=$ 200	2800
15	$5^3 + 2.5^2 + 5^1$	$=$ 180	2700
16	$2.5^2 + 5^1$	$=$ 55	880
17	$5^2 + 5^1$	$=$ 30	510
18	$5^2 + 5^1$	$=$ 30	540
19	5^1	$=$ 5	95
20	5^1	$=$ 5	100
21	5^0	$=$ 1	21

$$\sum_{\mu=0,1,2...21} (\nu_\mu) = 5^6 + 6\,.\,5^5 + 15\,.\,5^4 + 20\,.\,5^3 + 15\,.\,5^2 + 6\,.\,5 + 1 = 6^6 = 46656$$

$$\sum_{\mu=0,1,2...21} (\nu_\mu \,.\, \mu) = 162296$$

Il vient donc pour a

$$a = \frac{162296}{46656} = 3{,}4787 , \tag{6}$$

et pour N (relation 1)

$$N = \frac{C}{3{,}4787} . \tag{7}$$

Calcul du gain probable G_s *d'un joueur seul, sans le secours d'aucune carte.* — Il s'agit de calculer le gain moyen par coup, désigné par b, réalisé par le joueur envisagé, pour son propre compte ou celui de l'un des propriétaires de cartes. De la règle 8 découlent d'emblée les inégalités :

$$b \neq a , \quad b < a \tag{8}$$

On peut se servir, pour calculer b, du tableau ci-dessus, qui a été utilisé pour déterminer a. Remarquons qu'il suffit de substituer à $\mu = 0$ la valeur $\mu = -1$ (application de la règle 8). Nous désignerons la somme $\Sigma(\nu_{\mu . \mu})$ ainsi obtenue par l'écriture

$$\left[\sum_{\mu=-1,1,2 \ldots 21} (\nu_\mu \cdot \mu)\right]_b .$$

pour la distinguer de celle figurant sous (4) qu'on peut aussi écrire de façon analogue

$$\left[\sum_{\mu=0,1,2 \ldots 21} (\nu_\mu \cdot \mu)\right]_a .$$

On obtient :

$$\left[\sum_{\mu=-1,1,2 \ldots 21} (\nu_\mu \cdot \mu)\right]_b = \left[\sum_{\mu=0,1,2 \ldots 21} (\nu_\mu \cdot \mu)\right]_a - 15625 = 162296 - 15625 = 146671 . \tag{9}$$

On a naturellement :

$$\sum (\nu_\mu) = \left[\sum (\nu_\mu)\right]_a = \left[\sum (\nu_\mu)\right]_b , \tag{10}$$

d'où

$$b = \frac{\left[\sum_{\mu=-1,1,2 \ldots 21} (\nu_\mu \cdot \mu)\right]_b}{\sum_{\mu=0,1,2 \ldots 21} (\nu_\mu)} = \frac{146671}{46656} = 3{,}1437 . \tag{11}$$

Appelons p_{Cl}, p_M, p_{CM}, p_s les probabilités pour les 2 dés avec figure d'amener respectivement Cl seule, sans M, M seul, sans Cl, Cl et M simultanément, aucune figure. Les dés (règle 3) donnent évidemment:

$$p_{Cl} = \frac{5}{36} , \quad p_M = \frac{5}{36} , \quad p_{CM} = \frac{1}{36} ,$$

$$p_s = 1 - (p_{Cl} + p_M + p_{CM}) = \frac{25}{36} . \qquad (12)$$

Nous disposons maintenant des éléments nécessaires au calcul de G_s. Remarquant qu'un joueur quelconque joue, en tout, $\frac{N}{n} = \frac{C}{a \cdot n}$ coups, son gain est donné par l'expression:

$$p_s \cdot \frac{C}{a \cdot n} \cdot b .$$

En effet, quand le joueur seul amène l'une ou l'autre des figures Cl, M ou CM son gain est 0.

En outre, le propriétaire du Ch amène $p_0 \cdot p_s \cdot \frac{C}{n \cdot a}$ fois 0, sans figure, p_0 désignant la probabilité $\left(= \frac{15625}{46656}\right)$ d'amener le zéro.

Chaque fois, le joueur S doit payer 1 au propriétaire du Ch Son gain net est donc :

$$G_s = p_s \cdot \frac{C}{na} \cdot b\left(1 - \frac{p_0}{b}\right) = \frac{25}{36} \cdot \frac{3.1437}{3,4787} \frac{C}{n} \left(1 - \frac{15625}{146671}\right) = 0,56073 \frac{C}{n} . \qquad (13)$$

Le gain total d'un joueur ayant une ou plusieurs cartes sera constitué par le gain G_s réalisé par ce joueur lui-même, sans le secours de ses cartes, et ce que lui rapportent ses cartes. Cette conception nous permet de séparer, par la pensée, les cartes de leur propriétaire. Les cartes sont considérées comme de nouveaux joueurs *passifs*, passifs dans ce sens qu'ils ne lancent pas les dés, mais gagnent seulement quand l'un ou l'autre des n joueurs actifs amène leur figure respective. Le gain total réalisé par les n joueurs, sans l'aide de leurs cartes est par conséquent égal à

$$n \cdot G_s = p_s \frac{C}{a} b\left(1 - \frac{p_0}{b}\right) = 0,56073\,C . \qquad (14)$$

La différence $C - n\,G_s = 0{,}43927\,C$ est donc gagnée par les cartes.

Espérance mathématique de la Cloche. — La Cl seule est amenée $p_{Cl}\,.\,N$ fois par l'ensemble des joueurs, avec un gain moyen par coup, pour Cl, égal à b. On a donc simplement :

$$G_{Cl} = p_{Cl}\,.\,N\,.\,b = \frac{5}{36}\cdot\frac{C}{3{,}4787}\,.\,3{,}1437 = 0{,}12552\,C\,. \qquad (15)$$

Nous pouvons remarquer ici qu'il n'est pas nécessaire, pour calculer G_{Cl} de spécifier si les coups favorables à Cl sont amenés par le propriétaire de Cl ou un autre joueur.

Espérance mathématique du Marteau. — Toutes les règles valables pour Cl s'appliquent identiquement à M. On pose donc immédiatement :

$$G_M = p_M\,.\,N\,.\,b = 0{,}12552\,C\;, \qquad (16)$$

car

$$p_M = p_{Cl} = \frac{5}{36}\,. \qquad (12)$$

Espérance mathématique de Cloche-et-Marteau. — On a de même

$$G_{CM} = p_{CM}\,.\,N\,.\,b = \frac{1}{36}\cdot\frac{C}{3{,}4787}\,.\,3{,}1437 = 0{,}02510\,C\,. \qquad (17)$$

Remarquons que nous avons :

$$G_{CM} = \frac{1}{5}\,G_{Cl} = \frac{1}{5}\,G_M\,.$$

Espérance mathématique du Cheval. — Le propriétaire du Ch amène $p_0\cdot p_s\cdot\dfrac{C}{n\,.\,a}$ fois 0, sans figure, avec un gain par coup égal à $n+1$.

En effet, chacun des $n-1$ joueurs paie 1 au propriétaire du Ch, ce qui fait $n-1$ (règle 10). En outre, le propriétaire du Ch paie 2 de sa caisse particulière de joueur seul à celle du Ch, ce qui fait bien en tout un gain par coup égal à $n+1$. Il paie 2 et non pas 1, attendu que son gain G_s de joueur seul se calcule au moyen de la même formule (13) que celui des autres joueurs seuls. Comme il est propriétaire du Ch, son tour de payer de sa caisse particulière au Ch revient 2 fois moins souvent que celui

des autres joueurs. Il doit donc payer chaque fois le double de ce que paient au Ch les autres joueurs, afin que son gain G_s soit bien calculé d'après la formule (13). Nous voyons aisément que G_{Ch} est donné par l'expression

$$G_{Ch} = p_0 \cdot \frac{C}{na}\left[p_s(n+1) + p_{Cl} + p_M + p_{CM} + (n-1)\right] \quad (19)$$

où le premier terme représente le gain dont nous venons de donner l'explication.

Les 3 termes suivants représentent les gains de Ch quand le propriétaire de cette carte amène 0 avec Cl seule, respectivement avec M seul ou CM. Le dernier terme exprime le gain fait par Ch quand les autres joueurs amènent 0, avec ou sans figure.

Remarquant que dans la parenthèse de (19) la somme

$$p_s + p_{Cl} + p_M + p_{CM}$$

est égale à l'unité, l'expression de G_{Ch} se réduit à la forme très simple :

$$G_{Ch} = p_0(1 + p_s)\frac{C}{a} \ , \quad (20)$$

ou, en introduisant les valeurs numériques connues :

$$G_{Ch} = \frac{15625}{46656}\left(1 + \frac{25}{36}\right)\frac{C}{3,4787} = 0,16313C \ . \quad (21)$$

Vérification. — On doit évidemment avoir, comme vérification, l'identité :

$$nG_s + G_{Cl} + G_M + G_{CM} + G_{Ch} \equiv C \ . \quad (22)$$

Introduisant dans le 1er membre de cette expression les valeurs spéciales trouvées pour les différents G on obtient

$$C\frac{b + p_0}{a} \equiv C \ , \quad (23)$$

qui devient, en remplaçant a, b et p_0 par leurs valeurs

$$C\frac{146671 + 15625}{162296}\frac{46656}{46656} \equiv C \ , \qquad \text{ou} \qquad C \equiv C \ .$$

L'identité est donc bien vérifiée.

Reproduisons en un tableau les valeurs trouvées :

$$G_s = \frac{1}{n} \cdot \frac{C}{a} \cdot p_s(b - p_0) = \frac{0.56073}{n} C \left\{ \begin{matrix} \text{Gain total des } n \text{ joueurs} \\ \text{seuls, sans carte} = nG_s \end{matrix} \right\} = 0.56073\,C$$

$$\left. \begin{aligned} G_{Cl} &= \frac{C}{a} \cdot p_{Cl}\, b &&= 0{,}12552\,C \\ G_{M} &= \frac{C}{a} \cdot p_{M}\, b &&= 0{,}12552\,C \\ G_{CM} &= \frac{C}{a} \cdot p_{CM}\, b &&= 0{,}02510\,C \\ G_{Ch} &= \frac{C}{a} \cdot p_0(1 + p_s) &&= 0{,}16313\,C \end{aligned} \right\} \begin{matrix} \text{Gain total de} \\ \text{toutes les cartes} \end{matrix} = 0{,}43927\,C$$

Somme totale = C

Remarques. — 1. L'espérance mathématique du gain d'un joueur seul est inversement proportionnelle au nombre des joueurs. Par contre, l'espérance mathématique du gain total de tous les joueurs seuls est indépendante de leur nombre.

2. L'espérance mathématique de chacune des cartes est indépendante du nombre des joueurs.

3. Si un joueur a plusieurs cartes l'espérance mathématique de son gain total est égal à l'espérance mathématique de son gain en tant que joueur seul + la somme des espérances mathématiques de chacune de ses cartes.

4. Toutes les espérances mathématiques déterminées s'expriment en fonction de l'encaisse C au début de la partie, *une fois les mises terminées*, et sont d'ailleurs, naturellement, proportionnelles à cette grandeur. Du moment que C est inconnu des joueurs avant la clôture des mises, on ne pourra pas calculer d'avance la valeur probable de chacune des cartes. On devra attendre que, les mises terminées, le caissier ait compté à combien se monte C et alors seulement on pourra vérifier si les cartes ont été payées leur juste prix.

5. Sans pousser plus avant les calculs, on voit immédiatement que les écarts relatifs probables sont d'autant plus grands que la probabilité d'amener la figure considérée est plus faible. Les écarts relatifs probables, ordonnés par ordre décroissant, se

présentent donc comme suit : (CM), (Cl et M *ex-aequo*), (Ch), (gain moyen d'un joueur sans carte).

Appliquons les formules établies à un cas particulier. Supposons

$$C = 1500 \ , \qquad n = 6 \ .$$

La tabelle ci-après permet de comparer les espérances mathématiques, calculées au moyen des formules trouvées, aux résultats d'une partie quelconque jouée en éliminant délibérément l'Auberge. Pour terminer la partie la caisse a simplement payé la somme r (r = somme restant en caisse avant le dernier coup de dés de la partie) à celui des joueurs ayant amené $s > r$.

Joueur N°	Espérance math. calculée	Résultats d'une partie jouée	Moyennes de ces résultats	Ecarts relatifs moyens
1	140,18	146	142,17 (joueurs 1 à 6)	1,42 % (joueurs 1 à 6)
2	140,18	143		
3	140,18	98		
4	140,18	168		
5	140,18	143		
6	140,18	155		
Cl	188,27	158	183,00 (Cl et M)	2,80 % (Cl et M)
M	188,27	208		
CM	37,65	44		16,87 %
Ch	244,70	237		3,15 %
Somme	**1499,97**	**1500**		

La partie a compté un nombre de coups N = 404, alors que le nombre de coups probable était $\frac{1500}{3,4787} = 431,2$. L'écart relatif est donc 6,3 %.

Neuchâtel, 10 décembre 1922.

MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

Fonctions triplement périodiques d'une seule variable indépendante

par Marcel WINANTS (Liège).

I. — En analyse élémentaire, on étudie les fonctions d'une *variable réelle*. On fait correspondre aux diverses valeurs de celle-ci les différents points d'une droite ou d'un segment de droite. On connaît des fonctions périodiques de cette variable, c'est-à-dire des fonctions telles que l'on ait :

$$f(x + m\mathrm{T}) = f(x) ,$$

quelle que soit la valeur de x ; T représente une constante bien déterminée — c'est la période — tandis que m est un entier complètement arbitraire: négatif, nul ou positif. Les fonctions périodiques les plus simples sont les fonctions circulaires.

Et l'on a démontré l'impossibilité d'une fonction doublement périodique.

II. — Aux différents points d'une surface plane on peut faire correspondre les diverses valeurs d'une *variable complexe*. L'expression $z = x + i\,y$ est appelée *une* variable (une, au singulier). L'analyse des variables complexes a pris un développement tel que l'on en peut considérer l'analyse réelle comme un cas très particulier.

On connaît des fonctions doublement périodiques d'une seule variable complexe ; ce sont des fonctions satisfaisant l'égalité

$$f(z + m\mathrm{T} + m'\mathrm{T}') = f(z) ,$$

quelle que soit la valeur de z ; T et T′ sont les deux périodes, et l'on a démontré que leur rapport était nécessairement complexe ; m et m' sont des entiers arbitraires.

Les fonctions elliptiques sont les plus simples parmi les fonctions doublement périodiques d'une seule variable indépendante.

Un très original théorème de Jacobi démontre l'impossibilité d'une fonction uniforme triplement périodique d'une seule variable complexe.

III. — Nous allons développer des considérations analogues pour l'espace à trois dimensions, et nous montrerons enfin comment la science cristallographique semble justifier tous ces développements.

Soient trois axes coordonnés rectangulaires. Envisageons trois vecteurs non coplanaires a, b, c, issus de l'origine.

Considérons le parallélépipède dont les huit sommets correspondent aux vecteurs:

$$\left.\begin{array}{l} 0\,,\ a+b+c\,, \\ a\,,\ b\,,\ c\,, \\ b+c\,,\ c+a\,,\ a+b\,. \end{array}\right\}\ (\mathrm{P})\ .$$

A l'intérieur de son volume, prenons un point quelconque, et soit u le vecteur joignant ce point à l'origine. Choisissons u comme variable indépendante.

Par un procédé quelconque, à toute valeur de u faisons correspondre un vecteur v ; nous aurons:

$$v = f(u)\ ;$$

posons ensuite:

$$f(u + ma + m'b + m''c) = f(u)\ .$$

Et nous aurons ainsi défini une *fonction triplement périodique* d'une seule variable indépendante.

Des fonctions de cette nature ont peut-être déjà été envisagées, notamment en analyse vectorielle ? Nous nous bornerons pour le moment à soulever la question et nous serions heureux si quelque lecteur de l'*Ens. math.* pouvait nous renseigner sur ce point.

IV. — Les cristallographes donnent au volume P le nom de parallèloèdre. Ce parallèloèdre est empli de matière et d'éther. On conçoit un cristal comme formé d'un nombre prodigieusement grand de parallèloèdres identiques, juxtaposés.

Toute propriété, physique ou chimique, en un point d'un cristal, est donc une fonction triplement périodique de la position de ce point. Cette fonction est actuellement réelle, mais ce n'est là qu'un cas particulier.

La triple périodicité d'une structure cristalline est un fait qu'aucun cristallographe ne conteste plus. Elle pourrait, et même devrait suggérer au mathématicien l'étude systématique des fonctions à trois périodes. Cette étude nous paraît fort difficile, d'autant plus que nous ne connaissons encore aucune analyse à trois dimensions, pouvant être considérée comme une généralisation de l'analyse complexe. On ne soutiendra certainement pas que la théorie des quantités complexes rentre dans celle des quaternions comme un cas particulier dans un cas général.

Néanmoins, nous croyons qu'aujourd'hui l'on peut ne plus mettre en doute l'existence des fonctions triplement périodiques d'une seule variable indépendante.

Liège (Université), le 31 mars 1923.

Sur le théorème de la progression arithmétique de Dirichlet.

I. — *Réponse à une Note de M. Mar. Bedarida*
par M. Léon Aubry.

Dans sa note (*Enseignement mathématique*, 22me année, 1921 et 1922, nos 1-2, pp. 51-52), M. Bedarida affirme que les considérations sur lesquelles je me suis basé, ne sont pas justes, mais il ne donne aucun argument décisif contre mes objections; voici quelques explications pour bien montrer que je n'ai pas du tout envisagé la valeur $s = 1$.

Dans le *Journal de Liouville* (Tome 4, 1839, p. 396), Dirichlet a voulu établir, pour $s > 1$, l'égalité

$$\prod \frac{1}{1 - \omega^\gamma \frac{1}{q^s}} = \sum \omega^\gamma \frac{1}{n^s} = L \qquad (1)$$

mais, en réalité, sa démonstration, basée sur la convergence de $\sum \frac{1}{h^s}$, n'est valable que pour les valeurs de s qui rendent cette somme convergente, elle n'est donc pas valable, à bien plus forte raison, pour les valeurs de $s \overline{\overline{>}} 1$ qui rendent $\log. L_0 = \infty$, puisque par construction $L_0 < \sum \frac{1}{h^s}$ et l'on ne peut donc avoir en même temps $\log. L_0 = \infty$ et l'égalité (1) démontrée, comme l'a admis Dirichlet, (*loc. cit.*, p. 408 et 411).

M. Bedarida affirme que Dirichlet a déduit par des raisonnements rigoureux l'équation de la page 411 (*loc. cit.*) où $s = 1 + \rho$, $\rho > 0$, or il faut remarquer que ρ n'est pas un nombre quelconque, mais nécessairement infiniment petit, puisque la démonstration de Dirichlet est basée en grande partie sur des raisonnements d'analyse infinitésimale rigoureux seulement pour $s = 1 + \rho$ avec ρ infiniment petit et tendant vers 0; il y a donc là encore une contradiction, puisque ces raisonnements d'analyse ne sont absolument exacts que pour la limite $s = 1$, tandis que pour cette valeur de s l'égalité (1) n'est pas démontrée par Dirichlet.

II. — *Réponse à la lettre de M. Léon Aubry*
par M. Mar. Bedarida.

Dans la note ci-dessus qui nous a été obligeamment communiquée par la Rédaction, M. L. Aubry nous dit qu'il n'est pas persuadé de mes observations sur ses objections concernant la démonstration de Dirichlet du théorème de la progression arithmétique.

En supposant $\rho > 0$, Dirichlet arrive à l'égalité (*Journ. de Liouville*, t. 4, 1839, p. 411) :

$$\sum \frac{1}{q^{1+\rho}} + \frac{1}{2} \sum \frac{1}{q^{2+2\rho}} + \frac{1}{3} \sum \frac{1}{q^{3+3\rho}} + \cdots$$

$$= \frac{1}{p-1} \left[\log L_{(0)} + \Omega^{-\gamma_m} \log L_{(1)} + \Omega^{-2\gamma_m} \log L_{(2)} + \Omega^{-(p-1)\gamma_m} L_{(p-2)} \right]$$

qui a toujours une valeur déterminée et finie dans l'hypothèse $\rho > 0$.

Dans cette relation, Dirichlet passa à la limite pour $\rho = 0$ ($s = 1$); dans le § II de son Mémoire il a démontré que $\lim_{s=1} \log L_{(0)} = \infty$.

A présent, les considérations pour le passage à la limite pour $s = 1$ ne conduisent pas à devoir considérer l'égalité :

$$\prod \frac{1}{1 - \omega^{\gamma} \frac{1}{q^s}} = \sum \omega^{\gamma} \frac{1}{n^s} = L \tag{1}$$

pour $s = 1$. Dans la démonstration de Dirichlet, on ne demande pas d'examiner (1) pour $s = 1$, mais il y a seulement des considérations à la limite pour $s = 1$ ($\rho = 0$).

M. Aubry ne doit pas oublier le principe fondamental de la théorie des limites fonctionnelles, c'est-à-dire que la limite (quand elle existe) est bien différente de la valeur (s'il y en a une) que prend la fonction lorsqu'on remplace la variable par la valeur pour laquelle on considère la limite.

J'ajouterai encore les observations suivantes, au sujet des réponses publiées dans le fasc. 5-6, p. 69-70, 1922, de l'*Intermédiaire des Mathématiciens*, à propos des remarques de M. Aubry sur la démonstration de Dirichlet du théorème de la progression arithmétique.

Les citations bibliographiques de ces réponses ne font pas comprendre si quelque mathématicien a prouvé que les raisonnements de Dirichlet ne seraient pas rigoureux, mais ils donnent seulement des indications d'auteurs qui ont simplifié la démonstration de Dirichlet et qui ont donné au théorème une plus vaste extension; en outre, on signale la nouvelle démonstration de M. Landau.

Quant au théorème indiqué dans la première réponse, je dis qu'il a été étendu, sans recourir à des considérations d'analyse, aux progressions $mx + 1$, où m est un entier quelconque (KRONECKER, *Vorlesungen über allgemeine Arithmetik*, p. 440-441).

Gênes, décembre 1922.

A.-M. BEDARIDA.

CHRONIQUE

Congrès de l'Association française pour l'Avancement des Sciences [1].

Montpellier, 24 au 29 juillet 1922.

Les Sections de mathématiques, astronomie, géodésie, mécanique, se sont réunies sous la présidence de M. CLAPIER, D[r] es Sciences, Professeur au Lycée de Montpellier. Vice-Présidents: MM. le L[t]-Col. PERRIER, chef de la Section de géodésie au Service géographique de l'Armée, et M. BOCCARDI, Directeur de l'Observatoire de Turin; Secrétaire, M. A. GÉRARDIN, Correspondant du Ministère de l'Instruction Publique, à Nancy.

Après un discours d'ouverture de M. CLAPIER, on passe à la présentation des mémoires.

1. — M. le L[t]-Col. PERRIER parle de la *Réfection de la triangulation des Régions Libérées*. De nombreux points géodésiques, dont plus de mille clochers, ont été détruits. Une nouvelle triangulation fera le canevas indispensable aux levés à grande échelle, 10.000[e], 20.000[e], plans directeurs. Elle intéresse le Ministère de la Guerre et celui des Régions Libérées, car environ 2000 communes réclament la réfection de leurs plans cadastraux. En 1922, on a fait les premières opérations de reconnaissance pour le réseau de premier ordre.

2. — M. BOCCARDI présente son mémoire sur *L'erreur probable dans les calculs par nombres et par logarithmes*. Presque tous les auteurs ont envisagé l'erreur maxima à craindre, mais elle est exceptionnelle. M. Boccardi a étudié l'erreur probable à craindre dans un calcul tiré de tables avec le même nombre de décimales sans interpolation. Il trouve qu'en général c'est le calcul par logs qui donne le plus d'exactitude, tandis que pour une puissance, c'est le calcul numérique qui est le plus précis.

3. — M. HADAMARD envoie une note (présentée par M. VAROPOULOS) *Sur la fonction harmonique la plus voisine d'une fonction donnée.*

[1] Nous devons ces notes à MM. GÉRARDIN, CLAPIER et VAROPOULOS.

M. Levi Civita a déterminé la fonction harmonique u qui donne à l'intégrale

$$I = \iiint (u - U)^2 \, dx \, dy \, dz$$

valeur la plus petite possible, U étant une fonction donnée et le volume d'intégration Ω étant également donné.

Par une méthode plus directe, mais au fond équivalente à celle de M. L. Civita, on peut résoudre ce problème.

Il suffit de chercher les conditions *auxquelles doit* satisfaire une fonction régulière F pour que l'intégrale

$$J = \iiint F V \, dx \, dy \, dz$$

soit nulle quelle que soit la fonction harmonique V.

4. — M. Hadamard (présentée par M. Varopoulos) *La notion de différentielle dans l'enseignement.*

On sait que, si

$$y = f(x) \,, \qquad dy = f'(x) \, dx \qquad (1)$$

$$z = f(x\,, y) \,, \qquad dz = p dx + q dy \qquad (1')$$

l'égalité (1) signifie tout simplement, que, x étant fonction d'une variable auxiliaire quelconque u, on aura

$$\frac{dy}{du} = f'(x) \frac{dx}{du} \qquad (2)$$

la relation entre x et u étant quelconque. De même pour l'égalité (1') on aura

$$\frac{dz}{du} = \frac{dz}{dx}\frac{dx}{du} + \frac{dz}{dy}\frac{dy}{du} \,. \qquad (2')$$

Ces égalités ont lieu quelle que soit la variable indépendante u l'égalité

$$d^2y = f'(x) \, d^2x + f''(x) \, dx^2$$

signifie que l'on a

$$\frac{d^2y}{du^2} = f'(x) \frac{d^2x}{du^2} + f''(x) \left(\frac{dx}{du}\right)^2 .$$

Et aussi

$$d^2z = pd^2x + qd^2y + rdx^2 + tdy^2 + 2sdxdy$$

veut dire uniquement que l'on a

$$\frac{d^2z}{du^2} = p \frac{d^2x}{du^2} + q \frac{d^2y}{du^2} + r \left(\frac{dx}{du}\right)^2 + t \left(\frac{dy}{du}\right)^2 + 2s \frac{dx}{du}\frac{dy}{du} \,.$$

5. — M. VAROPOULOS expose sa note *Sur les fonctions croissantes et les fonctions entières.*

L'auteur communique quelques résultats obtenus et donne des applications. Il établit d'abord le *théorème* suivant:

Etant donné un nombre $\theta > 1$ quelconque pour des valeurs de r indéfiniment croissantes l'inégalité

$$\mu\left(r + \frac{1}{\log \mu(r) \log_2 \mu(r) \ \ldots \ \log_\nu \mu(r)^a}\right) < \theta \, . \, \mu(r) \qquad (a > 1 \text{ quelconque})$$

$\mu(r)$ étant une fonction croissante quelconque, a lieu.

Il applique cette proposition aux fonctions entières

$$\mu(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

désignant par $m(r)$ le module maximum sur le cercle $|z| = r$ il démontre les inégalités suivantes:

$$m(r) < r\mu(r) \log \mu(r) \ldots \log_\nu \mu(r)^a \qquad (a > 1 \text{ quelconque}) \qquad (1)$$

où

$$\left|a_n\right| r^n < \mu(r) \, .$$

$$m(r) < r\mu(r) \, q(r) \log q(r) \ldots \log_\nu q(r)^a \qquad (2)$$

où $q(r)$ croît plus vite que toute puissance de r finie

$$n < r^2 \mu(r) \, q(r) \log q(r)^{2+\varepsilon} \qquad \varepsilon > 0 \qquad (3)$$

n étant le nombre de zéros de la fonction $f(z)$ $\left[|f(z)| \leq e^{\mu(r)}\right]$ dont le module est plus petit ou égal à r et $\lim \frac{q(r)}{\log r} = \infty$.

6. — M. Farid BOULAD bey, Ingénieur des chemins de fer de l'Etat, au Caire, présente son mémoire *Sur la représentation et la détermination des tensions et des déformations autour d'un point dans un corps élastique.*

7. — M. CANDIDO, proviseur au Lycée de Campobasso (Italie), *Sur les identités rationnelles.* L'auteur généralise des identités de FAGNANI et pose une demande de priorité en faveur de FAGNANI pour le théorème « dit de STEWART ». Cette question sera étudiée au prochain congrès.

8. — M. HUTTINGER, *Sur la décomposition en facteurs des équations algébriques.* L'auteur annonce qu'il a trouvé une nouvelle théorie, et qu'il la fera connaître plus tard. En attendant, il donne plusieurs exemples.

9. — M. Richard, Professeur au Lycée de Châteauroux, *Sur la géométrie dans ses rapports avec la théorie de la Relativité*. L'auteur présente plusieurs critiques sur la théorie d'Einstein.

10. — M. Richard, *Réflexions diverses sur l'Enseignement des mathématiques*. L'enseignement, dans les lycées, devrait être surtout géométrique. L'auteur fait ensuite des observations sur la manière d'enseigner différentes branches des mathématiques élémentaires.

11. — Vœu sur la *Réfection du Cadastre*.

12. — M. Clapier présente une *Note d'Arithmétique*. En partant de l'équation de Pell-Fermat $x^2 - Ay^2 = 1$, l'auteur montre comment on peut déduire d'une solution particulière une infinité d'autres solutions, et donne une suite convergente de fractions qui permet de définir $\sqrt{A}$.

13. — M. A. Gérardin présente ses *Notes sur l'extension de certaines tables mathématiques importantes*. Ces tables forment une suite aux *Quadratic Partitions* de M. le Lt-Col. Allan Cunningham, de Londres. En général, on peut dire qu'elles mettront encore autant de matériaux nouveaux à la disposition des mathématiciens. Plusieurs exemples sont indiqués, ainsi que des identités inédites mettant certains nombres premiers p sous diverses formes.

14. — M. A. Gérardin, *Sur certaines équations indéterminées en nombres entiers*. Solution immédiate de questions posées par des membres de la Section.

15. — M. A. Gérardin, *Lettres inédites de H. Le Lasseur à Ed. Lucas*. Ces lettres seront reproduites en 1923, *in extenso*, dans le *Sphinx-Oedipe*.

16. — M. A. Gérardin, *Notes sur The Oxford, Cambridge and Dublin Messenger of mathematics*.

17. — M. Cadenat (présenté par M. A. Gérardin) *Le calendrier universel à semaine invariable*.

L'auteur résout le problème d'amener le même jour de la semaine au même quantième, pendant la suite indéfinie des temps, avec la condition expresse que la semaine ne sera altérée ni dans sa durée, ni dans son cours. L'auteur donne une belle citation de Laplace sur l'utilité de la conservation de la semaine. Il propose la création de deux sortes d'années:

1° Année ordinaire de 52 semaines ou 364 jours.
2° Année complémentaire de 53 semaines ou 371 jours.

Les années complémentaires s'intercaleraient dans le cours des années ordinaires, suivant une formule longuement expliquée. Le 1er janvier de l'année civile oscillerait autour du périgée de 4 jours en plus ou en moins.

18. — M. Boulogne, *Construction de Tables de caractéristiques relatives à la base* 300, *pour la détermination des nombres premiers et des facteurs premiers des autres nombres non divisibles par* 2, 3 *ou* 5.

19. — M. Véronnet, astronome à l'Observatoire de Strasbourg envoie une note, présentée par M. A. Gérardin sur *Les étoiles géantes : Constitution et Evolution.* Les étoiles géantes constituent un groupe nettement séparé, au moins dans les étoiles rouges et jaunes, les moins chaudes. Elles ont un éclat global de 50 à 100 fois plus considérable que les étoiles normales du même type et de même température, sans étoiles intermédiaires et leurs diamètres peuvent être des centaines de fois plus considérables.

Les lois des gaz ne permettent pas de leur donner la même constitution physique que les autres étoiles. Il faut admettre une enveloppe de particules solides, analogue à la couronne solaire, et maintenue au delà de l'atmosphère par la pression de radiation, à des centaines de fois le rayon de l'astre central. La note étudie les conditions physiques d'équilibre et de température du système. Par le rayonnement, la température de l'astre central diminue, mais celle de l'enveloppe augmente en se rapprochant du centre, et atteindra son maximum quand l'étoile sera redevenue normale.

20. — M. Fontaine, ingénieur, envoie une brochure intitulée: *Les erreurs de l'analyse moderne : Note sur un théorème de* Cantor *et sur sa démonstration.*

21. — M. Bioche, Professeur au Lycée Louis le Grand, *Remarques sur les faisceaux des surfaces qui contiennent des systèmes de plans.* On considère le faisceau des surfaces définies par l'équation

$$P_1 P_2 \dots P_n + \lambda . Q_1 Q_2 \dots Q_n = 0$$

où l'on a évidemment deux systèmes de plans à deux valeurs opposées de λ correspondent des surfaces telles que les plans tangents soient conjugués harmoniques par rapport aux plans P, et Q.

On peut établir facilement des résultats intéressants pour ces surfaces.

M. A. Gérardin présente les notes suivantes:

22. — Léon AUBRY, de 'ouy les Reims, *Démonstration du théorème de Fermat sur les nombres polygones.*

En se basant sur la décomposition de tout nombre en une somme de trois triangulaires et sur l'identité

$$\begin{cases} K\left(\frac{x^2-x}{2}\right)+2x+1+K\left(\frac{y^2-y}{2}+\frac{u^2-u}{2}+\frac{v^2-v}{2}\right) \\ =\left[K\left(\frac{X^2-X}{2}\right)+X\right]+\left[K\left(\frac{Y^2-Y}{2}\right)+Y\right]+\left[K\left(\frac{U^2-U}{2}\right)+U\right] \\ \qquad +\left[K\left(\frac{V^2-V}{2}\right)+V\right] \\ X=\frac{1}{2}(x+y+u+v-1)\ , \quad Y=\frac{1}{2}(x+y-u-v+1) \end{cases}$$

$$U=\frac{1}{2}(x-y+u-v+1)\ . \quad V=\frac{1}{2}(x-y-u+v+1)$$

on démontre beaucoup plus facilement que par la méthode de CAUCHY, que tout nombre est décomposable en une somme de $K+2$ nombres de la forme $K\left(\frac{m^2-m}{2}\right)+m$.

23. — M. R. GOORMAGHTIGH, Ingénieur à La Louvière (Belgique): *Un théorème sur les puissances entières.* Cette note contient la démonstration du théorème suivant: *Toute puissance d'exposant 4n d'un multiple de 3 est la somme algébrique d'un bicarré et de deux cubes.*

Cette proposition suppose n au moins égal à 3. La démonstration montre cependant qu'elle est aussi applicable au cas de $n=2$, en ce qui concerne les multiples impairs ou pairement pairs de 3.

24. — M. R. GOORMAGHTIGH, *Sur des propriétés remarquables de certaines chaînettes tordues.* Cette communication est destinée à faire connaître des résultats obtenus dans l'étude de la courbe gauche remarquable obtenue en tordant la chaînette d'équation intrinsèque $\rho=a+\frac{s^2}{a}$ de manière que son rayon de torsion soit défini par la relation $\tau=\frac{a\rho}{s}$, c'est-à-dire de manière qu'elle devienne une certaine géodésique de cône. Ces résultats peuvent se résumer ainsi:

Le cône sur lequel la chaînette tordue considérée est une géodésique peut s'obtenir en projetant du centre d'une sphère la développée sphérique d'une courbe sphérique à torsion constante tracée sur cette sphère, et dont le rayon de torsion est égal au rayon de la sphère.

La transformée par inversion de la chaînette tordue, par rapport au sommet du cône, est une courbe à courbure constante.

Les normales principales de la chaînette tordue sont les binormales

d'une autre courbe qui s'obtient en tordant la développée d'une chaînette d'égale résistance de manière qu'elle devienne aussi une géodésique de cône.

Pour la chaînette tordue considérée, le rayon de la sphère osculatrice varie proportionnellement au rayon de courbure.

25. — M. Kraitchik, Ingénieur à Bruxelles. *Tables d'indices jusqu'à* 10.000. Une table d'indices est dans la théorie des nombres ce qu'est une table de logs en algèbre. On comprend donc l'utilité de cette table; celle de Jacobi ne va que jusqu'à 100. L'auteur donne les indices de tous les nombres premiers inférieurs à 100 pour tous les modules inférieurs à 10.000, avec des applications. On en trouve d'autres dans la « Théorie des Nombres » et dans les « Décompositions de $a^n \pm b^n$ en facteurs dans le cas où nab est un carré parfait » publiés récemment par l'auteur (Gauthier Villars).

26. — M. P. Humbert, *Sur une propriété des fonctions hypercylindriques.*

27. — M. T. Lemoyne, à Paris, *Sur les normales aux courbes algébriques planes.* En cherchant l'ordre du lieu des pieds des normales menées d'un point donné P aux courbes algébriques appartenant à un système de caractéristique (μ, ν) on conclut les théorèmes suivants:

I. *Dans un système de courbes* (μ, ν) *d'ordre* m *il y a* $(\mu + \nu)$ *courbes normales à une droite quelconque* D.

II. *Le lieu des pieds des normales menées d'un point* P *aux courbes* (μ, ν) *est une courbe d'ordre* $2\mu + \nu$ *qui admet le point* P *et les points cycliques pour points multiples d'ordre* μ.

28. — M. T. Lemoyne, *Sur les cubiques à point double.* En partant du théorème bien connu de Chasles «Lorsque deux angles sont circonscrits à une conique, les sommets et les 4 points de contact sont 6 points d'une même conique » nous établissons un autre théorème. C'est le théorème suivant:

Théorème: Si de deux points quelconques A, B d'une cubique à point double on mène les tangentes à la courbe les deux points A, B et les 4 points de contact sont 6 points d'une même conique.

29. — M. Hostinsky à Brno (Tchéco-Slovaquie), *Analyse vectorielle et équations intégrales.* On sait que la recherche des fonctions inconnues d'un système d'équations intégrales de Fredholm se réduit à la résolution d'une équation intégrale unique.

On peut ou bien appliquer la méthode même de M. Fredholm (*Acta mathematica*, 1903), ou bien on peut employer un procédé dont s'est servi M. Weyl.

L'auteur compare ces deux méthodes et envisage un cas très inté-

ressant qui se présente dans les problèmes de la physique mathématique: Chercher trois composantes u, v, w d'un vecteur A dont le point d'application P est situé sur une surface fermée S.

30. — M. DONTOT, *Sur une formule d'Euler.*

31. — M. CLAPIER présente sa Note *Sur les équations irrationnelles de la forme*

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} + \dots = 0 .$$

L'auteur donne une méthode simple pour les rendre rationnelles. Il interprète géométriquement ces formes et généralise pour le cas de 5 variables, les propriétés de la surface de STEINER.

32. — M. RIABOUCHINSKY, envoie une Note *Sur les mouvements plans des fluides autour de solides avec tourbillons.* L'auteur obtient pour chaque configuration des solides et des tourbillons des constantes cycliques bien déterminées.

Après l'élection de M. le Lt-Col. PERRIER, comme président de la Section pour 1923, M. CLAPIER prononce un discours de clôture. La Section remercie vivement M. CLAPIER qui a su intéresser aussi de nouveaux collègues et les amener à notre groupement.

Questions à l'ordre du jour pour le Congrès A. F. A. S. 1923 (Bordeaux):

1° Réforme du calendrier. — 2° Rapports entre la géologie et l'astronomie. — 3° L'accélération du moyen mouvement de la Lune. — 4° Equations irrationnelles de la forme

$$\sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{y} + \sqrt[n]{z} + \dots = 0 .$$

5° Bio-Bibliographie d'un savant de la Région de Bordeaux. — 6° Détermination des efforts secondaires dans les poutres américaines à grande portée.

Société mathématique suisse.

Berne, 26 août 1922.

La Société mathématique suisse a tenu sa douzième réunion ordinaire à Berne, le 26 août 1922, sous la présidence de M. le Prof. Gustave DUMAS (Lausanne). La partie scientifique comprenait douze communications dont voici les résumés:

1. — Prof. Marcel GROSSMANN (Zurich). — *Géométrie dans le système des antipolaires.* — Si on ordonne à chaque point d'un plan son « antipolaire » par rapport à un cercle donné, il en résulte un système polaire par rapport à un cercle imaginaire. Si on prend celui-ci comme conique absolue d'une métrique projective, on aura une représentation de la géométrie elliptique (non-euclidienne). Chaque triangle polaire sera par exemple un triangle avec trois angles droits. A chaque figure et à chaque construction de la géométrie elliptique correspondra une figure et une construction dans le système polaire.

Comme exemple on donne la construction d'un cercle dont on connaît le centre et un point de la circonférence. Il est facile de trouver parmi les cercles concentriques autour du centre donné une courbe qui est à la fois cercle de la géométrie euclidienne. Tous les autres cercles de la géométrie sont collinéaires à cette courbe.

2. — Prof. A. SPEISER (Zurich). — *Groupes de congruences.* — D'après le théorème de C. Jordan il n'y a qu'un nombre limité de groupes simples représentables par des substitutions de degré n avec des coefficients réels ou complexes. Si au contraire on prend pour coefficients les résidus d'un nombre premier p ou d'un idéal premier (un domaine d'imaginaires de Galois), on a une infinité de tels groupes. Cependant on peut démontrer par la théorie du déterminant des groupes, que si l'ordre d'un groupe de congruences est premier à p, ce groupe est représentable comme groupe de substitutions du même degré avec des coefficients réels ou complexes. La complexité immense des groupes de congruences dépend donc uniquement du facteur p de l'ordre.

3. — Prof. R. FUETER (Zurich). — *La théorie indépendante des fonctions modulaires elliptiques.* — Hurwitz, dans sa thèse de doctorat, a le premier défini et développé les fonctions modulaires elliptiques sans revenir à la théorie des fonctions elliptiques. Plus tard (*Math. Annalen*, t. 48), il a simplifié ses démonstrations, sans parvenir cependant à un résultat tout à fait satisfaisant. C'est à l'aide du théorème de Fourier

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_0^1 f(\xi) e^{2\pi i n \xi} d\xi = \frac{f(0) + f(1)}{2}$$

qu'on arrive au bout sans difficulté. Cette théorie sera exposée dans un ouvrage didactique en préparation.

4. — Prof. A. EMCH (Urbana, E.-U.). — *Sur quelques applications géométriques des groupes de substitutions symétriques.* — Cette communication envoyée par notre savant concitoyen soleurois se

rattache au mémoire fondamental de Veronese sur l'interprétation géométrique de la théorie des substitutions de n lettres. Elle sera insérée dans un prochain n° de l'*Enseignement mathématique.*

5. — Dr Charles WILLIGENS (Interlaken). — *Application du calcul des probabilités à l'adaptation des salaires au coût de la vie.* — On appelle nombre indice un nombre qui est sensé indiquer la dépense nécessaire à une famille type. On obtient ces nombres indices à l'aide de comptes de ménages, en prenant la moyenne des quantités consommées pour la nourriture, les vêtements, etc. Ce procédé, ainsi que celui employé pour déterminer la composition de la famille correspondant à la moyenne est très rudimentaire et sujet à caution. Dans ce qui suit nous admettrons que l'on dispose d'un nombre indice acceptable, représentant la moyenne des dépenses des ménages de la Suisse. Connaissant les besoins et les prix du jour, on pourra à tout moment calculer la valeur de cette moyenne.

Supposons que nous connaissions le revenu x de chaque ménage. Soit $M_x \Delta_x$ le nombre de ménage dont le revenu est compris entre x et $x + \Delta x$, M le nombre total des ménages. Sur les longueurs Δx égales portées sur l'axe des x, construisons des rectangles de hauteur $\frac{M_x}{M}$. L'aire du rectangle représente la fréquence des ménages de revenu compris entre x et $x + \Delta x$. A l'aide d'un procédé d'interpolation, on peut déterminer, connaissant un certain nombre des ménages seulement, une fonction $V(x)$, tel que $V(x)dx$ représente la probabilité pour un ménage ayant un revenu compris entre x et $x + dx$. Le procédé consiste à prendre un nombre suffisant de termes du développement en série uniformément convergente, suivant les polynomes qui s'introduisent dans les dérivées successives de [1]

$$J = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2} .$$

Dans ce qui suit nous nous contenterons de la 1re approximation, les données faisant défaut pour pousser plus loin. L'indice J est donné comme moyenne des valeurs de x par l'intégrale

$$J = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-h^2(x-J)^2} dx .$$

[1] Voir pour la méthode : E. CZUBER. *Wahrscheinlichkeitsrechnung*, 3e édition, t. I, p. 418. — Voir aussi l'exposé de A. GULDBERG dans les *Comptes rendus du Congrès international des mathématiciens*, Strasbourg, 1920, p. 552.

En effet $V(x)\,dx \times M$ étant le nombre des familles de revenu entre x et $x + dx$, leur dépense supposée égale à leur revenu sera $x \,.\, M + V(x)\,dx$. Pour tous les ménages la dépense sera

$$M \int_{-\infty}^{+\infty} x V(x)\,dx$$

et la moyenne de ces dépenses sera

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} x V(x)\,dx$$

ici nous prenons

$$V(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2(x-J)^2} .$$

Si par suite d'une variation de prix l'indice prend une valeur J′ et si nous désignons par $\varphi(x)$ le nouveau revenu, déterminé en fonction de l'ancien, on aura

$$J' = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, e^{-h^2(x-J)^2}\, dx \, . \qquad (1)$$

c'est-à-dire que J′ *devra de nouveau être la moyenne des revenus.* La constante h est donné par la formule:

$$1 : h\sqrt{2} = \sqrt{\frac{\Sigma\,(x - J)^2}{n}} \, , \qquad (2)$$

la somme étant formée pour les valeurs de x pour les ménages connus, au nombre de n.

(1) donne une relation permettant de déterminer des constantes laissées arbitraires dans $\varphi(x)$.

Nous imposerons en outre la condition:

$$J' = \varphi(J) \qquad (3)$$

pour que le maximum de l'exponentielle corresponde de nouveau au nombre indice.

I. Si l'on pose $\varphi(x) = \lambda x$ les conditions (1) et (3) sont identiques et on a

$$\varphi(x) = \frac{J'}{J} x \, .$$

II. Si l'on a $\varphi(x) = ax + b$ les conditions (1) et (3) donnent $J' = aJ + b$ Si l'on veut assurer un revenu minimum i' correspondant à un ancien

revenu minimum i on aura $i' = ai + b$, soit en définitive le nouveau salaire

$$\varphi(x) = \frac{J' - i'}{J - i}(x - J) + J' .$$

III. Si $\varphi(x)$ est quelconque on aura

$$\varphi(x) = \varphi(J + x - J) = \varphi(J) + \frac{x - J}{1}\varphi'(x) + \frac{(x - J)^2}{2!}\varphi''(J) + \dots$$

que nous supposerons convergente pour toute valeur de x. On a $\varphi(J) = J'$ et (1) donnera une relation entre les valeurs des dérivées de $\varphi(x)$ pour $x = J$.

On pourrait encore faire l'adaptation en assurant un salaire minimum et en remarquant que la variation du prix de la vie est d'autant moins éprouvé que le revenu est élevé. Si l'on adopte l'hypothèse de Daniel Bernoulli sur la valeur morale d'une somme, on obtient la formule

$$\varphi(x) = x + \frac{i' - i}{\log\frac{i'}{i}}\log\left(1 + \frac{i' - i}{x}\right) ,$$

pour $x = i$, on a bien $\varphi(x) = i'$; à l'ancien salaire minimum, correspond le nouveau minimum.

6. — Dr Jules Chuard (Lausanne). — *Le problème des quatre couleurs.* — Le problème de la coloration de la carte sur la sphère est bien connu: Quatre couleurs ont toujours suffi à colorier les subdivisions d'une carte terrestre, à condition de ne pas donner la même couleur à deux d'entre elles qui ont en commun une ou plusieurs lignes de séparation [1]. La condition de suffisance n'a cependant pas été établie jusqu'ici.

Des résultats antérieurement acquis ont montré que toute la difficulté consistait à colorier une carte dont les frontières forment un réseau cubique. Or de tels réseaux sont réductibles, de diverses manières, en un réseau quadratique et un réseau linéaire.

J'ai tiré d'un procédé dû à M. Veblen [2], un moyen d'obtenir tous ces réseaux quadratiques, partant toutes les réductions d'un réseau cubique donné. En correspondance avec ce réseau on établit une certaine matrice, dont chaque ligne concourt à la formation d'une équation linéaire et homogène. Leur ensemble compose le système (1) dont les solutions jouissent des propriétés suivantes:

---

[1] A. Errera. *Du coloriage des cartes...* Paris, Gauthier-Villars; Bruxelles, Falk fils, 1921.

[2] O. Veblen. An application of modular equations in Analysis Situs. (*Annals of Mathematics*, Princeton, 1912, p. 86.)

Il existe $\alpha_2 - 1$ solutions linéairement indépendantes, α_2 étant le nombre des pays.

Le nombre total de solutions est $2^{\alpha_2 - 1}$.

A tout contour fermé constitué par des arêtes du réseau, correspond une solution du système (1). A toute solution du système (1) correspond un contour fermé ou un ensemble de contours fermés.

Les réseaux quadratiques correspondent aux solutions qui renferment α_0 valeurs différentes de zéro.

Le nombre des réductions du réseau cubique considéré est ainsi égal à celui des solutions du système (1) qui ont α_0 valeurs différentes de zéro. Le nombre total des solutions du système (1) étant fini, on a la possibilité d'obtenir toutes ces réductions.

En vue de la coloration de la carte à l'aide de quatre couleurs, on peut classer les réseaux quadratiques obtenus plus haut en trois types suivant qu'ils comprennent:

a) Un contour fermé unique. — *b*) Deux ou plusieurs contours fermés, chacun d'eux renfermant un nombre pair d'arêtes. — *c*) Deux ou plusieurs contours fermés parmi lesquels il en est qui renferment un nombre impair d'arêtes.

L'on a enfin les propositions:

L'existence d'un seul réseau des types a *ou* b *suffit à assurer la coloration de la carte avec quatre couleurs.*

Dans tout réseau cubique tracé sur une sphère il existe un réseau quadratique du type a.

7. — Prof. Rolin Wavre (Genève). — *Un problème d'itération.* — I. Soient $\psi_p(z_1, \dots z_n)$, n fonctions entières ou rationnelles des n variables complexes $z_p = x_p + iy_p$ $(p = 1, \dots, n)$. Les relations

$$z_p^{(1)} = \psi_p(z_1, \dots, z_n)$$

définissent une substitution, que nous désignerons par Ψ, du point $P^{(1)}(z_1^{(1)}, \dots, z_n^{(1)})$ au point $P(z_1, \dots, z_n)$ de l'espace E à $2n$ dimensions $(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n)$.

Soient $\Psi^{(2)}$, $\Psi^{(3)}$, ... les itérées de la substitution Ψ. Choisissons un domaine D_0 de E constitué par l'intérieur de n courbes analytiques fermées simples $C_1, \dots C_n$ situées dans les plans des variables $z_1, \dots z_n$ respectivement, tels que Ψ soit continue[1] à l'intérieur de D_0 et sur sa frontière. Appelons D_1 le premier itéré du domaine D_0 et supposons

[1] Point de continuité — point régulier.
» infini — » singulier non essentiel de première espece.
» d'indétermination — » » » » de seconde espèce.

que D_1 appartienne ainsi que sa frontière F_1 au domaine D_0, ce que nous désignerons par l'inégalité

$$D_0 > D_1 + F_1 . \qquad (1)$$

Formons également l'itéré D_m de D_0 par la substitution $\Psi^{(m)}$ et cela pour toutes les valeurs de m. Les substitutions $\Psi^{(m)}$ sont continues dans D_0.

On a évidemment

$$D_0 > D_1 > D_2 > \dots .$$

a) Lorsque m augmente indéfiniment, D_m tend à se réduire à un point α de E, seul point double de la substitution intérieur à D_0. Le point α sera dit point double attractif de la substitution.

Nous pouvons toujours prendre le point α comme origine de l'espace E. Soit alors $a_p^{(1)} z_1 + \dots + a_p^{(n)} z_n$ la partie linéaire du développement de Ψ_p au voisinage de l'origine α. Supposons le déterminant des $a_p^{(q)}$ différent de zéro.

b) Les n racines $s_1, s_2, \dots s_n$ de l'équation

$$\Delta(s) = \begin{vmatrix} a_1^{(1)} - s & a_2^{(1)} & . & a_n^{(1)} \\ a_1^{(2)} & a_2^{(2)} - s & . & a_n^{(2)} \\ . & . & . & . \\ a_1^{(n)} & a_2^{(n)} & . & a_n^{(n)} - s \end{vmatrix} = 0$$

sont toutes en module inférieures à l'unité.

Inversément, si cette condition est vérifiée on peut trouver un domaine D_0 tel que $D_0 > D_1 + F_1$.

Formons l'ensemble D_{-m} des points P_{-m} où la substitution $\Psi^{(m)}$ est continue et dont l'itéré $P_0 = \Psi^{(m)}(P_{-m})$ appartient à D_0 et cela pour toutes les valeurs de m. Soit F_{-m} la frontière de D_{-m}.

Si la relation (1) est vérifiée on a $D_0 < D_{-1} < D_{-2} < \dots$. Soit D l'ensemble de tous les points qui appartiennent à l'un des D_{-m} et F sa frontière. La substitution Ψ peut admettre des points d'indétermination dans le domaine D. Nous dirons tout de même que D est un domaine complètement invariant par la substitution et son inverse.

c) Tout point p de F est point limite d'une suite $p_1, p_2, \dots$ de points distincts appartenant respectivement aux frontières $F_{-1}, F_{-2}, \dots$; la substitution $\Psi^{(m)}$ étant continue en p_m. C'est la présence des points d'indétermination des substitutions $\Psi^{(m)}$ qui exige un peu de réflexion pour établir cette proposition. Cette indétermination ne se présente pas dans le cas d'une seule variable.

Soit D_α l'ensemble des points de D qui peuvent être reliés à α par un arc de Jordan dont tous les points appartiennent à D. Soit F_α sa frontière. F_α appartient à F. D_α sera appellé domaine immédiat du point α. F et F_α sont deux ensembles parfaits.

II. Considérons l'équation fonctionnelle de Schröder

$$s\varphi[P] = \varphi[\Psi(P)] .$$

Il résulte des recherches de M. Leau, que cette équation est résoluble par des fonctions φ_p holomorphes au voisinage du point α pour les racines s_p respectivement, que nous supposerons ici toutes distinctes, et telles que la racine carrée du plus petit de leur module soit supérieure au plus grand.

Par une substitution linéaire, Poincaré a montré que l'on peut ramener la substitution Ψ à la forme canonique

$$z_p^{(1)} = s_p z_p + f_p(z_1, \ldots, z_n) \quad (p = 1, \ldots, n) , \tag{2}$$

les f_p, évidemment entières ou rationnelles, étant nulles ainsi que leurs dérivées premières à l'origine.

Désignons par $z_p^{(1)}$, $z_p^{(2)}$, ... les itérés successifs du point z_p.

Les expressions

$$\frac{z_p^{(n)}}{s_p^n} \quad (p = 1, \ldots, n)$$

tendent respectivement vers les n fonctions $\varphi_p(z_1, \ldots, z_n)$ lorsque n augmente indéfiniment.

Donnons un développement de φ_p valable dans tout le domaine D.

d) *Avec la forme canonique* (2) *les fonctions* φ_p *peuvent être mises sous la forme suivante :*

$$\varphi_p(z_1, \ldots, z_n) = z_p + \sum_{q=0}^{\infty} \frac{f_p\left(z_1^{(q)}, \ldots, z_n^{(q)}\right)}{s_p^{q+1}} , \quad (p = 1, \ldots, n) . \tag{2}$$

ce développement étant absolument et uniformément convergent dans tout domaine fermé et borné appartenant à D.

En un point de D, un nombre fini de termes peuvent être infinis ou indéterminés, mais alors leur somme est holomorphe au voisinage de ce point. *Les fonctions* φ_p *sont donc holomorphes dans D.*

Pour chaque fonction φ_p, il est possible de définir un domaine d_0, satisfaisant à la condition (1), donnant évidemment naissance au même domaine D et sur la frontière duquel on ait, r étant un nombre positif,

$$|\varphi_p| > r .$$

Supposons donc que le domaine D_0 lui-même donne lieu à cette inégalité. On voit aisément que si le point P est un point de continuité de $\Psi^{(m)}$ situé sur F_{-m}, le point $\Psi^{(m)}(P)$ est sur F_0. L'équation de Schröder donne

$$\varphi(P) = \frac{1}{s^m}\varphi\left[\Psi^{(m)}(P)\right]$$

et par suite on a

$$|\varphi_p(P)| > \frac{r}{s_p^m} \qquad |s_p| < 1$$

en tout point de continuité de $\Psi^{(m)}$ situé sur F_{-m}.

e) Ceci montre, en vertu de la proposition *c*, que chaque point de F est point limite d'une suite de point de D sur lesquels le module des fonctions φ_p croit au dela de toute limite.

L'ensemble F est donc singulier pour les fonctions φ_p. Le domaine D pourrait se composer de plusieurs domaines disjoints et alors le développement (2) définirait une fonction holomorphe dans chacun d'eux, sans qu'il soit possible de passer de l'un à l'autre par prolongement analytique au sens de Weierstrass. Le domaine D_α est donc le domaine de Weierstrass au voisinage du point α.

Une démonstration légèrement différente montrerait qu'il en est de même pour toute solution holomorphe au voisinage de l'origine de l'équation de Schröder sans aucune restriction concernant les racines s_p.

Nous obtenons donc le résultat suivant:

Le domaine de Weierstrass des solutions holomorphes au voisinage d'un point double attractif, des solutions de l'équation de Schröder pour une substitution à un nombre quelconque de variables, est le domaine immédiat de ce point.

Dans le cas d'une seule variable, M. Fatou a démontré cette proposition ainsi que d'autres beaucoup plus précises sur la nature des fonctions φ et de l'ensemble F_α.

8. — Prof. F. Gonseth (Berne). — *Sur la représentation de Laguerre des imaginaires de l'espace.* — 1. Par la combinaison de la représentation de Laguerre du point imaginaire de l'espace et d'une seconde représentation (que Study nomme dans le plan « das zweite Bildpaar ») on arrive à traiter avec simplicité les problèmes descriptifs de l'espace où entrent des éléments imaginaires. Par exemple la *congruence linéaire elliptique* s'obtient comme suit: *De chaque point* M *du plan médian de deux droites dirigées on abaisse la perpendiculaire sur ces droites. La normale en* M *sur le plan de ces deux perpendiculaires décrit la congruence.*

2. La symétrie de Schwarz-Laguerre par rapport à une courbe plane analytique peut être étendue dans l'espace de la façon sui-

vante: Soit Φ une surface analytique, réelle ou imaginaire et P un point réel. Le cône isotrope de P coupe Φ en une courbe γ, et la développable isotrope circonscrite à γ contient en outre du point P une courbe réelle c. La correspondance de contact $P \rightarrow c$ peut être à certains points de vue (conservation de certains angles) envisagée comme une extension de la symétrie susmentionnée.

Si en particulier Φ est une sphère imaginaire, c est un cercle, qui pour une sphère réelle se réduit au conjugué de P.

9. — Dr E. ANLIKER (Berne). — *Sur la génération cinématique des astroïdes.* — Examinons le système cinématique dans lequel *l'ellipse* de demi-axes $2a$ et a roule sans glisser sur une *rosace* à quatre branches de paramètre $2a$ à condition que le petit-axe de l'ellipse passe constamment par le nœud de la rosace.

Nous aurons entre autres les courbes suivantes: Toute droite du plan mobile parallèle au petit-axe de l'ellipse enveloppe une *circonférence.* Toute autre droite formant un angle ω avec le petit-axe engendre une *astroïde,* dont la position des axes de symétrie et les dimensions dépendent de ω. Par exemple: Toute droite par le centre de l'ellipse enveloppe une *astroïde régulière*; toute droite par un sommet du petit-axe une *demi-croix de Malte,* etc.

Tout point du petit-axe ou de son prolongement décrit *la podaire* de la *développante d'astroïde* enveloppée par la perpendiculaire en ce point sur le petit axe. Le centre de l'ellipse par exemple engendre une *rosace* à quatre branches régulières. Les extrémités du petit-axe décrivent des *Ovales de Münger,* etc. Tout autre point décrit une *conchoïde oblique* ou une *orthoconchoïde* de la trajectoire du centre de l'ellipse. En particulier les milieux des demi-axes principaux fournissent des *cornoïdes.*

10. — Dr Paul THALMANN (Berne). — *Sur une nouvelle représentation des fonctions de variables complexes.* — La représentation ordinaire d'un point imaginaire a l'inconvénient qu'un point réel d'une courbe est présenté par deux points différents, c'est-à-dire par un point sur l'axe des x et un point sur l'axe des y; de plus ce couple n'est pas indépendant du choix du système des coordonnées. LAGUERRE et plus tard STUDY ont introduit un autre couple de points n'ayant plus ces désavantages. Je veux montrer, qu'on peut encore choisir de manière simple un autre mode de représentation. (Voir *Jahrbuch der philosoph. Fakultät* II der Universität Bern, Bd. III 1923: Paul THALMANN: *Ueber eine neue graphische Darstellung der komplexen Zahlen.* Dissertation, p. 34-42).

Soient

$$x^* = x + i\xi \qquad y^* = y + i\eta \,.$$

Construisons d'abord $A(x, y)$; puis déplaçons le système des coor-

données jusqu'en A et construisons dans ce nouveau système le point B(ξ, η). Nous choisissons A et B comme couple représentatif. B a les coordonnées $u = x + \xi$, $v = y + \eta$ relativement au système primitif. Si nous examinons la transformation A→B, nous obtenons le résultat suivant: chaque surface couverte en B(u, v) est le double de la surface au point A (x, y). De plus la correspondance A→C conserve les aires, avec C(ξ, η).

On peut, en particulier, à l'aide de cette représentation donner un sens géométrique simple au problème consistant à chercher les points d'intersection d'une droite d (réelle) et d'une conique — une ellipse par exemple — lorsque ces points sont imaginaires.

Les deux couples représentatifs ont le même point A: l'intersection de d avec le diamètre conjugué à la direction de d. Les points B et B′ sont sur d, de part et d'autre de d. Ils sont les points d'intersection toujours réels de d avec une conique semblable à la donnée, de centre A et d'ailleurs très facile à déterminer.

Si d se meut parallèlement à elle-même, B et B' sont sur une hyperbole, complémentaire de l'ellipse, déjà introduite par Poncelet. Le système de ces hyperboles peut être considéré comme un prolongement analytique de l'ellipse.

Les autres coniques fournissent des résultats analogues.

Il pourrait être intéressant d'étudier, à ce point de vue, quelques courbes d'ordre supérieur.

11. — Dr Willy Scherrer (Zurich). — *Un théorème sur les réseaux et sur les volumes.* — Il s'agit d'un théorème de la géométrie des nombres, auquel on peut donner l'énoncé suivant : Dans un réseau de côté unité, un domaine D de volume unité contient au moins deux points que joint un vecteur du réseau.

La démonstration est basée sur le lemme suivant: Etant donnés $Z > \mu^n$ points répartis d'une façon arbitraire dans un réseau à n dimensions, où μ est un nombre naturel, il y a au moins deux points réunis par un vecteur du réseau de côté μ.

Considérons les vecteurs ayant leurs origine en un point quelconque du réseau et se terminant aux Z points en question. Parmi ces vecteurs il y en a au moins deux *ayant* les mêmes restes pour le module μ et notre lemme se trouve démontré.

Divisons maintenant les côtés du réseau unité primitif par le nombre naturel N et construisons le réseau correspondant à ces divisions.

Parmi les points de ce réseau il y en a Z qui tombent dans le domaine D. Le volume de D peut être défini par l'expression:

$$\lim_{N=\infty} \frac{Z}{N^n} = 1 \ .$$

Appliquons maintenant le lemme précédent aux Z points du nouveau réseau et prenons $\mu = \left[\sqrt[n]{Z}\right]$. Rapportons tout aux unités primitives et faisons le passage à la limite: $N = \infty$, nous obtenons notre théorème.

Ce théorème fournit une base simple pour différents théorèmes de la géométrie des nombres. Il en est ainsi du théorème de Minkowski sur les corps convexes centrés, de même de l'inégalité de Tchebychew-Minkowski concernant les formes quadratiques décomposables. Enfin notre théorème donne sous une forme géométrique certains résultats concernant les systèmes d'équations linéaires de Diophante.

12. — Prof. G. Juvet (Neuchâtel). — *Equations aux dérivées fonctionnelles partielles.* — Ces recherches font partie d'un travail qui sera publié plus tard.

Société suisse des Professeurs de Mathématiques.

La Société suisse des professeurs de mathématiques a tenu sa réunion annuelle à Zoug, le 8 octobre 1922, sous la présidence de M. le Dr H. Schuepp, professeur à l'Ecole cantonale de Zurich. En ouvrant la séance, le président a rappelé le décès des Professeurs Cailler (Genève), Gubler (Zurich), Meier (St-Gall), et H. Suter (Zurich), puis il a rendu compte des démarches qui ont été faites auprès des autorités à la suite des propositions et vœux émis par la Société en 1921 au sujet des programmes des examens fédéraux de maturité.

Les éléments à l'infini dans l'enseignement de la Géométrie. — M. le Prof. Grossmann (Zurich) a d'abord rappelé l'importance et la portée des éléments à l'infini en géométrie, puis M. le Prof. Mettler (Zurich) s'est placé au point de vue de l'enseignement dans les écoles moyennes. A quel moment et dans quelle mesure ces notions peuvent-elles être introduites dans l'enseignement géométrique ? Il estime que pour le début, il faut rester au point de vue des anciens: deux droites parallèles ne se rencontrent pas. L'introduction des locutions nouvelles, point, droite et plan de l'infini, ne doit se faire que plus tard à l'aide d'exemples bien choisis, au moment où l'on aborde les notions de géométrie moderne.

Plans d'études.— Dans une seconde séance MM. Amberg (Zurich) et Flatt (Bâle) rapportent sur le projet de maturité et les plans d'études mathématiques dans l'enseignement moyen. M. Amberg se place au point de vue du gymnase, tandis que M. Flatt insiste plus particulièrement sur les besoins des écoles réales et des sections scientifiques. Après discussion, l'assemblée décide de confier à une commission spéciale l'élaboration d'un projet de plans d'études pour les branches mathématiques dans les différentes sections de l'enseigne-

ment moyen. Cette commission est composée du Comité (MM. Schuepp, Zurich; Mercier, Genève; Vaterlaus, Zurich; Stohler, Bâle; Flukiger, Berne); des deux rapporteurs, MM. Amberg et Flatt, et de M. Huber, recteur du Gymnase d'Altorf.

Nouvelles diverses. — Nominations et distinctions.

Allemagne. — Le *Prix Ackermann-Teubner* pour 1922 a été accordé à P. M. Koebe, Professeur à l'Université de Iéna, pour ses Mémoires sur l'uniformisation des courbes algébriques parus dans les « Mathematische Annalen » (Tome LXVII, 1909; LXIX, 1910 et LXXII, 1912).

Belgique. — *Académie Royale de Belgique : Classe des Sciences.* — Le programme du *concours annuel pour* 1924 comprend les questions suivantes pour les sciences mathématiques et physiques:

1. On demande une contribution importante à la géométrie infinitésimale des surfaces courbes.

2. On demande une contribution nouvelle à nos connaissances sur l'absorption de la lumière dans l'espace interstellaire.

Pour chacune de ces questions, le prix peut être de 1500 fr. Délai 1er août 1924.

Italie. — Sous le titre *Unione matematica italiana* il vient d'être constitué une société groupant les mathématiciens italiens et destinée en même temps à assurer leur contact avec l'Union internationale Mathématique fondée à Strasbourg en 1920. Le Comité provisoire est dirigé par MM. S. Pincherle, président et E. Bortolotti, secrétaire. Il publiera un bulletin dont l'administration a été confiée à l'éditeur bien connu N. Zanichelli, à Bologne. Le *Bollottino della Unione Matematica Italiana*, dont le premier fascicule porte la date d'octobre 1922, comprendra les rubriques suivantes: Sezione prima: Piccole Note. — Sezione seconda: A. Sunto di lavori pubblicati dai periodici italiani. — B. Sunto di lavori pubblicati dai periodici esteri. — C. Corrispondenza matematica. — D. Notizie. — E. Recenzioni di opere.

Universités. — Ont été transférés: M. G. Armellini de Pise (mécanique supérieure) à Rome (astronomie); M. A. Comessati, de Cagliari (géométrie analytique) à Padoue(géométrie descriptive); M. E. Laura, de Pavie (Mécanique rationnelle) à Padoue (même chaire); M. A. Palatini, de Messine (méc. rat.) à Naples (phys. math.).

Ont été nommés professeurs extraordinaires: M. E. Bompiani, pour la géométrie analytique à l'Institut Technique Supérieur de Milan; M. C. Rosati, pour la géométrie projective et descriptive à l'Université de Pise; M. G. Sannia, pour la géométrie analytique et M. G. Vitali, pour l'Analyse infinitésimale à l'Université de Modène.

Nécrologie.

Albert Kundig. — C'est avec un profond chagrin que nous faisons part à nos lecteurs du décès de M. Albert Kundig, maître-imprimeur, emporté subitement par une embolie le 1er mars 1923 à l'âge de 53 ans. Sa mort prématurée est une perte douloureuse pour l'imprimerie suisse en général.

Fondée en 1832 par Elie Carey, la maison d'imprimerie resta dans cette famille jusqu'en 1892, date à laquelle elle fut reprise par MM. W. et A. Kundig, père et fils. Depuis la mort de son père, survenue en 1908, M. Albert Kundig dirigea seul son imprimerie qui maintenant va être continuée par ses fils.

Les remarquables publications que la Science doit aux soins de la Maison Kundig lui ont acquis dans le monde savant un renom justement mérité. M. Albert Kundig se consacra plus spécialement à l'impression de travaux scientifiques et d'ouvrages de luxe. Il vouait un soin tout spécial aux publications périodiques. Grâce à son bienveillant appui, beaucoup d'entre elles purent continuer à paraître dans les circonstances difficiles dues à la guerre mondiale.

L'Enseignement Mathématique fut imprimé dans ses ateliers depuis 1904. Pendant près de 20 ans, nous avons largement bénéficié de sa précieuse collaboration. Nous garderons d'Albert Kundig un souvenir reconnaissant et nous réitérons ici à la famille l'expression respectueuse de nos sentiments de regrets qui, nous en sommes certains, seront partagés par tous les lecteurs de la Revue.

Au nom de la Rédaction
H. Fehr.

BIBLIOGRAPHIE

Index Generalis 1922-1923. Annuaire général des Universités, The Yearbook of the Universities, publié sous la direction de R. de Montessus de Ballore, docteur ès sciences et lauréat de l'Institut. Ouvrage honoré d'une souscription du Ministère de l'Instruction publique. — Un volume in-16 double-couronne de 2111 pages : broché, 50 fr. ; relié, 55 fr. ; Gauthier-Villars et Cie. Paris.

L'*Index Generalis*, qui paraît annuellement, indique l'organisation des Universités et des Ecoles Supérieures du monde entier avec les noms des Professeurs et l'indication des cours professés. Plus de 900 pages sont consacrées à ce Chapitre. Les Chapitres concernant les Universités et les

Grandes Ecoles, les Archives, les Bibliothèques, Instituts scientifiques, Jardins botaniques et zoologiques, Musées, Observatoires, Académies et Sociétés savantes, ont été considérablement augmentés dans cette nouvelle Edition.

Pour les Sociétés savantes, on trouve: l'objet et le but de la Société, le nombre de ses membres, l'année de sa fondation, les noms du Président et des Secrétaires, le montant de la cotisation ; les lieux, dates et heures des réunions privées et publiques ; enfin des indications *très détaillées* sur les *Publications* de la Société.

Une Table alphabétique de plus de 40.000 noms, permet de « situer » immédiatement les Universitaires ou Savants dont on cherche les titres et les fonctions.

L'*Index Generalis* est donc un instrument de travail et de recherches indispensable aux savants, professeurs ou non, aux étudiants de tous les pays et à tous ceux qui exercent des industries et commerces relatifs à l'activité intellectuelle mondiale.

Robert d'Adhémar. — **Statique, Cinématique.** (Eléments de Mécanique à l'usage des Ingénieurs). — Un vol. gr. in-8° de XII–254 pages et 153 figures ; 16 fr. ; Gauthier-Villars et C°, Paris, 1923.

Ce livre reproduit, tel qu'il a été enseigné, le cours professé par l'auteur à l'Institut industriel du Nord de la France ; il contient des éléments de Cinématique et de Dynamique et un développement élémentaire de la Statique. Il s'adresse à de jeunes élèves, élèves qu'on peut supposer inexpérimentés, et dans ces conditions, on ne doit point s'attendre à une analyse signalant des choses bien originales. On s'aperçoit cependant très vite qu'on a à faire avec un auteur savant et, s'il y a une chose qui frappe particulièrement dans l'œuvre, c'est la discussion des principes. Tout examen philosophique était ici hors de propos et cependant l'exposé ne pouvait être celui d'un Béotien. M. d'Adhémar s'est tiré de ce pas d'une façon particulièrement fine ; il a laissé pressentir les difficultés en indiquant soigneusement le moyen de ne point s'en embarrasser. Il a été élégant en Cinématique et profond en Statique en insistant sur l'équilibre des systèmes pesants, équilibre qui, en pratique, correspond toujours aux positions les plus basses du centre de gravité.

Par endroits transparaissent les idées de Duhem, celles de MM. Emile Picard et Léon Lecornu. L'analyse mathématique nécessaire est préparée par une courte introduction. Beaucoup de figures et de graphiques, des calculs courts et significatifs, de nombreuses courbes étudiées et à étudier ; tel est, en quelques mots, le bilan d'un livre qui formera, tout au moins, des techniciens avertis. A. Buhl (Toulouse).

H. Andoyer. — **Cours de Mécanique céleste**, Tome I. — 1 vol. in-8° de 440 p. ; 50 fr.; Gauthier-Villars et Cie, Paris, 1923.

Après le Traité de Tisserand et les profondes recherches de Poincaré sur la Mécanique Céleste, il y avait place encore pour un Ouvrage dérivant d'une conception différente, et qu'attendaient les astronomes praticiens. C'est un tel Ouvrage que donne aujourd'hui M. Andoyer, membre de l'Institut.

Dans le Livre qu'il fait paraître à la librairie Gauthier-Villars, on trou-

vera d'abord sous une forme très personnelle, un exposé systématique des méthodes de la mécanique céleste classique, avec de nombreuses additions propres à l'auteur ; mais on distinguera surtout le souci constant qu'il a pris de n'exposer aucune théorie, aucune méthode, sans l'éclairer immédiatement par une application numérique à un cas concret. Ne perdant jamais de vue la véritable fin de la mécanique céleste, M. Andoyer s'est attaché à fixer rigoureusement le choix des formules, la suite et l'ordonnance des calculs, en vue d'une approximation déterminée, mettant à la disposition du calculateur, dans le corps même de l'Ouvrage, les tables auxiliaires indispensables.

Le volume actuel contient d'abord un rappel des théories générales ; puis une étude complète du mouvement keplérien, comprenant le problème de la détermination des orbites et le calcul numérique des perturbations ; enfin, le développement analytique de la fonction perturbatrice.

Un second Volume doit compléter l'Ouvrage ; outre la fin de la théorie des planètes, il contiendra la théorie de la Lune, celle du mouvement de rotation de la Terre et de la Lune sur elles-mêmes et celle des anciens satellites de Jupiter.

H. Andoyer. — **Cours d'astronomie**, Première partie : *Astronomie Théorique* (Faculté des Sciences de Paris). — 1 vol. in-8° de 455 p. ; 35 fr. ; Librairie Scientifique J. Hermann, Paris, 1923.

Cette nouvelle édition du Cours d'Astronomie que M. Andoyer professe à la Sorbonne a été entièrement refondue. L'auteur a non seulement apporté de nombreux perfectionnements de détail, suggérés par l'expérience de l'enseignement, mais il a en outre complètement modifié l'exposition de la théorie de la précession, comme aussi celle de la théorie générale des éclipses. Le problème de la détermination d'une orbite keplerienne par trois observations rapprochées, qui figurait dans le second volume, se trouve présentée ici avec une solution toute nouvelle. Le volume se termine par une intéressante Note sur le Calendrier.

H. Andoyer. — **Tables logarithmiques à treize décimales**. — 1 vol. in-4° de 25 p. ; 8 fr. ; Librairie Scientifique, J. Hermann, Paris, 1922.

Ces Tables sont appelées à rendre de grands services aux calculateurs. Il est assez souvent nécessaire d'obtenir dans un calcul logarithmique une exactitude supérieure à celle que peuvent donner les tables usuelles à sept ou même huit décimales. S'il s'agit de lignes trigonométriques, les *Nouvelles Tables trigonométriques* (logarithmes), publiées par M. Andoyer en 1911 permettent d'aller sans trop de peine jusqu'à la précision de quatorze décimales. Pour le calcul des logarithmes des nombres et la résolution du problème inverse, on dispose bien du *Thesaurus* de Véga, qui ne donne que dix décimales, mais il est devenu très rare.

La Table I donne les logarithmes à treize décimales des nombres n de trois chiffres, depuis 100 jusqu'à 1000 ; la Table II ceux des nombres depuis 100.000 jusqu'à 101.000 ; la Table II*bis* la correction positive pour la différence seconde. La Table III contient les nombres qui correspondent aux logarithmes depuis 00000 jusqu'à 00432 avec treize chiffres ; la Table III*bis*, la correction négative pour la différence seconde. H. F.

I. Barrow. — **Geometrical Lectures**, translated, with Notes and Proofs and a Discussion on the Advance made therein on the Work of his Predecessors in the infinitesimal calculus, by J. M. Child. (The Open Court Series of Classics of Science and Philosophy, Nro. 3). — 1 vol. in-8° de 218 p., 4 s. 6 d. net. Open Court Company, 149, Strand, Londres, W. C. 2.

Cet ouvrage apporte une contribution très importante à l'Histoire des origines du Calcul infinitésimal. Dans une série d'intéressantes Notes qui accompagnent ces *Geometrical Lectures* de Barrow (1630-1677), M. Child montre le rôle prépondérant que joue la méthode géométrique du savant géomètre dans l'invention et le développement ultérieur du Calcul infinitésimal.

Tous ceux qui s'intéressent à l'Histoire des mathématiques tiendront à lire ce petit volume. H. F.

Emile Borel. — **Méthodes et Problèmes de la Théorie des Fonctions.** — 1 vol. gr. in-8° de XII-148 pages; 12 fr.; Gauthier-Villars et Cie, Paris, 1922.

Ce nouvel ouvrage fait partie de la Collection de Monographies où M. Borel et d'éminents collaborateurs ont déjà publié tant de belles choses sur la Théorie des Fonctions. Il est surtout constitué par des Mémoires et des Notes de l'auteur qu'il est de la plus grande utilité d'avoir sous la main, en un seul livre, mais qui, de plus, ont été liées par de curieux rapprochements philosophiques. M. Borel voit maintenant le monde fonctionnel à l'image du monde vivant. La Théorie des ensembles forme une sorte de terrain vital où se développent des êtres normaux ou monstrueux sans préjudice d'êtres non existants mais possibles.

Dans un premier Chapitre, consacré aux domaines et aux ensembles, nous retrouvons d'abord, dans un cas simple, les fonctions discontinues de M. Baire considérées comme limites de fonctions continues, les fonctions bornées définissables analytiquement et leur représentation par des polynomes, les ensembles de mesure nulle dans leurs rapports avec les fonctions monogènes, le rôle assez souvent illusoire du transfini et l'étude de nombreux cas où l'on peut se passer de cette notion, le rôle également illusoire de séries dont la convergence bien qu'existante est insuffisamment définie. De nombreuses pages sont consacrées aux ensembles de mesure nulle et à leur classification; ces ensembles sont, en effet, d'une importance capitale pour la théorie des fonctions en ce qu'elle a de plus pratique; c'est avec les ensembles de singularités de mesure non nulle que naissait plus particulièrement les monstres.

Le Chapitre II traite des opérations et des développements en séries. Nous y trouvons d'abord la notion de *déplacement* pour les termes d'une série semi-convergente, notion qui permet d'énoncer d'élégants théorèmes sur les changements dans l'ordre des termes qui n'altèrent pas la valeur de la série. Pour les fonctions de deux variables réelles, le désir de construire un développement indéfiniment dérivable, et représentant de ce fait toutes les dérivées partielles de la fonction, conduit à une série qui, par sa forme, tient à la fois de la série entière et de la série trigonométrique; ce résultat généralise celui donné, par M. Borel, dans sa thèse, pour les fonctions d'une seule variable.

Nous retrouvons encore ici des pages célèbres sur les définitions cons-

tructives. Il y a une très grande différence entre un être *déterminé* et un être *défini*; une véritable définition est restrictive en ce sens qu'elle suppose un nombre fini de mots mais on ne peut espérer faire un véritable objet de science des êtres échappant à une telle restriction.

Le Chapitre III nous rappelle la Théorie de la croissance et le rôle des constantes arbitraires. Ce titre conduit à des considérations fort diverses: structure des nombres irrationnels, fonctions entières et croissance du type exponentiel, analyticité des données dans une équation aux dérivées partielles et non analyticité d'une solution construite d'ailleurs à l'aide de la série entière et trigonométrique du chapitre précédent. Enfin voici de curieux procédés d'approximation par nombres rationnels et, plus particulièrement, par nombres quadratiques; d'où des quadratures très approchées du cercle.

Le Chapitre IV nous ramène aux fonctions de variable complexe générales et particulières. L'interpolation est rapprochée de la théorie des zéros des fonctions entières et les singularités d'une fonction définie par un développement taylorien ont leur étude ramenée à celle du point essentiel à l'infini d'une fonction entière. Viennent ensuite les séries entières à termes manquants qui admettent leur cercle de convergence comme coupure et l'étude asymptotique des fonctions méromorphes qui illustra le nom de Pierre Boutroux si prématurément disparu. Il s'agit surtout, quant à cette dernière étude, de la croissance de la dérivée logarithmique d'une fonction entière sur des droites issues de l'origine. Les transcendantes entières satisfaisant aux équations différentielles de M. Painlevé et l'indétermination au voisinage d'un point essentiel sont l'objet de remarques terminant le volume aussi simplement et aussi élégamment qu'il a été commencé et continué. N'oublions pas une conclusion philosophique, aussi brève qu'intéressante, qui, naturellement, réclame des jeunes géomètres des efforts aussi honorables que difficiles mais auxquels l'intérêt des exposés précédents semble promettre un aboutissement de grande utilité et de haute esthétique.

A. Buhl (Toulouse).

M. Born. — **La théorie de la relativité d'Einstein et ses bases physiques.** — Exposé élémentaire. Trad. de l'allemand d'après la seconde édition par F. A. Finkelstein et J. G. Verdier. — 1 vol. in-8° de 339 pages avec 133 figures ; broché 25 fr. ; Gauthier-Villars et Cie, Paris.

Les difficultés apparentes de la Théorie de la Relativité sont pour la plupart du temps dues au fait que les auteurs qui en parlent ne mettent pas assez en évidence la base expérimentale sur laquelle elle repose. Et c'est ainsi que l'opinion erronée a pu se répandre, même parmi les esprits très cultivés, que la nouvelle Théorie est plutôt une spéculation mathématique qu'une théorie physique à proprement parler.

La lecture du Livre pénétrant et clair de M. Born rendra désormais impossible cette fausse interprétation. De l'étude magistrale, surtout des phénomènes optiques et électrodynamiques, faite dans les Chapitres IV et V, il ressort avec pleine évidence non seulement que le principe de relativité a une origine exclusivement expérimentale, mais qu'il a de plus exercé une influence des plus fécondes sur les recherches de laboratoire.

Emanant de toutes les branches de la Physique, la Théorie de la Rela-

tivité les fait apparaître sous un aspect nouveau, y introduisant une harmonie d'une singulière beauté. Elle projette finalement une vive lumière sur les problèmes cosmologiques.

M. Born s'est, en outre, donné comme tâche de démontrer que l'évolution des théories physiques et la critique épistémologique des notions fondamentales devaient fatalement conduire à la conception nouvelle qui marque une étape décisive dans l'histoire de la Science.

Par la façon approfondie dont les problèmes y sont discutés, sa forme élémentaire et les exemples concrets qu'il offre pour faciliter l'intelligence des points difficiles, ce Livre représente aujourd'hui le Traité le plus complet, le plus méthodique et le plus exact de la Théorie de la Relativité.

Pierre Boutroux. — **Les Mathématiques.** (Cosmos. Petite bibliothèque de Culture générale.) — Un vol. petit in-8° de 182 pages et 51 figures ; 5 fr. ; Albin Michel, Paris, 1922.

La présente analyse est doublement attristée. Elle ne signale plus qu'une œuvre posthume ; rendons hommage une dernière fois à Pierre Boutroux, le jeune et brillant géomètre prématurément disparu. De plus, il s'agit d'un petit ouvrage d'initiation à l'usage des esprits simplement philosophiques et ceci rappelle cette *Initiation mathématique*, jadis écrite par notre si regretté fondateur Charles-Ange Laisant, œuvre citée par P. Boutroux lui-même et qui continue à être très appréciée (Revoir l'analyse de D. Mirimanoff. *Ens. math.* 1906, p. 323).

Toutefois, les points de vue diffèrent en ce que Laisant attachait surtout du prix à la « récréation », tandis que Boutroux voit l'attrait dans la science elle-même, décrite telle qu'elle est, sous réserve qu'on ne présentera que les grandes lignes et les résultats essentiels dans leurs aspects intuitifs ou leurs harmonies qui, pour être parfois très modernes, n'en sont pas moins fort analogues à celles qui, autrefois, ravissaient Pythagore et ses contemporains.

C'est ainsi qu'en partant du nombre, nous terminons avec les fonctions elliptiques, modulaires et fuchsiennes dont les groupes de transformation sont, en effet, de la plus haute esthétique. Les équations différentielles permettent quelques réflexions mécaniques où voisinent les noms de Newton et d'Einstein. Bref, ouvrage descriptif, bien placé dans une bibliothèque de culture générale et où cependant les mathématiciens eux-mêmes pourront glaner de judicieuses suggestions. A. Buhl (Toulouse).

Léon Brunschwieg. — **L'expérience humaine et la causalité physique.** — 1 vol. in-8°, XVI+625 p.; 30 fr., Librairie Félix Alcan, Paris 1922.

Une revue de mathématique ne peut rester étrangère au mouvement d'idée qui côtoie son domaine propre, qu'il s'agisse de physique, de logique ou de philosophie scientifique. Si les mathématiciens ont quelques fois éprouvé une certaine indifférence à l'égard des spéculations philosophiques, c'est souvent avec raison semble-t-il; le propre de leur science est d'être autonome et de se développer d'elle même sans emprunter aucun secours des spéculations connexes. N'est-il pas téméraire de la part de certains philosophes de vouloir, au nom d'une philosophie, souvent trop conceptuelle et étroite, régenter les savants et les contraindre à se

mouvoir dans un monde dont une anticipation philosophique aurait tracé d'avance le plan et les bornes.

Les philosophes ont souvent essayé de placer une toiture trop rigide sur un édifice en pleine construction, sur un organisme en plein développement.

Si ce reproche peut être adressé à quelques uns d'entre eux, comme Auguste Comte, il ne peut certes pas être fait à M. Brunschwieg qui est à l'opposé du Comtisme.

L'auteur du remarquable ouvrage « Les étapes de la philosophie mathématique » a fourni, pour s'assimiler l'esprit des recherches modernes et contemporaines en mathématique, un effort qui fait l'admiration des spécialistes.

Déjà dans ses œuvres antérieures se dessinait son attitude d'épistémologiste. Avec lui, la philosophie mathématique se renverse sur elle-même pour aboutir à une analyse réflexive. Bien loin de vouloir maîtriser la science ou l'enfermer dans des cadres construits *à priori*, M. Brunschwieg la suit dans son développement historique et la compréhension si large de ce philosophe met en valeur précisément ce qui fait l'originalité et la puissance des sciences mathématico-physiques envisagées comme disciplines indépendantes.

Dans l'ouvrage qu'il livre au public aujourd'hui le problème de la causalité lui sert d'exemple pour définir sa position critique. Si l'on a pu concevoir la philosophie des sciences comme une synthèse, une généralisation des résultats scientifiquement obtenus ou encore comme une anticipation sur ces résultats, nous donnant sur l'objet de la connaissance des renseignements plus systématiques ou plus étendus que les sciences elles-mêmes sont susceptibles de nous les donner, là est le point de vue opposé à celui de M. Brunschwieg.

Au contraire, rejetant à la fois le réalisme empiriste et le réalisme logique, la science lui paraît n'avoir aucun objet, donné comme avant elle, dans l'absolu, et indépendant de la pensée scientifique; pas plus d'ailleurs qu'une spéculation logique ou transcendentale ne pourrait par elle-même étreindre le champ de la science.

Ni l'une, ni l'autre de ces deux attitudes extrêmes ne correspond à l'activité scientifique telle qu'elle se manifeste dans l'histoire, lorsqu'on l'étudie sans idée préconçue.

L'objet de la science est une élaboration de l'extérieur et de l'esprit, sans que l'un ou l'autre puisse se dégager à l'état pur. C'est au fond l'attitude de Kant, mais la lecture de ce livre montrera combien la critique y est plus large, plus compréhensive et plus soucieuse du développement historique que chez l'auteur de la critique de la raison pure.

Si dans l'esthétique transcendentale, Kant en se plaçant à un point de vue trop idéaliste avait par trop négligé l'apport à part l'exemple des objets symétriques de l'expérience, dans la génèse des notions d'espace et de temps, par contre, dans certaines pages de l'analytique transcendantale, la critique est plus large.

Le principe de causalité en fournit un exemple. Il n'est ni imposé par l'expérience comme les empiristes le pensaient, pas plus que par une forme abstraite de l'esprit.

Kant l'avait bien vu et c'est ici le nœud de la question. En le précisant nous ferons voir comment le problème de la causalité conduit M.

Brunschwieg à une critique kantienne convenablement élargie et adaptée au progrès des sciences.

Dans l'analytique transcendantale Kant montre que le principe de causalité ne peut être formulé que corrélativement à un principe de permanence, conservation de la substance ou de l'énergie, lequel a sa source dans l'esprit-même. Mais le principe de causalité n'est pas purement *a priori*. Il doit au travers de l'intuition pure du temps rejoindre l'expérience du concret laquelle apporte de son côté le principe de changement de succession et d'irrévérsibilité sans lequel il n'aurait aucun sens.

C'est cette continuelle influence de l'esprit sur la nature et de la nature sur l'esprit qui forme le développement de la pensée scientifique. Toute théorie scientifique nous dévoile la pensée aussi bien que la nature ou mieux elle nous dévoile une élaboration de l'une par l'autre.

C'est là, que M. Brunschwieg cherche l'inspiration d'un idéalisme relativiste qui apparaît comme un élargissement de la critique kantienne.

Cette attitude ne le conduit plus, à proprement parler à une philosophie scientifique, mais plutôt à une philosophie de la pensée, qu'il tente de rapprocher dans ses dernières pages de l'humanisme socratique.

Ce livre est plus que cela pour nous. Il contient quelques-unes des plus belles études que l'on ait faites sur l'histoire des mathématiques et de la physique en relation avec l'histoire de la philosophie. Mentionnons spécialement les chapitres consacrés à la relativité einsteinienne, dont M. Brunschwieg paraît avoir compris merveilleusement la portée et la signification philosophique.

Dans cette analyse reflexive de la pensée mathématique, qui n'est pas une simple histoire des sciences physico-mathématiques, faite d'un point de vue si large et si humain, sans aucune idée préconçue et indépendamment de toute conception philosophique arrêtée, les savants trouveront peut-être des idées suggestives conduisant à de nouveaux modes de rationnalité.

Rolin Wavre (Genève).

E. Cartan. — **Leçons sur les Invariants intégraux.** Cours professé à la Faculté des Sciences de Paris. — 1 vol. gr. in-8° de X-210 pages; 20 frs.; J. Hermann, Paris, 1922.

Ces leçons sont toutes imprégnées du beau talent que leur auteur a déjà mis au service des théories einsteiniennes et cependant elles n'ont pas été écrites spécialement dans ce but. Elles présentent les développements d'une analyse due originairement à Henri Poincaré et développée surtout par MM. E. Goursat, Th. de Donder et par M. Cartan lui-même.

L'ouvrage se compose de dix-neuf chapitres tous très bien délimités et donnant une impression de brièveté qui en rend l'assimilation facile mais que, faute de place, nous ne pouvons analyser successivement. Contentons nous des idées générales d'ailleurs faciles à discerner.

La première, très grandiose, consiste à associer étroitement les invariants intégraux de la Dynamique et le Principe d'Hamilton. Rappelons que ce Principe peut être le fondement de la Gravifique la plus générale.

Avec les trois chapitres suivants, nous étudions les invariants intégraux et les formes différentielles (isolées ou formant un système dit *système de Pfaff*) qui restent invariantes de par un système d'équations différentielles dit *système caractéristique*. Les intégrales d'un système tel que ce dernier

sont des fonctions qui restent constantes en vertu du système; on peut évidemment concevoir que non seulement des fonctions explicites mais aussi des expressions *différentielles* ou *intégrales* aient une propriété de constance tout à fait analogue; l'expression *intégrale* est un invariant intégral. Il y a là des résultats auxquels on doit être rapidement conduit rien qu'en cherchant à poursuivre l'étude des systèmes d'équations différentielles.

Mais où apparaît une note beaucoup plus curieuse c'est quand, avec le chapitre VI, on aborde les formes différentielles à multiplication extérieure dites, plus simplement, *formes extérieures*. Ce sont les formes différentielles qui apparaissent naturellement sous les intégrales multiples; elles ont des propriétés manifestement héritées des déterminants fonctionnels qui apparaissent, sous les mêmes intégrales, lors d'un changement de variables; ainsi la permutation de deux éléments différentiels successifs entraîne un changement de signe. Il y a là une des faces du calcul vectoriel considérée autrefois par Grassmann. Une forme extérieure admet généralement une forme *dérivée* et la forme primitive et sa dérivée figurent sous des intégrales égales mais d'ordres de multiplicités différant d'une unité, d'où les formules du type *stokien*. Une des variétés d'intégration est alors *déformable* avec invariance de l'intégrale y attachée. Au fond cette intégrale invariante équivaut à un invariant intégral parce qu'on peut toujours imaginer que la déformation susdite a lieu conformément à un système d'équations différentielles.

Il n'y a pas besoin d'aller plus loin pour apercevoir la magnifique et prodigieuse synthèse contenue dans ces théories. Au point de vue physique rappelons que les formules stokiennes peuvent conduire aux principales formules de la Gravifique et notamment aux équations de l'Electromagnétisme.

La notion de transformation infinitésimale d'un système d'équations différentielles retentit naturellement sur les invariants intégraux de ce système. Elle conduit aussi aux *équations aux variations* de Poincaré; les applications physiques ou mécaniques sont nombreuses. M. Cartan reprend, à ce propos, le problème des trois corps et en examine les intégrales de nature élémentaire, en les faisant dépendre de transformations infinitésimales simples admises par les équations du mouvement.

On aurait déjà pu dire qu'à une forme dérivée *nulle* correspondait une forme primitive *différentielle exacte*; cette remarque peut s'étendre aisément à des systèmes de formes et elle constitue alors le *Théorème de Frobenius*. Le théorème du *multiplicateur* nous ramène à l'analyse jacobienne; il remet au premier plan les équations *canoniques* (à multiplicateur égal à l'unité) et, avec celles-ci, il faut étudier les formes *bilinéaires* aux dérivées partielles qui en permutent les intégrales; c'est une idée analogue à celle de la forme linéaire qui peut permuter les intégrales d'un système différentiel ordinaire.

En ces points il semble que M. Cartan ait donné la mesure de vues personnelles des plus profondes. Après Poincaré il généralise les parenthèses de Poisson et s'efforce de tirer d'intégrales connues un parti beaucoup plus étendu que celui qui correspond à leur combinaison deux à deux.

Ici, il y aura probablement toujours une pierre d'achoppement. Des intégrales, combinées entre elles par les méthodes en litige, finissent toujours très rapidement par révéler un cycle d'intégrales qui ne font plus que se permuter, annihilant tout espoir d'apercevoir une intégrale nouvelle. Mais

il ne faut pas perdre de vue que l'existence et la structure de ces cycles jettent un jour tout spécial sur les équations différentielles de la Mécanique qu'on peut précisément se proposer d'étudier au point de vue de ces propriétés cycliques.

Soyons bref sur les questions, si importantes cependant, qui constituent le dernier tiers du volume. M. Cartan retrouve les méthodes d'intégration pour les équations aux dérivées partielles du premier ordre. Il étudie les équations différentielles admettant des transformations infinitésimales données. Il revient, dans un chapitre spécial, à la réduction des équations du problème des trois corps. Il examine les positions, souvent réciproques, de la théorie des invariants intégraux et du Calcul des Variations. Il termine par l'équation invariante de l'optique, par les trajectoires lumineuses considérées jusque dans le champ d'Einstein-Schwarzschild.

Que de choses entre ce dernier résultat et une théorie dont la première esquisse grandiose appartient à Henri Poincaré.

A. Buhl (Toulouse).

H. Galbrun. — **Introduction à la Théorie de la Relativité ;** Calcul différentiel absolu et Géométrie. — 1 vol. in-8, 459 pages; 60 fr. Gauthier-Villars & Cie, Paris, 1923.

Dans les 11 chapitres de ce livre, M. Galbrun expose les principes du calcul différentiel absolu, la théorie du déplacement parallèle, la Géométrie de M. Weyl et les applications de ces théories aux géométries euclidienne et non-euclidiennes à n dimensions, à l'étude des espaces de Galilée en mécanique rationnelle et en électromagnétisme, à la relativité restreinte, et à l'électrodynamique de Minkowski.

Le point de vue de l'Auteur est à la fois didactique et critique, et l'on ne saurait trop étudier les remarques judicieuses et fines que lui inspire cette seconde attitude quant aux interprétations que nombre de commentateurs d'Einstein ont données de la relativité restreinte. On pourrait parfois regretter que l'exposé didactique soit un peu touffu, et nous n'avons pas les mêmes préventions que l'Auteur contre la suppression du signe Σ. Il est à souhaiter que cet ouvrage soit suivi d'un autre livre consacré à la relativité généralisée et rédigé avec le même soin critique.

G. Juvet (Neuchâtel).

F. Klein. — **Gesammelte mathematische Abhandlungen** herausgegeben von R. Fricke and A. Ostrowski (von F. Klein mit ergänzenden Zusätzen versehen). Erster Band: Liniengeometrie, Grundlegung der Geometrie, Zum Erlanger Programm. — 1 vol. in-8°, 612 p. avec un portrait; Verlag Julius Springer, Berlin.

La publication des œuvres de M. Felix Klein, dont ce volume constitue la première partie, présente un intérêt tout à fait spécial. C'est l'autobiographie du maître. Le vénérable mathématicien retrace, dans une série d'articles intercalés entre les mémoires du recueil, le développement de ses idées, les milieux et les personnes dont l'influence s'est fait sentir sur ses idées, et parfois les recherches récentes d'autres mathématiciens qui jettent de la lumière sur ce qui était alors prématuré ou peu précis. Avec une vue d'ensemble il nous fait entrevoir l'influence qu'il a eu lui-même, et le rôle joué actuellement dans la science par les idées qu'il représente.

Les innovations des grands savants sont pour la plupart les expressions de l'état d'esprit de leur temps. Ces penseurs trouvent dans l'âge qui les précède la source de leurs idées, et ils anticipent les points de vue de l'âge qui leur succède. Pour ce qui est des idées fondamentales résumées par Klein dans son *Programme d'Erlangen*, le monde mathématique était déjà prêt pour en saisir la portée ; toutefois les étudiants d'aujourd'hui n'en ont pas épuisé toute la fécondité. L'idée directrice est celle de l'invariance par rapport à un groupe. La Géométrie était tombée dans un nombre toujours croissant de disciplines séparées. Klein montra qu'il s'agit bien d'un tout bien structuré ; chacune des disciplines étant individualisée par un groupe d'opérations, dont l'application ne change pas certaines propriétés des figures.

Il faut donc clairement préciser ces deux notions : 1° *l'ensemble des figures envisagés pour l'instant* ; 2° *le groupe des opérations considéré.*

Les liens des différentes espèces de Géométrie apparaissent clairement lorsqu'on contemple ces notions.

L'édifice de la Géométrie doit son charme en partie à un artifice comparable à celui qui contribue à la beauté architecturale de nos cathédrales, à savoir le contraste entre la symétrie de l'ensemble et la diversité des parties. La symétrie de la Géométrie est due à l'isométrie des groupes de certaines disciplines, et à leur subordination à d'autres groupes géométriques ; la diversité apparaît d'une part en suite de la variété de leur composition et d'autre part de la différence des ensembles de figures envisagées. Ainsi dans ses œuvres, Klein présente la Géométrie élémentaire comme l'étude des figures, dont les propriétés géométriques ne changent pas lorsqu'on les soumet aux opérations du groupe de transformations qu'il appelle *le groupe principal* et comprenant les déplacements, la similitude de la symétrie, etc. Ce groupe est isomorphe avec le groupe des transformations projectives de l'espace qui laissent en place une surface déterminée, mais. quelconque, du deuxième degré, dont un point reste fixe tandis que les autres glissent l'un à la place de l'autre. Deux parties symétriques de l'édifice de la Géométrie sont ainsi la Géométrie élémentaire et la Géométrie projective d'une surface de deuxième degré dont un point est regardé comme point fixe. Leur variété consiste dans la différence des objets traités, soit d'une part les figures planes, d'autre part les figures dessinées sur la surface. Toutes les deux disciplines sont subordonnées à la Géométrie projective de l'espace.

Analytiquement, les groupes sont exprimés par certaines transformations des coordonnées. Dans le cas de la Géométrie projective de l'espace, c'est l'ensemble des transformations linéaires de quatre coordonnées homogènes,

$$x; y; z; w = aX + bX + cZ + dW ; a'X + b'Y + c'Z + d'W$$
$$: a''X + b''Y + c''Z + d''W : a'''X + b'''Y + c'''Z + d'''W .$$

Les coordonnées x, y, z, w, X, Y, Z, W et les paramètres a, b, et c peuvent être considérées comme quantités complexes. Les paramètres sont fixés pour l'une des opérations, mais variables pour le groupe. La propriété de l'ensemble de ces opérations de constituer ce que nous appelons *un groupe*, n'est autre chose que le fait qu'opérant successivement avec de différents a, b..., c''', d''', nous avons une opération *linéaire* avec des paramètres

déterminés par les précédents. Si les paramètres sont soumis à varier sous certaines conditions, comme par exemple de laisser invariant une expression de second degré à un facteur près, on aura un groupe géométrique subordonné au premier.

On trouve dans ce volume nombre d'exemples intéressants, moins simples que ceux qui précèdent, mais de même nature. Un cas qui nous intéresse spécialement est la place de la théorie de la relativité dans le cadre Kleinéen. Elle est marquée par le Mémoire XXX intitulé « Sur les fondements géométriques du groupe de Lorentz. »

Nous n'avons insisté ici que sur l'œuvre de Klein dans la théorie des groupes ; mais son volume contient aussi d'autres recherches, précurseurs de celui-là, dont quelques-unes frappent à cause de l'extrême jeunesse de l'auteur ; nous citons spécialement celle sur la Géométrie réglée et la Géométrie non-euclidienne.

En raison des nombreuses annotations de l'auteur, ce premier volume sera lu avec profit même par ceux qui connaissent déjà les Mémoires parus autrefois dans des périodiques.

Nous attendons avec impatience le second volume.

G.-C. Young (Lausanne).

A. Kopff. — **Grundzüge der Einsteinschen Relativitätstheorie**, 2me édition — 1 vol. in-8° de 204 p. avec 3 figures ; S. Hirzel, Leipzig, 1922.

Tandis que l'on possède déjà de nombreux ouvrages sur la théorie de la relativité écrite par des mathématiciens ou des physiciens, en voici un qui est dû à un astronome, M. Kopff, professeur à l'Université de Heidelberg. Son *Introduction à la théorie d'Einstein* correspond, avec quelques développements et remaniements introduits à l'occasion de la 2me édition, au cours professé pendant l'année universitaire 1919-1920. Elle contient, sous une forme aussi simple que possible, mais à la fois claire et précise, les fondements de la théorie de la relativité. L'auteur s'en tient strictement au domaine de la physique mathématique, sans se perdre dans des considérations philosophiques et sans aborder les extensions dues à M. Weyl. Son exposé constitue une excellente introduction à la théorie de la relativité restreinte et généralisée.

H. F.

E. Madelung. — **Die mathematischen Hilfsmittel des Physikers** (Die Grundlehren des mathem. Wissenschaften in Einzeldarstellungen, B. IV). — 1 vol. in-8° de 247 p. ; 10 fr. ; Julius Springer, Berlin.

Dans ce volume, qui fait partie de la nouvelle *Collection Springer*, M. Madelung, professeur de physique théorique à l'Université de Francfort s. M., a réuni les principales notions de mathématiques et de physique mathématique qu'il estime particulièrement indispensables aux physiciens. Il n'a pas voulu écrire un cours de mathématiques générales à l'usage des physiciens, mais plutôt ce qu'on appelle un *précis*, un *abrégé* contenant les propriétés essentielles et les résultats que le physicien doit avoir constamment sous la main. A ce point de vue son Ouvrage sera non seulement utile aux étudiants en physique, mais il sera aussi examiné avec intérêt par tous ceux qui sont chargés de leur enseigner les mathématiques.

Les dix premiers chapitres sont entièrement consacrés aux mathéma-

tiques ; ils traitent des objets suivants : Algèbre. — Des fonctions qui interviennent dans les sciences physiques. — Des séries. — Calcul différentiel et intégral.— Equations différentielles.— Equations intégrales linéaires.— Calcul des variations. — Des transformations. — Analyse vectorielle. — Calcul des probabilités.

La seconde partie de l'Ouvrage comprend la mécanique et les principaux chapitres de physique théorique dans lesquels on a recours à l'instrument mathématique : Electricité. — Théorie de la relativité. — Thermodynamique. H. F.

G. Monge. — **Géométrie descriptive**. Augmentée d'une théorie des ombres et de la perspective extraite des papiers de l'auteur, par Barnabé Brisson. (Les Maîtres de la Pensée Scientifique ; Collection de Mémoires et ouvrages publiés par les soins de M. Solovine). — Deux volumes in-16 de 144 pages avec 37 fig. et de 138 pages ; ensemble 6 fr. ; Gauthier-Villars et Cie, Paris.

Nous avons déjà eu l'occasion de signaler la très intéressante collection des «Maîtres de la pensée scientifique», qui paraît chez Gauthier-Villars, et qui reproduit les travaux scientifiques les plus importants de tous les temps et de tous les pays. Cette collection que dirige Maurice Solovine, vient de s'enrichir d'une œuvre de tout premier ordre : la *Géométrie descriptive* de Monge publiée d'après la 4me édition parue en 1820, la plus complète des éditions.

Parmi les savants ayant illustré la fin du XVIIIme siècle et l'aube du XIXme, il est difficile de trouver une figure plus attachante que celle de Gaspard Monge, professeur de Physique à 16 ans, Membre de l'Académie des Sciences à 34, savant, ingénieur, homme d'Etat, l'un des principaux fondateurs de l'Ecole Normale et de l'Ecole Polytechnique et qui, par la supériorité de son génie, l'affabilité de ses manières et l'élévation de ses sentiments, sut acquérir l'admiration et la sympathie de tous ceux qui l'approchaient.

Le génie inventif de Monge s'est manifesté avec un éclat tout particulier dans sa *Géométrie descriptive*, œuvre créée de toute pièce par lui et remarquable non seulement par sa portée scientifique, mais encore par le champ illimité qu'elle offre aux applications pratiques. Ce qui semblait voué pour toujours à la routine, aux tâtonnements et aux moyens empiriques se trouve réuni en un corps de doctrine d'une logique impeccable réduit à des règles rigoureuses qui permet de représenter d'une façon précise, à l'aide du dessin, les formes des corps et inversement de les reconnaître d'après la description exacte une fois réalisée. En plus, des parties achevées, *ce livre contient en germe presque tout ce qui a été ultérieurement ajouté à cette nouvelle branche des Mathématiques*. Monge en conçut les idées fondamentales vers 1775, il les élabora lentement et les exposa pour la première fois d'une façon systématique à l'Ecole Normale, l'an III de la République, mais il ne put les publier que l'an VII sous le Directoire, la Convention ayant interdit la publication de ses importantes découvertes, par crainte d'en voir profiter les écrivains étrangers dans leurs ouvrages de défense militaire.

Par sa puissante originalité et les horizons nouveaux qu'elle ouvrit,cette œuvre raviva l'intérêt pour les recherches géométriques, qui étaient par trop délaissées au profit de l'Analyse. La façon dont il a exposé les « nouvelles « vérités est un modèle de simplicité et d'exactitude.

H.-E. Soper. — **Frequency Arrays,** illustrating the Use of Logical Symbols in the Study of Statistical and other Distributions. — 1 fasc., 48 pages, in-8° ; 3s. 6d. ; University Press, Cambridge, 1922.

L'étude de M. Soper a pour objet de montrer l'emploi que l'on peut faire des symboles logiques dans les études statistiques. L'auteur explique dans son introduction que des symboles ayant une signification logique, mais pas d'interprétation numérique, peuvent être utilement introduits dans les expressions mathématiques de la distribution de fréquence. En supposant que ces symboles obéissent aux lois ordinaires de l'algèbre, il devient possible de simplifier considérablement la description, l'analyse et la dérivation des distributions de fréquence.

Certaines des expressions obtenues, telles que celle représentant l'ordre de fréquence d'un degré déterminé, ont une grande analogie avec les expressions que l'on rencontre dans le calcul des probabilités — la probabilité étant remplacée par l'ordre de fréquence. Aussi cet exposé sera-t-il lu avec intérêt surtout par les personnes familières avec le calcul des probabilités.

Un chapitre est consacré aux expressions du binôme, de Poisson, de Gauss, de l'exponentielle et de gamma. Un autre chapitre traite de la statistique de population limitée sans remplacement, soit la fréquence d'événements en prenant des unités ou groupes sans remplacement, la fréquence hypergéométrique, etc. L'application à la distribution géométrique et aux vecteurs amène l'auteur à des équations intégrales.

Renée Rocque-Masson (Paris).

D.-J. Struik. — **Grundzüge der mehrdimensionalen Differenzialgeometrie in direkter Darstellung.** — 1 vol. in-8°, 198 pages; J. Springer, Berlin, 1922.

La géométrie différentielle d'une multiplicité riemannienne quelconque peut se faire le mieux du monde par les méthodes du calcul différentiel absolu de MM. Ricci et Levi-Civita. Les calculs effectués au moyen des symboles de cet algorithme, et tout particulièrement ceux qui se rattachent à la notion de dérivée covariante, c'est-à-dire, en fait, à l'idée du déplacement parallèle, aboutissant à des résultats qui sont indépendants du système de coordonnées curvilignes choisi pour les obtenir et pour en écrire la formulation. Toutefois les calculs que l'on a effectués pour arriver à ces propriétés intrinsèques n'ont pas toujours à chaque instant de leur développement une signification intrinsèque; de plus l'invariant final obtenu s'écrit au moyen de symboles qui postulent le choix d'un système de coordonnées particulier, bien que quelconque. On pouvait se proposer de dépouiller encore le calcul différentiel absolu de ces éléments extrinsèques; c'est ce que M. J.-A. Schouten a tenté de faire dans une série de travaux inspirés d'une part par les idées de MM. Ricci et Levi Civita, et d'autre part par les méthodes de Clebsch et Aronhold relatives au calcul des invariants.

La méthode de M. Schouten exige de qui veut l'utiliser une initiation assez difficile, tant à cause de la variété des opérations possibles qu'à cause des procédés symboliques du calcul des invariants qui ne sont pas le fait de chacun. Mais cette initiation passée, les calculs se présentent avec beaucoup d'élégance et les résultats essentiels s'obtiennent avec aisance.

M. Struik dans l'ouvrage que nous analysons s'est proposé de traduire

dans le langage de M. Schouten les calculs et les résultats essentiels de la géométrie différentielle des multiplicités riemanniennes. Une introduction brosse à grands traits et d'une manière remarquablement synthétique, l'histoire de la science des continua. Le chapitre premier expose les méthodes de M. Schouten et pose les principes de l'algèbre tensorielle [1]. L'élément essentiel à la base de ces considérations, est le corps de vecteurs (au sens de M. Weyl) attaché en chaque point d'une multiplicité ; au lieu de ne calculer qu'avec les composantes de ces vecteurs dans une base quelconque, on considère ces vecteurs pour eux-mêmes, et l'on conçoit dès lors — sans qu'il soit nécessaire de faire un exposé dont ce n'est pas ici le lieu — que les calculs, portant sur des êtres géométriques et non pas sur leurs ombres portées dans tel ou tel système de coordonnées aient une signification qui reste constamment intrinsèque.

Le chapitre II est consacré à l'étude de l'analyse tensorielle infinitésimale. On y définit le déplacement parallèle — *allgemeine lineare Uebertragung* — les géodésiques, la différentiation, les tenseurs de courbure.

L'étude des variétés V_m plongées dans des variétés V_n $(n > m)$ fait l'objet des deux chapitres suivants; le premier d'entre eux s'occupe des propriétés de courbure qui ne font pas intervenir les tenseurs de Riemann-Christoffel, le second s'occupent de celles qui se rattachent à ces tenseurs. Les calculs sont si élégants que M. Struik obient au cours de son exposé et comme en se jouant un très grand nombre de résultats connus et de résultats nouveaux. Ce n'est pas le moindre mérite de l'Auteur, que celui d'avoir mis à la portée des mathématiciens une foule de théorèmes dispersés dans des mémoires qui fussent devenus classiques si un traité sur la question les avait réunis plus tôt. C'est aux théories d'Einstein que l'on doit cette renaissance des études de géométrie différentielle, et le livre de M. Struik rend un service considérable à ceux dont l'intérêt mathématique était éveillé par les nouveaux problèmes que pose la physique, mais dont les forces étaient absorbées en partie, sinon par la découverte d'anciens résultats, du moins par des recherches bibliographiques très longues.

Le livre se termine par une liste très dense des Mémoires sur la géométrie différentielle parus depuis 1806, et par une manière de dictionnaire qui permet au lecteur, s'initiant à la méthode directe, d'établir les correspondances entre les symboles de Ricci, Einstein, Weyl, Laue et Bianchi et ceux de Schouten-Struik. G. Juvet (Neuchâtel).

J. Villey. — **Les divers aspects de la théorie de la relativité** avec une préface de M. Brillouin. — 1 volume in-8° de 96 p. ; 7 fr. 50 ; Gauthier-Villars et Cie, Paris.

L'auteur présente d'abord, entremêlée de quelques remarques et explications, une analyse approfondie des ouvrages d'Einstein et d'Eddington, Dans la seconde partie, il donne une esquisse schématique de l'exposition purement objective de la théorie de la relativité en s'inspirant de l'enseignement de M. Langevin au Collège de France. A titre de conclusion il énonce,

[1] Au lieu du terme *tenseur*, certains géomètres, dont M. Struik, emploient le terme « *affinor* », les tenseurs étant alors des « affinors » symétriques. Il serait à désirer que les géomètres eussent des dénominations identiques : la multiplicité des termes ne pouvant créer que des confusions.

sous une forme à la fois simple et succincte, le contenu essentiel de cette Théorie, en laissant de côté toutes les justifications et tout le détail des conséquences.

Comme l'écrit M. Brillouin, dans la Préface, « M. Villey n'a pas essayé de vulgariser la théorie de la relativité d'Einstein, de donner au lecteur l'illusion qu'il a compris quelque chose sans un véritable effort et surtout sans une connaissance préalable approfondie de la Physique contemporaine, et sans notions de géométrie et d'analyse. Ce serait une tentative sans intérêt scientifique et destinée au plus complet échec. Mais tout le public de professeurs, de savants, d'ingénieurs, pourvus d'une forte instruction scientifique et connaissant le langage et l'écriture mathématiques, peut lire avec fruits son Livre ».

C. E. Weatherburn. — **Elementary Vector Analysis**, with application to Geometry and Physics. — 1 vol. in-8° de 184 p. avec 61 fig. ; 12 sh. ; G. Bell and Sons, Londres.

D'un caractère élémentaire, cet ouvrage contient les notions fondamentales sur les opérations vectorielles avec leurs applications à la Géométrie et à la Mécanique. Les principes de l'algèbre et de l'analyse vectorielles sont présentés avec beaucoup de clarté. Pas à pas l'auteur en montre la portée à l'aide d'exemples empruntés à la Géométrie élémentaire, à la Géométrie de la sphère, à la Trigonométrie (plane et sphérique) et à la Géométrie infinitésimale. Les applications à la Mécanique sont réparties sur plusieurs chapitres : Cinématique et dynamique d'un point matériel ; dynamique d'un système de points ou d'un corps solide ; statique des corps rigides.

Suivant l'usage généralement adopté par les auteurs de manuels anglais, chaque chapitre se termine par un choix d'exercices et de problèmes à résoudre, les solutions étant indiquées brièvement à la fin de l'ouvrage.

H. F.

H. Weber. — **Arithmetik, Algebra und Analysis,** Band I. (Weber-Wellstein, Enzyklopädie der Elementarmathematik. Ein Handbuch für Lehrer und Studierende) Vierte Auflage neubearbeitet von Paul Epstein. — 1 vol. in-8° de 568 p. avec 26 fig. ; relié 16 fr. ; B. G. Teubner, Leipzig.

A la suite de décès des auteurs, M. Epstein, professeur à l'Université de Francfort s. M. s'est chargé de la publication de la quatrième édition du tome I de l'« Enzyklopädie der Elementarmathematik ». Il ne s'agit pas, comme on sait, d'une encyclopédie proprement dite, mais d'un ouvrage d'un caractère encyclopédique par le fait qu'il embrasse toutes les branches des mathématiques élémentaires.

M. Epstein a apporté de nombreux remaniements et compléments au tome I qui comprend les principes de l'Arithmétique et de l'Algèbre. Le nombre des feuilles a été porté de 31 à 35, c'est dire que d'importantes additions ont été faites à l'ouvrage primitif.

Spécialement destiné aux candidats à l'enseignement dans les écoles moyennes, cet ouvrage continuera à rendre de grands services aux étudiants et aux professeurs. H. F.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

1. Livres nouveaux :

Tous les ouvrages adressés à la Rédaction sont signalés ici avec une brève indication de leur contenu, sans préjudice de l'analyse dont ils peuvent être ultérieurement l'objet sous la rubrique « Bibliographie ».

Atomes et Electrons. Rapports et discussions du Conseil de Physique tenu à Bruxelles du 1er au 6 avril 1921 sous les auspices de l'Institut international de Physique Solvay, publiés par la Commission administrative de l'Institut et MM. les Secrétaires du Conseil. — 1 vol. in-8° de 274 pages avec figures ; 20 fr. : Gauthier-Villars et Cie, Paris.

Ce volume contient les rapports et discussion du Conseil de Physique tenu à Bruxelles du 1er au 6 avril 1921 sous la présidence de M. H. A. Lorentz. On y trouvera les Mémoires présentés par MM. Bohr, Bragg, Brillouin, de Broglie, Ehrenfest, de Haas, Kammerlingh Onnes, Lorentz, Millikan, Rutherford et Weiss.

W. Birkemeier. — **Ueber den Bildungswert der Mathematik**, Ein Beitrag zur philosophischen Pädagogik. (Wissenschaft und Hypothese). — 1 vol. in-8° de 191 p., broché, 9 fr. ; B. G. Teubner, Leipzig.

Après avoir examiné l'objet des mathématiques au point de vue de la théorie de la connaissance, l'auteur étudie la valeur éducative des différentes branches mathématiques. Son exposé, très documenté, sera lu avec profit par tous ceux qui s'intéressent aux progrès de la méthodologie et de la philosophie des sciences mathématiques.

A. Borio. — **Una teoria semplice dei Logaritmi**. — 1 vol. in-4° de 24 p. ; Unione Tipografica Editrice Provinciale, Cunea.

Dans ce fascicule, l'auteur présente un exposé de la théorie des logarithmes en utilisant les symboles du « Formulario Mathematico » de M. Peano.

R. Bouvier. — **La Pensée d'Ernst Mach**, essai de biographie intellectuelle et de critique. — 1 vol. in-8° de 370 p. édité par l'auteur, 67, rue de Seine, Paris, 1922.

Cette étude sur la pensée d'Ernest Mach sera lue avec intérêt dans les pays de langue française où le savant mathématicien et philosophe viennois n'était guère connu que par la traduction de *La Mécanique* (1904) et *La Connaissance et l'erreur* (1908).

M. de Broglie. — **Exposé concernant les résultats actuels relatifs aux éléments isotopes**. Conférence faite le 10 novembre 1920 et publiée avec des compléments sur les travaux récents. (Publications de la Société de Chimie-Physique, XI), — 1 vol. in-8° de 15 p. ; 2 fr. ; Librairie Scientifique, J. Hermann.

Conférence sur les corps isotopes faite le 10 novembre 1920 et publiée avec des compléments sur les travaux récents.

Lt.-Col. Corps. — **Les théories de la relativité dépassent les données de l'expérience**. — 1 vol. in-4° de 43 p. ; 3 fr. 50 ; Gauthier-Villars et Cie, Paris.

Dans cet Ouvrage, l'auteur expose les observations qui l'ont amené à formuler que « la Théorie de la Relativité dépasse les données de l'expérience » ; c'est d'ailleurs le titre qu'il a donné à son Livre. L'objet de son étude est de rechercher si le principe de la relativité et celui de la constance absolue de la vitesse de la lumière sont bien des conséquences nécessaires au résultat de l'expérience de Michelson et de Morlay, la plus concluante des expériences qui ont servi de bases à la mécanique de la Relativité.

P. Drumaux. — **L'évidence de la théorie d'Einstein**. — 1 vol. in-8° de 72 pages, broché, 6 francs ; Librairie Scientifique, J. Hermann, Paris, 1923.

L'auteur se propose de montrer que la théorie de la relativité relève du bon sens le plus élémentaire. Son exposé constitue une intéressante tentative d'initiation à cette théorie.

E. Fettweis. — **Wie man einstens rechnete**. — (Mathematisch-Physikalische Bibliothek.) — 1 vol. in-16 de 56 pages avec 10 figures, 2 tabelles et de nombreux exercices ; 0 fr. 90, broché ; B. G. Teubner, Leipzig.

Aperçu historique des procédés de calcul numérique en usage chez les principaux peuples de l'antiquité et du moyen-âge.

M. Groll. — **Kartenkunde**. (Sammlung Göschen Nro. 599) neubearbeitet von Dr. O. Graf, II : *Der Karteninhalt*. — 1 vol. in-16 de 133 p. avec 39 cartes ; 1 fr. 25 ; Walter de Gruyter et Co., Berlin et Leipzig.

Notions sommaires sur la construction et l'emploi des cartes topographiques, les procédés de reproduction et l'histoire de la cartographie.

E. W. Hobson. — **The Theory of Functions of a real Variable and the Theory of Fourier's Series**. Second Edition revised throughout and enlarged, Volume I. — 1 vol. in-4° de 671 p. 45 sh. ; Cambridge University Press.

Ouvrage indispensable à tous ceux qui font des recherches dans le domaine de la théorie des fonctions d'une variable réelle. Dans ce premier volume de la 2me édition entièrement revue et considérablement augmentée, l'auteur donne un exposé très minutieux et bien complet de cette théorie.

I. Le nombre. — II à IV. La théorie des ensembles. — V. Fonctions d'une variable réelle. — VI. L'intégrale de Riemann. — VII. L'intégrale de Lebesgue. — VIII. Intégrales non absolument convergentes.

H. Kauffmann. — **Allgemeine und physikalische Chemie**. (Sammlung Göschen.) — 1 vol. in-16 de 154 p. avec 12 figures ; 1 fr. 25 ; Walter de Gruyter et Co, Berlin.

Cette monographie qui paraît aujourd'hui en 8me Edition fournit une excellente introduction aux théories modernes de la chimie physique.

H. Lebesgue. — **Les Professeurs de Mathématiques du Collège de France**. Humbert et Jordan, Roberval et Ramus. — 1 fasc. in-8° de 48 p. ; Edition de la Revue Politique et Littéraire et de la Revue Scientifique, Boul. Saint-Germain, Paris.

Leçon d'ouverture du Cours de mathématiques pures du Collège de France, professés le 7 janvier 1922. Dans cette conférence, M. Lebesgue donne un tableau de l'œuvre scientifique de ses deux prédécesseurs immé-

diats, Georges Humbert et Camille Jordan puis il rappelle les travaux de deux de ses compatriotes de l'Oise, Roberval et Ramus.

T. Levi-Civita et U. Amaldi. — **Lezioni di Meccanica razionale**. Volume Primo : Cinematica, Principi e statica. — 1 vol. in-8° de 741 pages, 65 lires, N. Zanichelli, Bologne.

Destiné aux étudiants des universités italiennes ces Lezioni comprendront les chapitres classiques de mécanique rationnelle indispensables aux mathématiciens, aux physiciens et aux ingénieurs. Ce premier volume renferme les principes de cinématique et de statique.

L. Lichtenstein — **Astronomie und Mathematik in ihrer Wechselwirkung**. Mathematische Probleme in der Theorie der Figur der Himmelskörper. — 1 vol. in-8° de 97 pages avec 3 figures, Hirzel, Leipzig.

Intéressant exposé des rapports entre les mathématiques et l'Astronomie. L'Auteur passe en revue les grands problèmes qui ont préoccupé les savants au cours des quarante dernières années et qui encore aujourd'hui font l'objet de nombreux travaux dans le domaine de l'Astronomie théorique.

M. Milankovitch. — **Théorie Mathématique des Phénomènes Thermiques** produits par la radiation solaire. — 1 vol. in-8° de XVI-340 p. avec 27 figures dans le texte ; broché 20 fr. ; Gauthier-Villars et Cie, Paris.

Cet Ouvrage de M Milankovitch, professeur à l'Université de Belgrade, a pour but de déduire, à l'aide des lois de la Physique, le rapport mathématique existant entre l'état d'insolation et l'état thermique des surfaces et des atmosphères planétaires, afin de pouvoir appliquer les résultats obtenus aux problèmes de la Physique cosmique.

E. Müller. — **Lehrbuch der darstellenden Geometrie für technische Hochschulen**. Zweiter Band, Dritte Aufl. — 1 vol. in-8° de 362 pages avec 328 figures ; 10 fr., broché ; B. G. Teubner, Leipzig.

En peu d'années le Traité de Géométrie descriptive de M. E. Müller, professeur à l'Ecole technique supérieure de Vienne, atteint sa 3me édition. Il compte aujourd'hui au nombre des ouvrages classiques qui sont consultés par tous ceux qui enseignent la Géométrie descriptive. Nous nous bornons à rappeler que le tome II contient, avec de nombreuses applications, les méthodes de la projection cotée, de l'axonométrie et de la perspective.

T. Nagel. — **Sur la distribution des nombres qui sont premiers avec un nombre entier donné**. — 1 vol. in-8° broché de 36 p. ; Morten Johansen, Christiania, 1922.

L'auteur a réuni dans ce fascicule deux mémoires sur la distribution des nombres qui sont premiers avec un nombre entier donné. Son étude est basée sur la notion de diviseur d'uniformité par rapport à un module.

A. de Pompignan. — **Note sur le calcul tensoriel**. — 1 vol. in-8° de 32 p. ; 3 fr. ; Librairie Scientifique, J. Hermann, Paris 1923.

L'auteur a condensé dans cette Note les notions essentielles relatives à l'algèbre et à l'analyse tensorielles. Son exposé s'adresse à ceux qui désirent s'initier aux opérations sur les tenseurs.

Sir J. J. Thomson. — **Les rayons d'électricité positive** et leur application aux analyses chimiques, trad. Fric et Corvisy. — 1 vol. in-8° de 223 p. avec 9 planches et de nombreuses figures, 20 fr. ; J. Hermann, Paris 1923.

Traduit d'après la deuxième édition anglaise, cet Ouvrage du savant professeur de Cambridge est consacré aux recherches qui ont été effectuées pendant ces dernières années sur les rayons positifs. L'auteur a apporté une attention spéciale aux propriétés des rayons positifs qui semblent jeter une lumière sur les problèmes de la structure des molécules et des atomes et sur la question de la combinaison chimique.

S. Valentiner. — **Vektoranalysis**. (Sammlung Göschen, Nr. 354). — 1 vol. in-16 de 132 p. avec 13 figures ; 1 fr. 25 ; 3me édition ; Walter de Gruyter et Co, Berlin et Leipzig.

Troisième édition entièrement revue des notions d'analyse vectorielle et de ses principales applications en physique, par S. Valentiner, professeur de physique à l'Ecole des mines de Clausthal.

J. G. Van der Corput. — **Grepen Uit de Getallenleer**. Rede uitgesproken bij de aanvaarding van het Hoogleeraarsambt aan de Rijksuniversiteit te Groningen op Zaterdag 17 maart 1923. — 1 fasc. in-8°, 19 p. ; J. B. Wolters, Groningue.

Considérations sur la théorie des nombres présentées à l'Université de Groningue, à l'occasion de sa leçon d'ouverture, par M. le Prof. J. G. van der Corput.

G. Vivanti. — **Complementi di Matematica** ad uso dei chimici e dei naturalisti, 2. edizione riveduta (Manuali Hoepli). — 1 vol. in-16 de 388 p. et 43 fig. ; 16,50 lires ; Ulrico Hoepli, Milan.

Nouvelle édition, entièrement revue, des compléments de mathématiques à l'usage des étudiants en chimie et en sciences naturelles rédigés par M. G. Vivanti, professeur à l'Université de Pavie. L'ouvrage est divisé en six parties : Algèbre, Géométrie analytique, Calcul infinitésimal, Calcul des probabilités, Mécanique et Thermodynamique.

H. Wieleitner. — **Geschichte der Mathematik**. Neu bearbeitet. (Sammlung Göschen.) I, Von den ältesten Zeiten bis zur Wende des 17. Jahrhunderts. — 1 vol. in-16 de 136 p. 1 fr. 25, Walter de Gruyter et Co., Berlin, 1922.

Dans cet abrégé l'auteur donne sous une forme très condensée un excellent aperçu de l'Histoire des mathématiques depuis l'antiquité jusqu'à la fin du XVIIIme siècle.

2. Publications périodiques :

Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität, Band I.

Académie royale de Belgique, Bulletin de la Classe des Sciences, 1922. — Hayez, Bruxelles.

Annaes scientificos da Academia polytechnica do Porto, directeur F. Gomes Teixeira. — Vol. 14. Imprensa da Universidade, Coimbra.

Annales de la Société scientifique de Bruxelles, 41me année.

Annales de l'Université de Grenoble, tome XXXIII. — Gauthier-Villars, Paris; Allier frères, Grenoble.

Bollettino della Unione matematica Italiana, anno I. — Zanichelli, Bologne.

Bollettino di Matematica. Giornale scientifico-didattico per l'incremento degli Studi Matematici nelle scuole medie. Diretto dal Dott. Alb. Conti, con una Sezione storico-bibliografica publicata per Gino Loria. Nuova serie, Anno 1. Firenze.

Bulletin de la Société francaise de Philosophie, 21me année, 1921. — A. Colin, Paris.

Bulletin of the American Mathematical Society, tome XVIII, 1922. — New-York.

Bulletin of the Calcutta Mathematical Society, vol. XII, 1920-21. — Calcutta, University Press.

Bulletin of the University of Kansas, Science Bulletin, Vol. XIII, Nos 1-15.

Contribucion al Estudio de las Ciencias fisicas y matematicas. — Nos 49-53. La Plata.

Fundamenta Mathematicae, publié par St. Mazurkiewicz et W. Sierpinski. Tomes I à IV, Varsovie.

Giornale de Matematiche di Battaglini, tome LX. — Pellerano, Naples.

Intermédiaire des Mathématiciens, dirigé par Ed. Maillet, A. Boulanger, J. Lemaire. — 2me série, tome I, 1922. — Gauthier-Villars et Cie. Paris.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, Band 45, Jahrgang 1914-15 (in 3 Heften), Heft 3. — Verein. wiss. Verleger, Berlin.

Journal de Mathématiques élémentaires, publié par H. Vuibert, 46me année, 1921-22. — Librairie Vuibert, Paris.

Journal of Mathematics and Physics, Massachusetts Institute of Technology, Vol. I, 1922.

Journal of the mathematical association of Japan for secondary Education Vol. III, 1921. — Tokyo.

Mathematisk Tidsskrift. Revue dirigée par P. Heegaard, séries A et B; 1921. — Copenhague.

Mathematical Gazette (The), publié par G. Greenstreet. Vol. XI, 1921. G. Bell and Sons, Londres.

Mathesis. Recueil mathématique à l'usage des écoles spéciales, publié par J. Neuberg et Ad. Mineur, tome XXXVI, année 1922, Bruxelles et Paris.

Mémoires de la Société royale des Sciences de Liége, 3me série, tome XI.

Nieuw Archief voor Wiskunde, publié sous les auspices de la Société des Sciences d'Amsterdam, par D.-J. Korteveg, F. Schuh et W. Van der Wonde, 2me série, tome XIV. — Delsman en Nolthenius, Amsterdam.

Periodico di matematiche, série IV, Vol. II, 1922. — Nicola Zanichelli, Bologne.

Prace Matematyczno Fizyczne, tomes XXXI et XXXII, Varsovie.

Revista Matematica Hispano-Americana, dirigée par J. Rey-Pastor. Tome III. — Madrid, 1921-1922.

Revue de mathématiques spéciales, 32me année, 1921-1922. — Librairie Vuibert, Paris.

Revue semestrielle des Publications mathématiques. Tome XXIX, avril 1920-octobre 1921. — Delsman en Nolthenius, Amsterdam.

Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften, Wien. Tome 129, 1921. — Vienne.

The Tôhoku mathematical journal, publié par T. Hayashi, M. Fujiwara, T. Kubota. Vol. XX, 1921. — Tôhoku Imperial University, Sendai, Japon.

Travaux scientifiques de l'Université de Rennes, tome XV, 1922.

Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften, herausgegeben von G. Wolff. XXIII. Jahrgang, 1922. Otto Salle, Berlin.

Wiadomoski Matematyczne, dirigé par S. Dickstein. Tomes XXIV et XXV. — Varsovie.

Acta Mathematica, tome 43, Nos 3 et 4. — J. Kampé de Fériet: Sur les fonctions hypersphériques et sur l'expression de la fonction hypergéométrique par une dérivée généralisée. — O. Szasz : Ueber Konvergenz unendlicher Kettenbrüche mit durchweg reellen Elementen. — Ph. Jourdain : A proof that every aggregate can be well-ordered. — P. Kœbe : Ueber die konforme Abbildung endlich- und unendlichvielfach zusammenhängender symmetrischer Bereiche. — P.-J. Myrberg : Ueber die automorphen Funktionen zweier Veränderlichen. — T. Carleman : Développements asymptotiques des solutions d'une classe d'équations différentielles linéaires.

Tome 44, No 1. — G.-H. Hardy et J.-E. Littlewood : Some Problems of *Partitio numerorum* ; III : On the expression of a number as a sum of primes.

American Journal of Mathematics. Volume XLIII. — A. B. Coble : Multiple binary Forms with the Closure Property. — E. Kasner: Einstein's Theory of Gravitation Determination of the Field by Light Signals. — F. Morley : Note on Einsteins Equation of an Orbit. — H. M. Morse : A One-to-One Representation of Geodesics on a Surface of Negative Curvature. — E. P. Lane : Conjugate Systems with Indeterminate Axis Curves. — R. D. Carmichael : Boundary Value and Expansion Problems ; Algebraic Basis of the Theory. — L. E. Dickson: Algebraic Theory of the Expressibility of Cubic Forms as Determinants, with application to Diophantine Analysis. — E. Kasner : The Impossibility of Einstein Fields Immersed in Flat Space of Five Dimensions. — Id. Finite Representation of the Solar Gravitational Field in Flat Space of Six Dimensions. — B. Datta : On the Motion of Two Spheroids in an Infinite Liquid along their Common Axis of Revolution. — P. J. Daniell:

Integral Products and Probability. — E. L. Post: Introduction to a General Theory of Elementary Propositions. — A. Berry: Note on Schläfli's Elliptic Modular Functions. — O. C. Hazlett: Associated Forms in the General Theory of Modular Covariants. — Temple Rice Hollcroft: One (2,3) Compound Involutions. — J. A. Schouten et D. J. Struik: On some Properties of General Manifolds Relating to Einstein's Theory of Gravitation. — E. Kasner: Geometrical Theorems on Einstein's Cosmological Equations. — C. M. Sparrow: On the Fermat and Hessian Points for the Non-Euclidean Triangle and their Analogues for the Tetraneuron. — W. L. Hart: The Cauchy-Lipschitz Method for Infinite Systems of Differential Equations. — R. D. Carmichael: Boundary Value and Expansion Problems; Formulation of Various Transcendental Problems. — J. K. Whittemore: Reciprocity in a Problem of Relative Maxima and Minima.

The American Mathematical Monthly. Vol. XXVIII, 1921. — R. C. Archibald: Historical notes on the relation $e^{-\pi/2} = i^i$. — E. T. Bell: Note on the prime divisors of the numerators of Bernoulli's numbers. — A. A. Bennett: Some arithmetic operations with transfinite ordinals. — G. D. Birkhoff: An elementary treatment of Fourier's series. — L. P. Copeland: The triangle of reference in elementary analytic geometry. — H. M. Dadourian: Acoustic circles. — L. E. Dickson: Rational triangles and quadrilaterals. — O. Dunkel: A determination of the curve minimizing the area enclosed by it and its evolute. — Id.: The relation of caustics to certain envelopes. — A. Emch: On the construction and modelling of algebraic surfaces. — O. D. Kellogg: On a Diophantine problem. — W. D. Lambert and O. S. Adams: Mathematical problems in the Work of the United States Coast and Geodetic Survey. — T. W. Mason: On amicable numbers and their generalizations. — G. A. Miller: The formula $a\,(a+1)/2$ for the area of an equilateral triangle. — F. V. Morley: A curve of pursuit. — F. D. Murnaghan: A cubic space curve connected with the tertrahedron. — H. L. Rietz: On certain properties of Makeham's laws of mortality with applications. — T. R. Running: Graphical solutions of the quadratic, cubic and biquadratic equations. — D. E. Smith: Among my autographs; Notes 1-17. — Id.: The first work on mathematics printed in the New World. — Id.: New information respecting Robert Recorde. — Id.: Religio mathematici. — Id.: Two mathematical shrines of Paris. — H. S. Uhler: Oblique deviation and refraction produced by prisms. — Id.: On the numerical value of i^i. — Questions and discussions. — Recent publications. — Problems and solutions. — Notes and News.

Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse. Tome XI. — R. Deltheil: Sur la théorie des probabilités géométriques. — G. Darmois: Sur les courbes algébriques à torsion constante. — Tome XII. — A. Buhl: Sur les formules fondamentales de l'électromagnétisme et de la gravifique. — Id.: Sur l'addition des fonctions elliptiques et les pseudo-lignes d'infini des intégrales doubles. — E. Jouguet: Notes sur la théorie de l'élasticité. — L. Roy: Sur les équations générales de la mécanique, le théorème de d'Alembert et celui du travail virtuel. — R. Gosse: De l'intégration des équations $s = f\,(x, y, z, p, q)$ par la méthode de M. Darboux.

Bulletin de la Société mathématique de France. Tome L. — R. Gateaux: Sur diverses questions de calcul fonctionnel. — Fatou: Note sur les fonctions invariantes par une substitution rationnelle. — M. Well; Sur les courbes rectifiables. — A. Pellet : Fonctions $\theta(x)$ de Jacobi et $\wp(u)$ de Weierstrass. — E. Maillet: Sur quelques propriétés de nombres transcendants de Liouville. — A. Bloch : Mémoire d'analyse diophantienne linéaire. — A. Angelesco: Sur des poylnomes orthogonaux et des extensions d'une formule de Rodrigues. — N. Wiener: Limit in terms of continuous transformation. — E. Cotton: Sur quelques formules d'Hydrodynamique. — V. Myller-Lebedepp: Sur un théorème de Gauss-Arndt relatif aux congruences binomes. — B. Gambier: Déformation du paraboloïde de révolution: cubique de M. Lyon et congruence de M. Thybaut. — P. Appell: Sur un système particulier de quatre droites concourantes dans l'espace ; droites équirésultantes.

Isis. International Review devoted to the History of Science and Civilisation. Edited by G. Sarton. Bruxelles. N° 10. — G. A. Miller: Different types of mathematical history. — N° 11. — G. Sarton: The Teaching of the History of Science. — Ch. Haskins: Michael Scot and Frederik II. — P. Boutroux: L'enseignement de la mécanique en France au XVIIe siècle. — J. Davidbond: The Development of Trigonometric Methods down to the close of the XVth Century (with a general account of the methods of constructing tables of natural sines, down to our days). — N° 12. — D. Cajori · On the History of Caloric.

Revue de Métaphysique et de Morale. — 29e année, 1922. N° 4. — Le fascicule 4 est entièrement consacré au mouvement général de la pensée américaine. Il contient une note de M. C.-I. Lewis, intitulée « *La logique et la méthode mathématique* », dans laquelle l'auteur fait ressortir les caractères du type de logistique qui s'est plus particulièrement développée aux Etats-Unis.

30e année, 1923. N° 1. — M. Winter: Le théorème de Pythagore.

Revue générale des Sciences pures et appliquées, 33e année, 1922. — E. Doublet: Une famille d'astronomes: les Herschel. — R. Adhemar: La démonstration scientifique. — M. d'Ocagne: Coup d'œil sur les principes fondamentaux de la Nomographie. — A propos de l'histoire de la Nomographie. — R. Soreau: Pour servir à l'histoire de la Nomographie. — R. Thiry: Sur la possibilité de se représenter l'espace fini et sans bornes de la théorie de la relativité.

34e année, N° 1. — M. G. Juvet: Les principes du calcul différentiel absolu et du calcul tensoriel et quelques-unes de leurs applications. — N° 4. — H. Malet: Une nouvelle formule de la relativité.

Revue scientifique, 60e année, 1922. — A. Buhl: Les théories einsteiniennes et le bon sens. — Lebesgue: Les professeurs de mathématiques du Collège de France : Humbert, Jordan, Roberval et Ramus. — R. Pancot: La durée et la conceptinn einsteinienne du temps.

Scientia. 1922, N° 1. — G. Loria : Deux grands historiens des mathématiques. — P. Boutroux: Le père Mersenne et Galilée. — N° 6. — E. Dickson: The Theory of Numbers ; its Principal Branches. — K. Hirayama: Origine des astéroïdes. — N° 9. — J. Bosler: La résistance du milieu

cosmique et l'évolution des orbites planétaires. — 1923, N° 1. — H. Bouasse: La question préalable contre la théorie d'Einstein. — N° 3. — G. Castelnuovo : L'espace-temps des relativistes a-t-il un contenu réel ? — J.-H. Jeans: The Motions of the Stars.

Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris. *1er semestre 1922.* — *3 janvier.* — P. Montel: Sur les familles quasi-normales. — A. Auric: Sur la généralisation des fractions continues. — *9 janvier.* — Th. Varopoulos: Sur une classe de fonctions croissantes. — P. Humbert: Sur le produit de Laplace relatif à certains hypercylindres. — G. Dumas: Sur un tableau normal relatif aux surfaces unilatérales. — A. Denjoy: Sur les fonctions définies par des séries de fractions rationnelles. — B. Gambier: Surfaces et variétés de translation de Sophus Lie. — Ch. Lallemand: Sur la genèse et l'état actuel de la science des abaques. — *16 janvier.* — P. Montel: Sur une extension d'un problème de M. Landau. — A. Auric: Sur la réalisation des nombres entiers complexes. — M. D'Ocagne: Sur la réduction de la quatrième dimension à une représentation plane. — G. Tzitzeica: Sur les réseaux de points. — *23 janvier.* — D. Riabouchinski: Quelques considérations sur la forme du solide et l'énergie du fluide qui l'entoure. — *30 janvier.* — Th. Varopoulos: Sur un théorème de M. Montel. — A. Angelesco: Sur les zéros de certaines fonctions. — A. Cahen: Sur les équations différentielles du premier ordre à points critiques fixes. — Ch. Lallemand: Sur les avantages comparés des abaques hexagonaux et des abaques à points alignés. — A. Auric: Sur le développement en fraction continue des nombres algébriques. — R. Jacques: Sur les surfaces telles que les axes des cercles osculateurs à une famille de lignes de courbure appartiennent à un complexe linéaire. — *6 février.* — M. Gevray: Remarques sur les fonctions quasi-analytiques et les fonctions indéfiniment dérivables. — G. Julia: Les séries de fractions rationnelles et l'intégration. — T. Carleman: Sur un théorème de M. Denjoy. — C. Guichard: Sur les réseaux qui sont plusieurs fois Ω_{nn}. — L. Lecornu: Quelques remarques sur la relativité. — *15 février.* — M. Janet: Les caractères des modules de formes et les systèmes d'équations aux dérivées partielles. — W. Wilkozs: Sur un point fondamental de la théorie du potentiel. — E. Cartan: Sur une définition géométrique du tenseur d'énergie d'Einstein. — Auric: Sur la résolution d'une équation linéaire indéterminée. — *20 février.* — E. Borel: Sur les fonctions d'une variable réelle indéfiniment dérivables. — G. Julia: Les équations fonctionnelles et la représentation conforme. — G. J. Remoundos: Sur le raccordement des lignes et la courbe élastique plane. — R. Lagrange: Sur quelques applications du calcul différentiel absolu. — B. Gambier: Correspondance ponctuelle entre deux surfaces avec échange des réseaux conjugués en réseaux orthogonaux et vice-versa. — H. Andoyer: Sur le calcul de la précession. — *27 février.* — T. Carleman: Sur les séries $\Sigma A_\nu/(z-\alpha_\nu)$. — S. Sarantopoulos: Sur un théorème de M. Landau. — E. Cartan: Sur une généralisation de la notion de courbure de Riemann et les espaces à torsion. — *6 mars.* — G. Julia: Nouvelles applications de la représentation conforme aux équations différentielles. — H. Villat: Sur un problème nouveau concernant les fonctions analytiques et la représentation conforme. — R. Lagrange: Sur l'application des variétés d'ordre p dans un espace x d'ordre n. — B. Gambier: Correspondances ponctuelles déduites de l'étude des trois formes quadratiques fonda-

mentales de deux surfaces. — G. Prevost: Détermination des coefficients dans le développement des polynomes de Laplace d'une fonction de deux variables. — *15 mars.* — K. Popoff: Sur l'équation générale du type elliptique. — M. Lecat: Sur les cayléens et les bicayléens anormaux. — C. Guichard: Sur les réseaux qui sont harmoniques d'une congruence C. L. et conjugués à une autre congruence C. L. — E. Cartan: Sur les espaces généralisés et la théorie de la relativité. — E. Bompiani: La géométrie des espaces courbes et le tenseur d'énergie d'Einstein. — *20 mars.* — G. Mittag-Leffler: Le théorème de Cauchy sur l'intégrale d'une fonction entre des limites imaginaires. — J. Drach: Sur la détermination des équations différentielles du second ordre intégrables par quadratures. — G. Julia: Sur la transformation des substitutions rationnelles en substitutions linéaires. — Stoïlow: Sur l'intégrale définie et la mesure des ensembles. — *27 mars.* — P. Montel: Sur un théorème d'algèbre. — E. Goursat: Sur une théorie classique de Cauchy. — G. Giraud: Sur les équations non linéaires aux dérivées partielles du second ordre ou type elliptique. — P. Levy: Sur la loi de Gauss dans la théorie des erreurs. — E. Cartan: Sur les espaces conformes généralisés et l'Univers optique. — *3 avril.* — N.-E. Nœrlund: Sur la formule d'interpolation de Stirling. — B. Gambier: Surfaces isothermiques à représentation sphérique isotherme. — J. Le Roux: La courbure de l'espace. — St. Millot: Sur les balances à calcul. — *10 avril.* — E. Vessiot: Sur la géométrie conforme des systèmes de cercles. — A. Myller: Quelques propriétés des surfaces réglées en liaison avec la théorie du parallélisme de M. Levi-Civita. — E. Borel: Définition arithmétique d'une distribution de masses s'étendant à l'infini et quasi-périodique, avec une densité moyenne nulle. — M. Hamy: Sur l'approximation des grands nombres. — Ivar Fredholm: Une application de la théorie des équations intégrales. — M. Janet: Sur les formes canoniques invariantes des systèmes algébriques et différentiels. — T. Carleman: Démonstration d'un théorème de M. Borel. — E. Borel: Remarque sur la note de M. Carleman. — M. Sauger: Sur une coïncidence remarquable dans la théorie de la relativité. — *18 avril.* — G. Valiron: Sur les fonctions entières d'ordre entier. — E. Goursat: Sur le problème de la poussée des terres. — E. Belot: Sur le rôle des milieux nébuleux dans la dynamique des systèmes stellaire et planétaire. — E. Borel: Hypothèses physiques et hypothèses géométriques. — *24 avril.* — B. Gambier: Sur les correspondances ponctuelles de deux surfaces et sur une classe de surfaces analogues aux surfaces isothermiques. — E. Vessiot: Sur les surfaces cerclées. — E. Cartan: Sur les équations de structure des espaces généralisés et l'expression analytique du tenseur d'Einstein. — E. Goursat: Sur la théorie des invariants intégraux. — N.-E. Nœrlund: Sur la formule d'interpolation de Newton. — *1er mai.* — G. Mittag-Leffler: Le théorème de Cauchy sur l'intégrale d'une fonction entre les limites imaginaires. — E.-O. Lovett: Généralisation d'un problème de Sophus Lie dans la géométrie des transformations de contact. — J. Chazy: Sur les vérifications astronomiques de la théorie de la relativité. — J. Trousset: Les lois de Képler et les orbites relativistes. — P. Painlevé: Remarques sur les deux communications précédentes. — P. Fatou: Sur le mouvement d'une planète dans un milieu résistant. — P. Dienes: Sur la connexion du champ tensoriel. — G. Guillemin: Sur l'équilibre des talus en terre cohérente. — P. Painlevé: La théorie classique et la théorie einsteinienne de la gravitation. — *8 mai.* — C. Guichard: Sur les lignes asymp-

totiques des surfaces. Etude d'un cas particulier. — P. Montet: Sur un nouveau théorème d'algèbre. — J. Sudria: Sur une démonstration et la généralisation du théorème de Menabrea. — D. Riabouchinski: Sur quelques cas de mouvements plans des fluides autour de solides avec tourbillons. Th. De Donder: Champ électromagnétique compatible avec le champ gravifique correspondant. — *15 mai.* — G. Guillaumin: Sur les équations de l'équilibre limite des corps cohérents. — J. Chazy: Sur le mouvement d'une planète dans un milieu résistant. — *22 mai.* — S. Sarantopoulos: Sur les fonctions croissantes positives. — Th. Varopoulos: Sur quelques théorèmes de M. Borel. — R. Nevanlinna: Sur les relations qui existent entre l'ordre de croissance d'une fonction monogène et la densité de ses zéros. — J. Andrade: Sur trois classes de mouvements vibratoires non-entretenus. — M. D'Ocagne: Vue d'ensemble sur les machines à calculer. — P. Fatou: Sur le mouvement d'une planète dans un milieu résistant. — *29 mai.* — F.-H. Murray: Sur le tracé des arcs de cercles de grand rayon. — Riquier: Sur les figures intégrales singulières des systèmes partiels du premier ordre auxquels s'applique la méthode d'intégration de Jacobi. — J.-W. Lindeberg: Sur la loi de Gauss. — P.-J. Myrberg: Sur les fonctions automorphes de plusieurs variables indépendantes. — S. Zaremba: Sur la conception relativiste de l'espace. — *12 juin.* — Riquier: Sur les figures intégrales singulières des systèmes positifs du premier ordre n'impliquant qu'une seule inconnue.—Torsten Carleman: Sur les séries asymptotiques. — G. Valiron: Sur la méthode d'approximation d'Hermite. — *19 juin.* — Gosse: Des équations aux dérivées partielles du second ordre intégrables par la méthode de Darboux. — Riquier: Sur l'élimination des constantes arbitraires. — Bertrand Gambier: Surfaces applicables avec égalité des rayons de courbure principaux. — *26 juin.* — H. Mineur: Sur certaines équations fonctionnelles algébriques. — T. Carleman: Sur le problème des moments. — P. Lévy: Sur la loi de Gauss. — W. Margoulis: Les abaques à transparent orienté. — M. D'Ocagne: Sur les nomogrammes à transparent orienté. — G. Bertrand: La loi de Riemann, le périhélie de Mercure et la déviation de la lumière.

3. Thèse de doctorat:

Nous signalons sous cette rubrique les thèses de doctorat dont un exemplaire imprimé aura été adressé à la Rédaction, 110 *Florissant, Genève.*

Allemagne. — *Université de Giessen.* — H. Lotz. — *Zur Geometrie der dreifach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten von konstantem Krümmungsmass.* — (Mitteilungen des Math. Seminars der Universität Giessen VII. Heft.). — 1 fasc. in-8° de 36 p. ; 1 fr.

F. Kammerer. — *Zur Flächentheorie im n-fach ausgedehnten Raume.* (Mitteilungen des Math. Seminars der Universität Giessen), IX Heft, 1 fasc. in-8° de 24 p., 1 fr.

Suisse. — *Université de Genève.* — J. Kopeliowitch.— *Théorie des Quaternions.* — 1 vol. in-8° de 74 p. avec 13 figures.

TABLE DES MATIÈRES

ARTICLES GÉNÉRAUX

Méthodologie et Notes diverses.

Organisation de l'Enseignement.

Histoire et Philosophie.

MÉLANGES ET CORRESPONDANCES

CHRONIQUE

Articles divers.

Nécrologie.

NOTES ET DOCUMENTS

BIBLIOGRAPHIE

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

1. *Livres nouveaux.*

2. *Publications périodiques.*

3. *Thèses de doctorat.*

TABLE DE NOMS D'AUTEURS

Cette table comprend les auteurrs d'articles généraux ou d'articles de chronique, de lettres ou notes insérées dans la correspondance ou de comptes rendus bibliographiques.
Les numéros qui suivent chaque nom renvoient aux pages du volume.

Erratum.

N° 5. page 295, 13[e] ligne: Lire: *Eisenstein* au lieu de *Einstein.*

L'ENSEIGNEMENT
MATHÉMATIQUE

MÉTHODOLOGIE ET ORGANISATION DE L'ENSEIGNEMENT
PHILOSOPHIE ET HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES
CHRONIQUE SCIENTIFIQUE — MÉLANGES — BIBLIOGRAPHIE

REVUE INTERNATIONALE

PARAISSANT TOUS LES DEUX MOIS

Fondée en 1899 par C.-A. LAISANT et H. FEHR

DIRIGÉE PAR

H. FEHR
Docteur ès sciences
Professeur à l'Université
de Genève.

A. BUHL
Docteur ès sciences
Professeur à l'Université
de Toulouse.

VINGT-TROISIÈME ANNÉE

1923

PARIS
GAUTHIER-VILLARS & Cie, ÉDITEURS

GENÈVE
GEORG & Cie, ÉDITEURS

1923

L'ENSEIGNEMENT
MATHÉMATIQUE

GENÈVE

IMPRIMERIE ALBERT KUNDIG

MÉTHODES D'APPROXIMATION DANS LE CALCUL DU NOMBRE DES POINTS A COORDONNÉES ENTIÈRES [1]

PAR

J. G. VAN DER CORPUT (Fribourg, Suisse et Groningue).

---

1. — *La méthode de Gauss.*

Dans les écrits laissés par Gauss [2] on trouva les fragments de deux articles qu'il avait l'intention de remettre à la Société des sciences de Göttingue dans les années 1834 et 1837, mais qu'il n'a pas achevés. Dans ces fragments Gauss déterminait au moyen des points à coordonnées entières l'aire d'une figure, et spécialement d'un cercle dont le centre coincide avec l'origine des coordonnées. Si le rayon est égal à 10, $10\sqrt{10}$, 100 ou $100\sqrt{10}$, Gauss a calculé que le cercle contient

$$317 , \quad 3149 , \quad 31\,417 \quad \text{ou} \quad 314\,197$$

points entiers (c'est-à-dire points à coordonnées entières), tandis que l'aire du cercle, à une demi-unité près, a pour valeur

$$314 , \quad 3142 , \quad 31\,416 \quad \text{ou} \quad 314\,159 ,$$

de sorte que la différence est relativement petite. Dans cet article, lorsque nous parlerons des points entiers d'une figure, nous voulons parler des points à coordonnées entières situés à l'intérieur et sur le contour de cette figure.

---

[1] Conférence donnée à la première Réunion mathématique des Universités de la Suisse romande, à Genève, le 17 février 1923, par M. J. G. van der Corput, professeur à l'Université de Fribourg (Suisse). — Depuis le semestre d'été 1923 M. van der Corput occupe l'une des chaires de mathématiques de l'Université de Groningue. *Réd.*

[2] *Werke*, II, p. 269-291.

Nous pouvons nous attendre à ce que le nombre des points entiers d'une figure soit approximativement égal à l'aire de cette figure. Etant supposé que le contour de la figure a une longueur déterminée l, Gauss démontre que la différence entre ces deux quantités est comprise entre $-4(l+1)$ et $4(l+1)$. La démonstration qu'il en a donnée est la suivante:

Soit r le nombre des carrés tels que leur centre ait des coordonnées entières, leurs côtés aient l'unité pour longueur, et à l'intérieur desquels se trouve au moins un point du contour. Le nombre des points entiers de la figure est plus petit que l'aire de la figure augmentée de r, mais plus grand que cette aire, diminuée de r, de sorte que la différence entre le nombre des points entiers et l'aire de la figure est comprise entre $-r$ et r. Une portion du contour qui appartient à plus de quatre carrés différents contient au moins deux points distants de plus d'une unité. Si donc r est plus grand que $4n$, n étant entier, il y a sur le contour $n+1$ points tels que la distance entre deux points consécutifs est plus grande que 1. Alors la longueur du contour est plus grande que n, et comme nous pouvons choisir $4(n+1)$ plus grand ou égal à r, r est plus petit que $4(l+1)$, et la proposition de Gauss est démontrée.

Nous pouvons considérer comme cas particulier celui du cercle $u^2+v^2=x$, u et v étant des coordonnées rectangulaires. Soit $P(x)$ la différence entre le nombre des points entiers du cercle et son aire. En vertu de la proposition de Gauss la valeur absolue de $P(x)$ est plus petite que $4(2\pi\sqrt{x}+1)$. $P(x)$ est donc au plus du même ordre que la fonction $\sqrt{x}$, ce que l'on écrit

$$P(x) = O(\sqrt{x}) ,$$

O désignant le symbole connu de Landau.

Nous allons traiter maintenant un autre problème, celui des diviseurs. Le nombre $d(n)$ des diviseurs du nombre entier positif n ne peut pas être représenté approximativement par une fonction simple. Par contre on peut trouver une expression simple pour représenter

$$D(x) = \sum_{\substack{1 \leq n \leq x \\ n \text{ entier}}} d(n)$$

d'une manière approchée. En effet, sur l'hyperbole équilatère $uv = n$ se trouvent exactement $d(n)$ points entiers, car à chaque diviseur δ de n correspond un point à coordonnées entières δ et $\frac{n}{\delta}$ et réciproquement. La fonction $D(x)$ est donc égale au nombre des points entiers situés sur l'une des hyperboles $uv = 1, 2, ..., E(x)$, $E(x)$ désignant la partie entière de x. Tous ces points se trouvent dans le domaine D_1 limité par l'hyperbole $uv = x$ et par les deux droites $u = 1$, $v = 1$, et réciproquement tout point entier contenu dans ce domaine se trouve sur l'une de ces hyperboles. La fonction $D(x)$ est donc égale au nombre des points entiers du domaine D_1. L'aire de ce domaine est égale à

$$\int_1^x \left(\frac{x}{u} - 1\right) du = x \log x - x + 1 ,$$

et le contour a une longueur plus petite que $4x$, de sorte qu'en vertu de la proposition de Gauss

$$D(x) - (x \log x - x + 1)$$

est contenu entre $-4(4x + 1)$ et $4(4x + 1)$; la fonction $x \log x$ représente donc $D(x)$ avec une erreur dont l'ordre ne surpasse pas celui de x, donc

$$D(x) = x \log x + O(x) . \qquad (1)$$

2. — *La méthode de Dirichlet.*

Dirichlet[1] a réussi à améliorer considérablement ce résultat de la manière suivante:

Par le point $(\sqrt{x}, \sqrt{x})$, qui se trouve sur l'hyperbole équilatère on construit une parallèle à l'axe des u et une parallèle à l'axe des v, de sorte que le domaine D_1 en question est divisé en trois parties. Une de ces parties est un carré, et l'on peut immédiatement calculer le nombre des points entiers qui y sont contenus. Les deux autres parties contiennent le même nombre de points entiers par raison de symétrie, et comme on connaît le nombre

[1] *Berl. Abh.* (1849), p. 69-83; *Werke*, II, p. 49-66.

des points entiers du carré, il ne reste donc à calculer que le nombre des points entiers du domaine D_2 limité par l'hyperbole équilatère $uv = x$ et par les trois droites $v = 1$, $u = 1$, $u = \sqrt{x}$. Les points entiers de D_2 se trouvent tous sur l'une des droites $u = 1, 2, \ldots, E(\sqrt{x})$, et la droite $u = h$ contient dans D_2 exactement $E\left(\frac{x}{h}\right)$ points entiers, de sorte que D_2 contient

$$\sum_{\substack{1 \leqq h \leqq \sqrt{x} \\ h \text{ entier}}} E\left(\frac{x}{h}\right)$$

points entiers. Pour calculer approximativement $D(x)$, il suffit donc d'évaluer cette somme. Comme on peut calculer la somme

$$\sum_{\substack{1 \leqq h \leqq \sqrt{x} \\ h \text{ entier}}} \left(\frac{x}{h} - \frac{1}{2}\right)$$

au moyen de la formule sommatoire d'Euler avec le degré d'exactitude voulu, on n'a qu'à évaluer la somme

$$\sum_{\substack{1 \leqq h \leqq \sqrt{x} \\ h \text{ entier}}} \left(\frac{x}{h} - E\left(\frac{x}{h}\right) - \frac{1}{2}\right) .$$

Comme chaque terme est en valeur absolue $\leqq \frac{1}{2}$, la valeur absolue de la dernière somme est $\leqq \frac{1}{2}\sqrt{x}$, de sorte que l'on trouve la valeur de $D(x)$ avec une erreur qui est au plus du même ordre que $\sqrt{x}$. Si l'on pose

$$\Delta(x) = D(x) - x(\log x + 2C - 1) ,$$

C désignant la constante d'Euler, le résultat trouvé par Dirichlet est que l'ordre de $\Delta(x)$ ne surpasse pas celui de $\sqrt{x}$, donc

$$\Delta(x) = O(\sqrt{x}) . \tag{2}$$

Il est facile de généraliser ce que nous venons de dire pour l'appliquer à un domaine à k dimensions. Alors on remplacera la figure $u \geqq 1$, $v \geqq 1$, $uv \leqq x$ par le domaine

$$u_1 \geqq 1 , \quad u_2 \geqq 1 , \ldots , \quad u_k \geqq 1 , \quad u_1 u_2 \ldots u_k \leqq x ,$$

et $d(n)$ par le nombre $d_k(n)$ des décompositions de n en produit de k facteurs; par exemple $d_4(4) = 10$, parce que 4 peut être décomposé de 4 manières différentes en produit des 4 facteurs 4, 1, 1, 1 et de 6 manières différentes en produit des 4 facteurs 2, 2, 1, 1. Comme M. Piltz[1] l'a montré, on peut donner à la fonction

$$D_k(x) = \sum_{\substack{1 \leq n \leq x \\ n \text{ entier}}} d_k(n)$$

la forme suivante

$$D_k(x) = x \sum_{h=0}^{k-1} b_{k,h} (\log x)^h + \Delta_k(x) ,$$

où les coefficients $b_{k,h}$ ne dépendent pas de x, et où

$$\Delta_k(x) = O\left(x^{\frac{k-1}{k}} (\log x)^{k-2}\right) .$$

Le résultat donné par la formule (2) est naturellement bien meilleur que celui donné par la formule (1). Cependant Dirichlet a réussi à améliorer encore son propre résultat, comme on le sait par une lettre qu'il écrivit à Kronecker peu avant sa mort[2]:

« Seit unserm neulichen Gespräch auf der Fahrt von Ilsenburg nach Harzburg ist es mir gelungen, die Funktion $D(x)$, die ich bisher nur mit einem Fehler der Ordnung $\sqrt{x}$ angeben konnte, bedeutend in die Enge zu treiben. Die Auffindung des hiezu dienenden Mittels, welches aller Wahrscheinlichkeit nach auch auf die folgenden Fälle anwendbar seyn wird, macht mir zwar grosses Vergnügen, kommt mir aber in sofern zu ungelegener Zeit als ich dadurch von der Vollendung der hydrodynamischen Abhandlung abgezogen werde, welche doch endlich fertig werden muss. »

Quel résultat Dirichlet a-t-il trouvé et quelle méthode a-t-il employée, nous ne le savons pas et probablement nous ne le saurons jamais, parce que c'est un des secrets que Dirichlet enlevé en pleine activité, a emporté avec lui. C'est d'autant plus

---

[1] Thèse de doctorat (1881), Berlin.

[2] LEJEUNE-DIRICHLET, *Werke*. II, p. 407. Dirichlet emploie une autre notation pour la fonction $D(x)$.

difficile de savoir quelle méthode il a employée, que nous connaissons déjà cinq méthodes générales pour améliorer les résultats précédents, une méthode géométrique, une méthode arithmétique et trois méthodes analytiques, dont une découle de l'étude des variables complexes et les deux autres de l'étude des variables réelles [1].

3. — *La méthode de Voronoï.*

C'est Voronoï [2] qui a découvert la méthode géométrique (1903). Comme Dirichlet, il décompose le domaine D_1, mais il le fait d'une autre manière. Il construit q tangentes à l'hyperbole équilatère $uv = x$, de sorte que le domaine est décomposé en un polygone (de $q + 2$ côtés) et en $q + 1$ segments. Il calcule approximativement le nombre des points entiers de chacun de ces domaines; les points entiers qui pourraient se trouver sur l'une des tangentes, sont comptés ou avec le polygone ou avec l'un des segments. Il choisit le nombre q et la direction des tangentes tels que l'erreur soit la plus petite possible. Son résultat est

$$\Delta(x) = O(\sqrt[3]{x} \log x) \; ; \qquad (3)$$

il est donc bien meilleur que celui de Dirichlet.

Avec la méthode de Dirichlet le domaine est décomposé en 3 parties, avec la méthode de Voronoï en $q + 2$ parties, et ce qu'il y a d'intéressant dans cette dernière méthode est que q croît indéfiniment avec x.

Voronoï s'est rendu compte que sa méthode pouvait être appliquée non seulement dans le problème des diviseurs, mais dans bien d'autres problèmes; on le sait par la fin de l'introduction de son travail:

« Il est aisé de généraliser, dit-il, la méthode exposée dans ce mémoire et de l'appliquer aux recherches des valeurs asymptotiques de différentes sommes multiples. »

---

[1] Nous ne considérerons pas la méthode de Wigert (*Math. Zs.*, 5 (1919), p. 310-318), parce que jusqu'à présent on ne l'a employée que dans le probleme du cercle, d'autant plus que l'ordre de l'erreur trouvé par M. Wigert est un peu plus grand que l'ordre trouvé par les autres méthodes.

[2] *J. für Math.*, 126 (1903), p. 241-282.

M. Sierpiński[1] applique la méthode de Voronoï au problème du cercle, et il trouve

$$P(x) = O(\sqrt[3]{x}) , \tag{4}$$

donc un résultat bien meilleur que celui de Gauss.

4. — *La méthode de Piltz.*

C'est M. Piltz qui a trouvé la méthode arithmétique (1881). Comme nous l'avons déjà fait remarquer à propos de la méthode de Dirichlet, il suffit dans le problème des diviseurs de s'occuper de la somme

$$\sum_{\substack{1 \leq h \leq \sqrt{x} \\ h \text{ entier}}} \psi\left(\frac{x}{h}\right) ,$$

où pour abréger on a posé $\psi(v) = v - E(v) - \frac{1}{2}$.

Dirichlet se sert de la borne supérieure triviale $\frac{1}{2}\sqrt{x}$ pour la valeur absolue de cette somme, mais M. Piltz a remarqué que, si x est grand, les termes négatifs atténuent l'influence des termes positifs. Il décompose l'intervalle $(1, \sqrt{x})$ en intervalles partiels, et il montre qu'en choisissant d'une manière appropriée les points de division, la contribution de chaque intervalle partiel à la somme en question est d'un ordre plus petit que la longueur de l'intervalle, d'où l'on déduit que la valeur absolue de la somme considérée est d'un ordre inférieur à $\sqrt{x}$.

L'idée fondamentale de la méthode de Piltz est donc de réunir beaucoup de termes

$$\psi\left(\frac{x}{t}\right) + \psi\left(\frac{x}{t+1}\right) + \dots + \psi\left(\frac{x}{t+B-1}\right) ,$$

de telle façon que la valeur absolue de cette somme reste cependant relativement petite. Pour cela on doit pouvoir trouver une borne supérieure de cette valeur absolue, ce qui se fait de la façon suivante:

[1] *Prace mat. fiz.*, 17 (1906), p. 77-114.

On choisit le nombre positif A ne contenant aucun des facteurs de B tel que la plus grande valeur g de

$$\left|\frac{Bx}{t+h} - \frac{Bx}{t} - Ah\right|,$$

où h est un des nombres 0, 1, ..., B — 1, soit la plus petite possible. On a alors

$$\left|\frac{x}{t+h} - \frac{x}{t} - \frac{Ah}{B}\right| \leq \frac{g}{B}.$$

Si g est petit, $\frac{x}{t+h}$ est à peu près égal à $\frac{x}{t} + \frac{Ah}{B}$, donc la somme en question est à peu près égale à

$$\sum_{h=0}^{B-1} \psi\left(\frac{x}{t} + \frac{Ah}{B}\right);$$

plus exactement on a

$$\left|\sum_{h=0}^{B-1} \psi\left(\frac{x}{t+h}\right) - \sum_{h=0}^{B-1} \psi\left(\frac{x}{t} + \frac{Ah}{B}\right)\right| < 4g + 2. \qquad (5)$$

Calculons maintenant la somme

$$\sum_{h=0}^{B-1} \psi\left(\frac{x}{t} + \frac{Ah}{B}\right),$$

c'est-à-dire la somme

$$\sum_{h=0}^{B-1} \psi\left(\frac{Ah + c}{B}\right), \qquad \text{où} \quad c = \frac{Bx}{t}.$$

A chaque nombre entier h dans l'intervalle $0 \leq h \leq B - 1$ correspond un nombre entier k dans le même intervalle et tel que la différence

$$Ah + E(c) - k$$

soit divisible par B, et la réciproque est vraie aussi, A ne contenant aucun des facteurs de B. $\psi(t)$ étant une fonction de période 1, on a

$$\psi\left(\frac{Ah + c}{B}\right) = \psi\left(\frac{k + c - E(c)}{B}\right) = \frac{k + c - E(c)}{B} - \frac{1}{2}.$$

puisque la partie entière de $\frac{k + c - \mathrm{E}(c)}{\mathrm{B}}$ est égale à 0. On a donc

$$\sum_{h=0}^{\mathrm{B}-1} \psi\left(\frac{\mathrm{A}h + c}{\mathrm{B}}\right) = \sum_{k=0}^{\mathrm{B}-1}\left(\frac{k + c - \mathrm{E}(c)}{\mathrm{B}} - \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{\mathrm{B} - 1}{2} + c - \mathrm{E}(c) - \frac{\mathrm{B}}{2} = c - \mathrm{E}(c) - \frac{1}{2},$$

ce qui est en valeur absolue inférieur à 1. Il s'ensuit donc de (5)

$$\left|\sum_{h=0}^{\mathrm{B}-1} \psi\left(\frac{x}{t+h}\right)\right| < 4g + 3 .$$

C'est sur cette inégalité que repose la méthode de Piltz. Pour une valeur donnée de t on peut choisir A et B tels que le membre de droite de cette dernière inégalité est beaucoup plus petit que B, donc aussi beaucoup plus petit que la longueur de l'intervalle.

M. Piltz n'a jamais publié sa méthode. En 1901 il a écrit deux lettres à M. Landau, pour exposer son procédé et pour démontrer le théorème de Voronoï. Les démonstrations données dans ces lettres, ne sont pas exactes, et ce n'est que depuis quelques années que M. Landau [1] a réussi à en déduire l'approximation de Voronoï. Jusqu'à présent on n'a pu trouver aucun résultat meilleur avec cette méthode, quoique M. Piltz prétendît qu'il pouvait diminuer l'erreur, et la ramener à $\mathrm{O}\left(x^{\frac{1}{4}+\varepsilon}\right)$, quelque soit le nombre positif ε.

5. — *La méthode de Pfeiffer.*

Le sort de la méthode de Piltz ressemble un peu à celui de la troisième méthode que nous allons exposer, celle de Pfeiffer [2]. L'inventeur a, il est vrai, publié sa méthode (1886); mais son travail manquait tellement de clarté et de précision qu'il est resté sans influence sur le développement de la théorie analytique des nombres, jusqu'à ce que M. Landau [3] en 1912 eût trouvé

[1] *Gött. Nachr.* (1920), p. 13-32.
[2] *Jahresbericht der Pfeifferschen Lehr- und Erziehungs-Anstalt zu Jena* (1886).
[3] *Wien. Ber.* (IIa), 121 (1912), p. 2195-2332 ; 124 (1915), p. 469-505.

l'erreur dans la démonstration et l'eût remise en ordre. Cette méthode est basée sur l'étude des séries de Fourier. On considère l'intégrale

$$\Phi_m = \iint_D \varphi_m(u)\,\varphi_m(v)\,du\,dv \ ,$$

où l'on a posé

$$\varphi_m(u) = 1 + 2\sum_{h=1}^{m} \cos 2h\pi u \ ,$$

et où le domaine D satisfait à des conditions très générales. L'idée fondamentale de la méthode est que, pour m croissant indéfiniment, Φ_m tend vers le nombre des points entiers du domaine D, à condition que les points entiers, situés sur le contour de D, soient comptés d'une façon déterminée; par exemple, si le contour du domaine a une tangente en un point entier, on ne comptera ce point qu'à demi.

Avec la méthode de Pfeiffer, M. Landau démontre les résultats de Voronoï et de Sierpiński, donc (3) et (4) [1]. Dans le problème du cercle il en déduit non seulement une relation contenant le symbole O de Landau, mais encore une relation contenant le symbole Ω de Hardy-Littlewood. Il montre en effet que pour chaque nombre ε positif

$$P(x) = \Omega\left(x^{\frac{1}{4}-\varepsilon}\right)\ ^{2},$$

c'est-à-dire que pour x croissant indéfiniment le quotient

$$\frac{P(x)}{x^{\frac{1}{4}-\varepsilon}}$$

ne tend pas vers 0.

Si β ne dépend pas de x, la relation

$$P(x) = O\left(x^{\beta}\right)$$

est valable pour $\beta \geqq \frac{1}{3}$, d'après (4), mais fausse pour $\beta < \frac{1}{4}$.

---

[1] *Annali di Mat.* (Tortolini), Rome (3) 20 (1913), p. 1-28; *Gött. Nachr.* (1915), p. 148-160.
[2] *Wien. Ber.* (IIa) 124 (1915), p. 469-505.

En effet, si la relation était juste pour $\beta < \frac{1}{4}$, on pourrait choisir le nombre positif ε de telle façon que $\beta < \frac{1}{4} - \varepsilon$, et alors $\frac{P(x)}{x^{\frac{1}{4}-\varepsilon}}$ tendrait vers 0 pour x croissant indéfiniment. La limite inférieure de l'exposant β est donc contenue dans l'intervalle $\frac{1}{4} \leqq \vartheta \leqq \frac{1}{3}$. La détermination exacte de la limite inférieure est un des problèmes les plus intéressants de la théorie des nombres, mais on n'y est jusqu'ici pas encore arrivé.

M. Landau[1] applique aussi cette méthode à d'autres problèmes; entre autres il en déduit les approximations analogues pour une ellipse. D'autres applications ont été données par Cauer[2], Hammerstein[3] et moi-même[4].

Comme le fondement de la méthode de Pfeiffer est une identité, on ne doit pas s'étonner de pouvoir en déduire non seulement des approximations, mais aussi des identités. Par exemple, si x est un nombre positif, non entier, on trouve[5]

$$P(x) = \sqrt{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r(n)}{\sqrt{n}} J_1(2\pi\sqrt{nx}) \tag{6}$$

et[6]

$$\Delta(x) = \frac{1}{4} + \sqrt{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)}{\sqrt{n}} L(2\pi\sqrt{nx}), \tag{7}$$

où $r(n)$ désigne le nombre des solutions entières de $u^2 + v^2 = n$, et l'on a

$$L(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^x \cos xu \sin \frac{x}{u}\, du = Y_1(2x) - H_1(2x);$$

$J_1(x)$ est la première fonction de Bessel de premier ordre, $Y_1(x)$ est la deuxième solution habituelle de l'équation différentielle

[1] *Wien. Ber.* (IIa) 124 (1915), p. 469-505.
[2] Thèse de doctorat (1914), Gœttingue.
[3] Thèse de doctorat (1919), Gœttingue.
[4] *Nieuw Archief* (2) 13 (1920), p. 125-140.
[5] LANDAU. *Gött. Nachr.* (1920), p. 109-134.
[6] ROGOSINSKI. Thèse de doctorat (1922), Gœttingue.

de Bessel avec 1 comme paramètre, et $H_1(x)$ est la fonction cylindrique

$$H_1(x) = \frac{2}{\pi}\int_1^x \frac{te^{-xt}}{\sqrt{t^2-1}}\,dt\;.$$

Si x est entier, on doit remplacer dans (6) et (7) $P(x)$ par $P(x) - \frac{1}{2}r(x)$, et $\Delta(x)$ par $\Delta(x) - \frac{1}{2}d(x)$.

Des relations (6) et (7), qui ont été découvertes par Voronoï [1] et Hardy [2], on déduit facilement les relations déjà mentionnées plusieurs fois de Voronoï et de Sierpiński [3].

Comme je l'ai déjà fait remarquer, l'ordre de grandeur exact de $P(x)$ n'est pas connu, d'ailleurs l'ordre de $\Delta(x)$ ne l'est pas non plus. Par contre l'ordre exact des valeurs moyennes des fonctions $(\Delta(t))^2$ et $(P(t))^2$ dans l'intervalle $1 \leqq t \leqq x$ est connu. En effet comme M. Cramér [4] l'a déduit de (6) et (7) (il s'est servi même de deux relations plus simples), on a pour chaque nombre positif ε

$$\int_1^x (\Delta(t))^2\,dt = \gamma_1 x^{\frac{3}{2}} + O\left(x^{\frac{5}{4}+\varepsilon}\right)$$

et

$$\int_1^x (P(t))^2\,dt = \gamma_2 x^{\frac{3}{2}} + O\left(x^{\frac{5}{4}+\varepsilon}\right),$$

où γ_1 et γ_2 désignent des nombres positifs constants. La valeur moyenne des carrés des fonctions $\Delta(x)$ et $P(x)$ a donc le même ordre que la fonction $\sqrt{x}$, de sorte que $\frac{\Delta(x)}{\sqrt[4]{x}}$ et $\frac{P(x)}{\sqrt[4]{x}}$ ne tendent pas vers zéro pour x croissant indéfiniment. Nous pouvons donc écrire

$$\Delta(x) = \Omega\left(\sqrt[4]{x}\right) \quad \text{et} \quad P(x) = \Omega\left(\sqrt[4]{x}\right).$$

---

[1] *Ann. de l'Ec. Norm.* (3) 21 (1904), p. 207-268 et p. 459-534; *Verh. III. intern. Math. Kongresses in Heidelberg* (1904), p. 241-245. Cf. Hardy, *Lond. M. S. Proc.* (2) 15 (1916), p. 1-25 et Sierpiński, *Prace mat.-fiz.*, 18, p. 1-59.

[2] *Quart. J.*, 46 (1915), p. 263-283.

[3] Landau, *Gött. Nachr.* (1915), p. 161-171; *Münch. Ber.* (1915), p. 317-328; *Math. Zs.* 5 (1919), p. 319-320.

[4] *Math. Zs.* 15 (1922), p. 201-210.

Si l'on emploie l'inégalité connue de Schwarz

$$\left(\int_a^b f(t)\,dt\right)^2 \leqq (b-a)\int_a^b f^2(t)\,dt ,$$

où l'on suppose $b \geqq a$, on trouve que la valeur moyenne des fonctions $|\Delta(x)|$ et $|P(x)|$ est au plus du même ordre que $\sqrt[4]{x}$.

6. — *La méthode de Landau.*

La méthode basée sur l'étude des fonctions de variables complexes s'appuie sur le lien qui existe entre le nombre des points entiers de certains domaines et la convergence de certaines séries de Dirichlet. Nous n'avons à considérer ici que les séries de Dirichlet ordinaires, c'est-à-dire celles du type

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} ,$$

les a_n étant des coefficients constants et s une variable complexe.

Si cette série converge en un point s_0, elle converge en chaque point s ayant une partie réelle plus grande. Pour le démontrer, posons

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{a_n}{n^{s_0}} = F_k , \qquad F_0 = 0 ,$$

donc

$$\frac{a_n}{n^{s_0}} = F_n - F_{n-1} \qquad (n \geqq 1) .$$

Si v et w sont des nombres entiers ($w > v \geqq 1$), on a

$$\sum_{n=v}^{w} \frac{a_n}{n^s} = \sum_{n=v}^{w} \frac{F_n - F_{n-1}}{n^{s-s_0}} = \sum_{n=v}^{w} \frac{F_n}{n^{s-s_0}} - \sum_{n=v-1}^{w-1} \frac{F_n}{(n+1)^{s-s_0}} ,$$

donc

$$\sum_{n=v}^{w} \frac{a_n}{n^s} = \sum_{n=v}^{w-1} F_n\left(\frac{1}{n^{s-s_0}} - \frac{1}{(n+1)^{s-s_0}}\right) + \frac{F_w}{w^{s-s_0}} - \frac{F_{v-1}}{v^{s-s_0}} . \qquad (8)$$

On a

$$\frac{1}{n^{s-s_0}} - \frac{1}{(n+1)^{s-s_0}} = (s - s_0)\int_n^{n+1} \frac{du}{u^{s-s_0+1}},$$

donc

$$\left|\frac{1}{n^{s-s_0}} - \frac{1}{(n+1)^{s-s_0}}\right| \leq |s - s_0| \cdot \int_n^{n+1} \frac{du}{u^{p+1}}, \qquad (9)$$

p désignant la valeur réelle de $s - s_0$. En vertu de la convergence de la série en question en s_0, le nombre F_n est borné, donc en valeur absolue plus petit qu'un nombre constant A; on a donc d'après (8) et (9)

$$\left|\sum_{n=v}^{w} \frac{a_n}{n^s}\right| < A\,|s - s_0| \cdot \int_v^{w} \frac{du}{u^{p+1}} + \frac{A}{w^p} + \frac{A}{v^p}. \qquad (10)$$

Comme p est positif (parce que la partie réelle de s est plus grande que celle de s_0), l'expression finale tend vers 0 pour v croissant indéfiniment, de sorte que la série de Dirichlet en question converge au point s.

Il s'ensuit que pour une série de Dirichlet, on a trois cas possibles: convergence en chaque point, comme par exemple pour la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{n!}}{n^s};$$

divergence en chaque point, comme par exemple pour la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^s};$$

ou bien il y a une droite parallèle à l'axe imaginaire telle que la série diverge à sa gauche et converge à sa droite. L'abscisse de cette droite s'appelle l'abscisse de convergence de la série, et il y a une relation simple entre cette abscisse α et l'ordre de grandeur de la fonction

$$S(x) = \sum_{1 \leq n \leq x} a_n,$$

En effet, si $\alpha \geqq 0$, on a pour chaque nombre ε positif

$$S(x) = O(x^{\alpha+\varepsilon}) ,$$

et inversément, si

$$S(x) = O(x^{\beta}) , \tag{11}$$

l'abscisse α de convergence est $\leqq \beta$. Pour démontrer la première de ces propriétés, nous appliquerons l'inégalité (10) en y posant $s = 0$, $\nu = 1$, $w = E(x)$, de sorte que le membre de gauche de cette inégalité est égale à la valeur absolue de $S(x)$. Nous devons poser $s_0 = \alpha + \varepsilon$, parce que la série converge en ce point ; alors $p = -(\alpha + \varepsilon)$, donc

$$|S(x)| < A.(\alpha+\varepsilon)\int_1^x u^{\alpha+\varepsilon-1}\,du + Ax^{\alpha+\varepsilon} + A = 2Ax^{\alpha+\varepsilon} .$$

Pour démontrer la seconde propriété, il suffit de montrer que la série de Dirichlet converge pour chaque nombre réel $s > \beta$, c'est-à-dire il suffit de montrer que pour chaque nombre $s = \beta + \varepsilon\,(\varepsilon > 0)$ le membre de gauche de la relation (8) tend vers 0, si ν croît indéfiniment. Posons $s_0 = 0$, donc $p = s - s_0 = \beta + \varepsilon$. Le nombre F_n est égal à $S(n)$ et d'après (11) il existe un nombre constant A tel que la valeur absolue de F_n est inférieure à An^{β} et à $A(n+1)^{\beta}$, donc inférieure à u^{β}, u désignant un nombre quelconque dans l'intervalle $n \leqq u \leqq n+1$.

Il s'ensuit

$$|F_n|.\int_n^{n+1}\frac{du}{u^{p+1}} < A\int_n^{n+1} u^{\beta}.\frac{du}{u^{\beta+\varepsilon+1}} = A\int_n^{n+1}\frac{du}{u^{\varepsilon+1}} .$$

D'après (8) et (9) on a

$$\left|\sum_{n=\nu}^{w}\frac{a_n}{n^s}\right| < A.|\beta+\varepsilon|.\int_\nu^w\frac{du}{u^{\varepsilon+1}} + \frac{A}{w^{\varepsilon}} + \frac{A}{\nu^{\varepsilon}} ,$$

et l'expression finale tend en effet pour chaque nombre positif ε vers 0, si ν croît indéfiniment.

De ces considérations on déduit un lien entre nos problèmes et la convergence de certaines séries de Dirichlet. Comme

exemple nous prendrons le problème du cercle. Le nombre des points entiers du cercle $u^2 + v^2 = x$ est égal à la somme

$$\sum_{0 \leqq n \leqq x} r(n) ,$$

$r(n)$ désignant le nombre des solutions entières de l'équation $u^2 + v^2 = n$. D'après le résultat de M. Sierpiński la fonction πx représente cette somme avec une erreur dont l'ordre ne surpasse pas celui de $\sqrt[3]{x}$, donc

$$\sum_{\substack{1 \leqq n \leqq x \\ n \text{ entier}}} (r(n) - \pi) = O\left(x^{\frac{1}{3}}\right) ,$$

de sorte que la série de Dirichlet

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r(n) - \pi}{n^s}$$

a une abscisse de convergence $\leqq \frac{1}{3}$. Si nous pouvons démontrer directement ce théorème, nous aurons montré que pour chaque nombre ε positif nous avons la relation

$$\sum_{\substack{1 \leqq n \leqq x \\ n \text{ entier}}} (r(n) - \pi) = O\left(x^{\frac{1}{3}+\varepsilon}\right) ,$$

donc

$$P(x) = \sum_{\substack{1 \leqq n \leqq x \\ n \text{ entier}}} r(n) - \pi x = O\left(x^{\frac{1}{3}+\varepsilon}\right) .$$

M. Landau[1] a publié en 1912 une méthode au moyen de laquelle on peut trouver une démonstration directe dans ce cas et dans bien d'autres. Cette méthode est applicable pour des domaines à k dimensions pour lesquels la série correspondante de Dirichlet satisfait entre autres à une équation fonctionnelle analogue à celle de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann. Il applique cette

[1] *Gött. Nachr.* (1912), p. 687-771; (1915), p. 209-243; (1917), p. 96-101.

méthode entre autres [1] aux problèmes concernant l'ellipsoïde à k dimensions [2].

La méthode de Landau se sert, il est vrai, de propositions exigeant des connaissances mathématiques assez profondes, mais elle conduit parfois très rapidement au but. Par exemple M. Landau [3] n'a besoin que de 2 pages pour démontrer la proposition de Sierpiński

$$P(x) = O\left(\sqrt[3]{x}\right),$$

tandis que M. Sierpiński [4] a besoin d'environ 40 pages pour la démonstration du même théorème par la méthode de Voronoï.

Un des grands avantages de l'emploi des variables complexes est qu'il conduit non seulement à des résultats contenant le symbole O, mais encore à des résultats contenant Ω.

MM. Landau [5], Hardy [6], Wigert [7] et Cramér [8] ont appliqué la théorie des nombres complexes au problème des diviseurs et à celui du cercle. M. Hardy a montré:

$$P(x) = \Omega\left(\sqrt[4]{x \log x}\right) \quad \text{et} \quad \Delta(x) = \Omega\left(\sqrt[4]{x \log x}\, \log \log x\right);$$

si α_k désigne la limite inférieure de l'exposant β^k pour lequel la relation

$$\Delta_k(x) = O\left(x^{\beta_k}\right)$$

est encore juste, on a

$$\frac{1}{4} \leqq \alpha_2 \leqq \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{3} \leqq \alpha_3 \leqq \frac{1}{2}, \quad \frac{k-1}{2k} \leqq \alpha_k \leqq \frac{k-2}{k} \qquad (k \geqq 4).$$

En admettant l'hypothèse de Riemann que toutes les racines

---

[1] *Gött. Nachr.* (1917), p. 102–111 ; *Einführung in die elementare und analytische Theorie der algebraischen Zahlen und der Ideale* (1918), p. 131 ; *Math. Zs.*, 2 (1918), p. 52–154.

[2] *Berl. Ber.* (1915), p. 458–476 ; *Wien. Ber.* (IIa), 124 (1915), p. 445–468.

[3] *Math. Zs.*, 5 (1919), p. 319-320.

[4] *Prace mat. fiz.*, 17 (1906), p. 77-114.

[5] *Batt. G.*, 51 (1913), p. 73-81 ; *Münch. Ber.* (1915), p. 317-328 ; *Gött. Nachr.* (1915), p. 161–171 ; *Math. Zs.*, 5 (1919), p. 319-320.

[6] *Quart. J.*, 46 (1915), p. 263-283 ; *Lond. M. S. Proc.* (2), 15 (1916), p. 1-25 et p. 192–213 ; 18 (1919), p. 201–204.

[7] *Acta Math.*, 37 (1914), p. 113-140. Cf. LANDAU, *Gött. gelehrte Anzeigen*, 177 (195), p. 377–414.

[8] *Ark. för Mat., Astron. och Fys.*, 21 (1922).

complexes de la fonction $\zeta(s)$ se trouvent sur la droite d'abscisse $\frac{1}{2}$, M. Landau[1] a déduit d'une proposition due à M. Littlewood[2] qu'aucun des nombres α_2, α_3, ... etc. ne surpasse $\frac{1}{2}$.

7. — *La méthode de Van der Corput*[3] *et de Vinogradoff*[4].

Finalement nous traiterons une méthode que M. Vinogradoff et moi avons trouvée indépendamment l'un de l'autre. Plus d'un mois après avoir tenu cette conférence, j'ai pour la première fois appris le nom de M. Vinogradoff et les remarques faites dans cet article au sujet des résultats trouvés par lui ont été ajoutées au texte lors de la correction de la première épreuve.

Avant de passer à la méthode, je veux indiquer comment j'y suis arrivé peu à peu par l'étude des méthodes de Voronoï, de Pfeiffer et de Piltz.

Comme nous l'avons déjà dit à propos des méthodes de Dirichlet et de Piltz, nous n'avons dans le problème des diviseurs à nous occuper que de la somme

$$\sum_{\substack{1 \leqq h \leqq \sqrt{x} \\ h \text{ entier}}} \psi\left(\frac{x}{h}\right) .$$

De même dans le problème du cercle nous n'avons à considérer que la somme

$$\sum_{\substack{1 \leqq h \leqq \sqrt{\frac{1}{2}x} \\ h \text{ entier}}} \psi(\sqrt{x - h^2}) .$$

---

[1] *Gött. Nachr.* (1912), p. 728.

[2] *C. R.*, 154 (1912), p. 263-266.

[3] Thèse de doctorat (1919), Leiden; *Math. Ann.*, 81 (1920), p. 1-20; *Math. Zs.*, 10 (1921), p. 105-120; *Math. Ann.*, 84 (1921), p. 53-79; 87 (1922), p. 39-65. Un autre article paraîtra bientôt dans les *Math. Ann.* et un autre encore dans la *Math. Zs.* Cf. Landau-Van der Corput, *Gött. Nachr.* (1920), p. 135-171.

[4] *Journal de la Soc. math. Charkov* (1917); *Bull. de l'Ac. des Sciences de Russie*, Pétrograd (1917), p. 1347-1378; Thèse de doctorat (1920), Pétrograd. Les articles de M. Vinogradoff ont été écrits dans la langue russe.

Pour calculer le nombre des points entiers d'un domaine quelconque, il suffit de calculer la somme

$$\sum_{\substack{a \leq n \leq b \\ n \text{ entier}}} \psi(f(n)) .$$

$v = f(u)$ ou $u = f(v)$ étant l'équation d'une partie du contour. Jusqu'à ces dernières années la méthode de Pfeiffer était appliquée à peu de problèmes seulement, et la méthode de Voronoï à deux seuls problèmes, celui des diviseurs et celui du cercle, de sorte que dans l'emploi de cette dernière méthode on posait toujours $f(u) = \frac{x}{u}$ ou $f(u) = \sqrt{x - u^2}$. J'ai montré que ces deux méthodes pouvaient être appliquées à chaque fonction $f(u)$ remplissant la condition suivante :

C′ $f(u)$ est réelle et deux fois dérivable dans l'intervalle $a \leq u \leq b$, $(a + 1 \leq b)$, la deuxième dérivée étant uni-oscillante (c'est-à-dire monotone), toujours positive ou toujours négative.

Les deux méthodes donnent dans ce cas le même résultat, à savoir qu'il y a une constante absolue c telle que l'on ait

$$\left| \sum_{\substack{a \leq n \leq b \\ n \text{ entier}}} \psi(f(n)) \right| < c \left(\int_a^b |f''(u)|^{\frac{1}{3}} du + \frac{1}{\sqrt{|f''(a)|}} + \frac{1}{\sqrt{|f''(b)|}} \right) . \qquad (12)$$

Il est évident que l'on peut maintenant calculer approximativement le nombre des points entiers dans des domaines satisfaisant à des relations très générales. Nous prendrons comme exemple le problème des diviseurs, c'est-à-dire nous approximerons la somme

$$\sum_{\substack{1 \leq h \leq \sqrt{x} \\ h \text{ entier}}} \psi\left(\frac{x}{h}\right) .$$

Nous décomposons cette somme en deux sommes partielles

$$\sum_{\substack{1 \leq h < \sqrt[3]{x} \\ h \text{ entier}}} \psi\left(\frac{x}{h}\right) \quad \text{et} \quad \sum_{\substack{\sqrt[3]{x} \leq h \leq \sqrt{x} \\ h \text{ entier}}} \psi\left(\frac{x}{h}\right) .$$

Puisque $|\psi| \leqq \frac{1}{2}$, la valeur absolue de la première somme partielle est $< \frac{1}{2}\sqrt[3]{x}$. Pour un x suffisamment grand $\sqrt[3]{x} + 1 \leqq \sqrt{x}$, de sorte que la relation C′ est remplie pour $a = \sqrt[3]{x}$, $b = \sqrt{x}$, $f(u) = \frac{x}{u}$. La valeur absolue de la deuxième somme partielle est donc plus petite que

$$c\left(\int_{\sqrt[3]{x}}^{\sqrt{x}} \left(\frac{2x}{u^3}\right)^{\frac{1}{3}} du + \frac{1}{\sqrt{\frac{2x}{x\sqrt{x}}}} + \frac{1}{\sqrt{\frac{2x}{x}}}\right)$$

$$= c\left(\frac{1}{6}\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{x}\log x + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt[4]{x} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

de sorte que l'erreur dans le problème de diviseurs ne surpasse pas, en effet, l'ordre de la fonction $\sqrt[3]{x}\log x$.

La méthode de Piltz ne donne pas seulement la proposition énoncée, mais encore un résultat plus général. De la méthode de Piltz il suit que l'inégalité (12) est valable non seulement pour la fonction $\psi(v) = v - E(v) - \frac{1}{2}$, mais encore pour chaque fonction $\psi(v)$ remplissant la condition suivante:

B $\begin{cases} \psi(v) \text{ est réelle et périodique de période 1, unioscillante} \\ \text{dans l'intervalle } 0 < v < 1, \text{ et satisfait à} \\ |\psi(v)| \leqq 1 \quad (0 \leqq v \leqq 1), \quad \int_0^1 \psi(v)\,dv = 0. \end{cases}$

Si l'on part de cette supposition, il est très facile de saisir le principe de la nouvelle méthode. De la supposition B il découle que $\psi(v)$ est développable dans la série de Fourier suivante

$$\psi(v) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m e^{2m\pi i v}, \qquad \text{où} \quad a_0 = 0,$$

donc

$$\sum_{\substack{a \leqq n \leqq b \\ n \text{ entier}}} \psi(f(n)) = \sum_{\substack{a \leqq n \leqq b \\ n \text{ entier}}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m e^{2m\pi i f(n)},$$

donc

$$\left|\sum_{\substack{a \leqq n \leqq b \\ n \text{ entier}}} \psi(f(n))\right| \leqq \sum_{m=-\infty}^{\infty} |a_m| \cdot \left|\sum_{\substack{a \leqq n \leqq b \\ n \text{ entier}}} e^{2m\pi i f(n)}\right|, \qquad (13)$$

étant admis la convergence de la dernière double sommation. Si $f(u)$ satisfait à la condition C′, $mf(u)$ y satisfait également. Si donc de la condition C′ une borne supérieure peut être déduite pour la valeur absolue de la sommation

$$\sum_{\substack{a \leqq n \leqq b \\ n \text{ entier}}} e^{2\pi i f(n)}, \qquad (14)$$

on trouve également une borne supérieure pour tous les termes de la sommation dans le membre de droite de (13), de sorte que l'on obtient ainsi une borne supérieure pour le membre de gauche de cette inégalité.

Le problème essentiel réside donc dans la possibilité d'approximer aussi près que possible la somme (14), et c'est grâce à une équation fonctionnelle approximative remarquable que la chose est possible. Puisque $f''(u)$ dans l'intervalle $a \leqq u \leqq b$ est supposé constamment positif ou constamment négatif, $f'(u)$ est une fonction unioscillante de u. Si A désigne le plus petit et B le plus grand des nombres $f'(a)$ et $f'(b)$, à chaque ν dans l'intervalle $A \leqq \nu \leqq B$ correspond un nombre n_ν univoquement déterminé par les relations $f'(n_\nu) = \nu$, et $a \leqq n_\nu \leqq b$. L'équation fonctionnelle approximative établit que la somme cherchée (14) est donnée avec une très grande approximation par l'expression

$$e^{\pm\frac{\pi i}{4}} \sum_{\substack{A \leqq \nu \leqq B \\ \nu \text{ entier}}} \frac{e^{2\pi i(f(n_\nu)-\nu n_\nu)}}{\sqrt{|f''(n_\nu)|}}, \qquad (15)$$

où l'on doit prendre le signe + ou le signe —, selon que $f''(u)$ dans l'intervalle $a \leqq u \leqq b$ est constamment positif ou constamment négatif.

Pour approximer la somme (14), il suffit donc de calculer cette dernière expression.

Si nous employons pour la valeur absolue de cette dernière somme la borne supérieure triviale

$$\sum_{\substack{A \leqq \nu \leqq B \\ \nu \text{ entier}}} \frac{1}{\sqrt{|f''(n_\nu)|}} . \tag{16}$$

nous obtenons à peu près la même approximation pour la somme (14), et si nous substituons ce résultat, nous trouvons précisément l'inégalité (12), de sorte que cette méthode fournit le même résultat que la méthode de Piltz. Mais elle peut fournir encore un meilleur résultat. Nous avons employé pour la sommation (15) l'approximation triviale (16). Il se pose maintenant la question suivante: est-il possible de remplacer cette approximation triviale par une meilleure? A cette question il a été répondu affirmativement, tant par M. Vinogradoff que par moi. Je suppose que M. Vinogradoff a développé une propre méthode, tandis que moi j'ai appliqué la méthode de Weyl [1], entre autres dans le cas où $f(u)$ satisfait non seulement à la condition C', mais encore à la condition suivante:

D: $f(u)$ est dans l'intervalle $a \leqq u \leqq b$ $k+1$ fois dérivable ($k \geqq 2$); on a

$$|f'''(u)| \leqq |f''(u)|^{\frac{4}{3}+\eta} \tag{17}$$

($\eta > 0$), et dans l'intervalle $a \leqq u \leqq b$ chaque produit

$$f^{(h_1+2)}(u) \,.\, f^{(h_2+2)}(u) \ldots f^{(h_{k-1}+2)}(u) \tag{18}$$

où les $h_1, h_2, \ldots, h_{k-1}$ désignent des nombres non-négatifs dont la somme égale $k-1$, est en valeur absolue au plus égal à $|f''(u)|^{\frac{5}{3}k-1+\eta}$.

Les conditions C' et D étant remplies, on peut trouver pour la somme (15), donc aussi pour la somme (14) une meilleure approximation. Dans ce cas on peut remplacer la proposition énoncée

---

[1] Weyl. *Gött. Nachr.* (1914). p. 234-244; *Math. Ann.*, 77 (1916). p. 313-352 et *Math. Zs.*, 10 (1921), p. 88-101.

par la proposition suivante: Les conditions B, C′ et D étant vérifiées, il existe un nombre γ dépendant au plus de k et un nombre positif ω dépendant au plus de k et de η avec la propriété

$$\left|\sum_{\substack{a \leqq n \leqq b \\ n \text{ entier}}} \psi(f(n))\right| < \gamma\left(\int_a^b |f''(u)|^{\frac{1}{3}+\omega} du + \frac{1}{\sqrt{|f''(a)|}} + \frac{1}{\sqrt{|f''(b)|}}\right) \tag{19}$$

L'exposant $\frac{1}{3}$ est donc remplacé par un nombre plus grand.

Avec cette inégalité on peut améliorer tous les résultats en question obtenus jusqu'ici contenant le symbole O de Landau. On trouve par exemple qu'il existe une constante $\Theta < \frac{1}{3}$ telle que dans le problème des diviseurs l'ordre de l'erreur ne surpasse pas celui de x^{Θ}; j'ai montré qu'on peut prendre même $\Theta < \frac{33}{100}$. Donc dans le problème des diviseurs l'exposant du terme représentant l'ordre de l'erreur est compris entre $\frac{1}{4}$ et $\frac{33}{100}$; donc $\frac{1}{4} \leqq a_2 < \frac{33}{100}$.

Comme exemple je prouverai que dans le problème du cercle l'exposant analogue est inférieur à $\frac{1}{3}$. Comme nous l'avons déjà fait remarquer, il suffit de démontrer

$$\sum_{\substack{1 \leqq n \leqq \sqrt{\frac{1}{2}x} \\ n \text{ entier}}} \psi(\sqrt{x-u^2}) = O(x^{\Theta}),$$

Θ désignant une constante $< \frac{1}{3}$. Nous appliquerons notre proposition, en posant $a = 1$, $b = \sqrt{\frac{1}{2}x}$, $f(u) = \sqrt{x-u^2}$. Nous devons supposer $x > 8$, donc $a + 1 \leqq b$; de cette manière la condition C′ est remplie. En choisissant x assez grand, la condition D est remplie pour $k = 4$, $\eta = \frac{1}{6}$. En effet, dans l'intervalle $1 \leqq u \leqq \sqrt{\frac{1}{2}x}$, l'ordre de $f''(u)$, $f'''(u)$, $f^{\text{IV}}(u)$, $f^{\text{V}}(u)$ est

égal respectivement à celui de $\frac{1}{\sqrt{x}}$, $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x\sqrt{x}}$, $\frac{1}{x^2}$. Dans (17) l'ordre du premier membre est donc $\frac{1}{x}$ et celui du second membre

$$\frac{1}{x^{\frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}+\frac{1}{6}\right)}} = \frac{1}{x^{\frac{3}{4}}},$$

de sorte que, x étant choisi suffisamment grand, le premier membre est plus petit que le second. L'ordre du produit (18) est

$$\frac{1}{x^{\frac{1}{2}(h_1+1)+\frac{1}{2}(h_2+1)+\frac{1}{2}(h_3+1)}} = \frac{1}{x^3}$$

à cause de $h_1 + h_2 + h_3 = 3$, de sorte que, x étant choisi suffisamment grand, la valeur absolue de ce produit est plus petite que $|f''(u)|^{\frac{5}{3}\cdot 4-1+\frac{1}{6}}$, dont l'ordre est égal à

$$\frac{1}{x^{\frac{1}{2}\cdot\frac{35}{6}}} = \frac{1}{x^{\frac{35}{12}}}.$$

Les conditions sont ainsi remplies; l'inégalité (19) a donc lieu, et il s'ensuit

$$\sum_{\substack{1\leq n\leq\sqrt{\frac{1}{2}x} \\ n \text{ entier}}} \psi(\sqrt{x-n^2}) = O\left\{\int_1^{\sqrt{\frac{1}{2}x}} \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\frac{1}{3}+\omega} du + \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\sqrt{x}}}} + \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\sqrt{x}}}}\right\}$$

$$= O\left(x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\omega\right)} + x^{\frac{1}{4}}\right) = O\left(x^{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\omega} + x^{\frac{1}{4}}\right).$$

Dans le problème du cercle l'ordre de l'erreur ne surpasse pas celui de x^{Θ}, Θ désignant le plus grand des deux nombres $\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\omega$ et $\frac{1}{4}$ $\left(\text{donc } \Theta < \frac{1}{3}\right)$.

Nous sommes arrivés au terme de notre exposé. Le choix entre les différentes méthodes dont nous venons de parler dépend dans chaque cas particulier du problème posé et du degré

d'exactitude demandé. Si une première approximation est suffisante, on peut se contenter de la méthode de Gauss ou de celle de Dirichlet. Pour les approximations contenant Ω et aussi dans les problèmes concernant des domaines à k dimensions, l'emploi des variables complexes est préférable; jusqu'ici en effet dans les questions de cette nature la méthode de Pfeiffer n'est appliquée qu'à des cas particuliers, et les autres pas du tout. La méthode de Van der Corput et de Vinogradoff n'est encore qu'à son stade initial et elle sera en tout cas encore applicable à beaucoup d'autres problèmes. Je suis persuadé qu'elle est encore susceptible d'amélioration. J'ai en effet l'impression que la méthode de Weyl, appliquée à la somme (15), ne donne pas la dernière approximation possible, qu'au contraire, la valeur absolue de (15) est beaucoup plus petite que la borne trouvée avec la méthode de Weyl. Et chaque amélioration de l'approximation de cette somme donne une amélioration du résultat final.

D'après une communication qu'il a faite par écrit, M. Vinogradoff a démontré que dans le problème des diviseurs la limite inférieure de l'exposant dans le terme de l'erreur est $\leqq \frac{5}{16}$ et il n'est pas impossible que sous peu il sera démontré que cette limite inférieure est égale à $\frac{1}{4}$.

APPLICATION DES MÉTHODES DE H. GRASSMANN A LA GÉOMÉTRIE MÉTRIQUE DU PLAN

PAR

P.-C. Delens (Le Hâvre).

Si H. Grassmann a pensé établir, dans son « Ausdehnungslehre » un instrument de calcul géométrique d'une portée universelle, les éditeurs mêmes de ses œuvres n'ont pas manqué de rappeler à ses disciples qu'un tel espoir leur semblait vain : le rêve de Leibnitz, le commencement de réalisation qu'il reçut de Grassmann, seraient trop ambitieux et il faudrait se contenter d'algorithmes spéciaux, propres à traduire les opérations à l'intérieur de certains groupes ! Si juste que puisse être cette réserve, nous craignons qu'elle n'ait contribué à faire apparaître le calcul géométrique comme un ensemble de recettes particulières bien isolées les unes des autres, et par suite sans grande généralité.

En fait, dans beaucoup des applications qu'on a publiées, la méthode de Grassmann a manqué de souplesse : puissante pour les grandes constructions théoriques, elle n'a pas toujours atteint le but que lui assignait Leibnitz « donner en même temps la solution et la construction et la démonstration géométrique, le tout d'une manière naturelle et par une analyse — c'est-à-dire par des voies déterminées ». Mais nous croyons encore possible, suivant le plan de Grassmann, d'aérer quelque peu l'édifice en abattant quelques-unes des cloisons étanches qui en séparent les diverses parties.

Le travail que nous publions ici a pour objet la géométrie métrique du plan : nous y reprenons le *produit intérieur* avec

l'extension que lui avait donnée Grassmann dans un essai fort discuté et peu compris, et y adjoignons ce *produit complexe* également signalé par l'auteur de l'« Ausdehnungslehre », sans qu'il en ait fait d'applications. Ces deux produits étant déduits et rapprochés naturellement du *produit algébrique* comme du *produit combinatoire* ou *extérieur*, l'algèbre de la géométrie métrique est bien contenue dans celle de la géométrie projective. Nous pensons établir, en outre — et malgré que la brièveté de cet exposé le rende incomplet — qu'il est désormais possible de décrire et de noter simplement les constructions de la géométrie élémentaire, y compris celles de cette géométrie du plan complexe qui s'apparente si étroitement à la théorie des fonctions et de former, en somme, pour chaque configuration, l'identité algébrique qui la traduit.

Dans toute étude de ce genre se pose encore la question de notations : quoique nous efforçant à des notations complètes et uniformes, nous ne croyons guère possible de ne pas user d'abréviations et d'enlever au lecteur le bénéfice de toute attention; le contexte suffira sans doute à lever toute incertitude. En outre, quand aucune confusion ne sera à craindre, nous supprimerons souvent les symboles opératoires.

Chapitre Premier.

Géométrie projective du domaine binaire.

Entre deux éléments a et b d'un tel domaine, Grassmann a défini les produits suivants :

algébrique $ab = ba$

extérieur $[ab] = -[ba]$

que nous écrirons encore : $\overline{ab} = -\overline{ba}$ et aussi : $a.b = -b.a$. Tandis que le produit extérieur de deux éléments dépend de $\frac{2(2-1)}{2} = 1$ unité, c'est-à-dire est scalaire, le produit algébrique dépend de $\frac{2(2+1)}{2} = 3$ unités. Un tel produit, ou forme géométrique quadratique, appartient donc à un nouveau système

linéaire, dans lequel on peut définir de nouveaux produits. Nous nous intéresserons à quelques-uns d'entre eux en indiquant leur construction à partir des éléments initiaux du domaine binaire.

On peut, en particulier, prendre comme unités du 2me ordre trois carrés algébriques, soit a^2, b^2, c^2, et se contenter de définir les opérations sur de tels carrés. Entre les éléments du 2me ordre nous envisagerons les produits :

polaire[1] $a^2)(b^2 = b^2)(a^2 = [ab]^2$

jacobien $a^2 . b^2 = - b^2 . a^2 = [ab] ab$

qui, étendus à des formes plus générales :

$$f^{(2)} = \Sigma a^2 \qquad g^{(2)} = \Sigma b^2$$

s'écrivent symboliquement :

$$f^{(2)})(g^{(2)} = g^{(2)})(f^{(2)} = [fg]^2$$

$$f^{(2)} . g^{(2)} = - g^{(2)} . f^{(2)} = [fg] fg \ .$$

Le premier nous ramène aux scalaires; le nom que nous lui donnons se justifie par le fait que quand l'invariant $[fg]^2$ est nul, les deux formes $f^{(2)}$ et $g^{(2)}$ sont dites apolaires.

Le second n'est qu'une fonction linéaire d'un produit extérieur dans le système des éléments du 2me ordre. Comme $[fg]$ symbolise un scalaire, on voit que ce produit est de nouveau une forme quadratique, à savoir la jacobienne des formes $f^{(2)}$ et $g^{(2)}$.

Si nous ajoutons que toute forme quadratique peut se ramener à un produit algébrique de deux éléments, distincts ou confondus, ses deux points-racines, on voit que l'équation caractérisant ces racines n'est autre que :

$$ab)(x^2 = [ax][bx] = 0 \ .$$

[1] Les nécessités d'impression ont substitué au symbole choisi pour le produit polaire : deux parenthèses entrecroisées — souvent employées dans un sens analogue dans la théorie des formes — celui du texte, où les parenthèses sont juxtaposées. *(Note de l'auteur.)*

Enfin, notons que trois carrés algébriques donnent lieu au produit :

$$\textit{jacobien} \qquad (a^2 . b^2)(c^2 = [ab][ac][bc] = - [ab][bc][ca]$$

que nous écrirons encore :

$$[a^2 . b^2 . c^2] \qquad \text{ou} \qquad a^2 . b^2 . c^2$$

qui n'est autre qu'un produit extérieur entre éléments du 2me ordre, et est de nouveau un scalaire. Il s'ensuit immédiatement la définition du produit plus général :

$$[f^{(2)} . g^{(2)} . h^{(2)}] = \Sigma [a^2 . b^2 . c^2] \ .$$

Rappelons encore que la 1re polaire d'un élément du 1er ordre m par rapport à une forme quadratique est obtenue par :

$$f^{(2)})(m = f^{(2)} \cdot m = \Sigma [am] a$$

et a par suite, pour équation :

$$f^{(2)})(mx = [(f^{(2)} . m) x] = \Sigma [am][ax] = 0 \ .$$

Les opérations que nous venons d'énoncer sont familières à tous ceux qui connaissent la théorie des formes algébriques, quel que soit le procédé par lequel on les expose[1]. Notre but n'est pas de reprendre toute cette théorie en nous contentant de changer quelques notations; nous devons cependant pour plus de clarté, envisager rapidement le système des produits et formes algébriques d'ordre n.

On obtient une telle forme comme produit algébrique de n éléments du 1er ordre, ou points, ou comme somme de tels produits; une forme d'ordre n peut aussi se ramener à la somme de $n+1$ puissances algébriques n^{mes}, linéairement indépendantes, et qu'on peut choisir comme unités du système linéaire. Nous poserons encore :

$$f^{(n)} = \Sigma a^n$$

pour la forme d'équation :

$$f^{(n)})(x^n = \Sigma [ax]^n = 0$$

[1] Cf. par exemple J. H. GRACE and A. YOUNG. *The Algebra of Invariants.*

et définirons le produit :

jacobien généralisé $\quad f^{(n)} . g^{(n)} . h^{(n)} \ldots = \Sigma a^n . b^n . c^n \ldots$

avec :

$$a^n . b^n = [ab] a^{n-1} b^{n-1} = \Sigma [ab] a'^{2n-2}$$

$$a^n . b^n . c^n = \Sigma [ab][a'c]^2 a'^{2n-4} c^{n-2} , \quad \text{etc.}$$

produits qui représentent successivement des formes d'ordres :

$$2(n-1) \qquad 3(n-2) \ldots \quad \text{etc.}$$

de sorte que le produit jacobien de $n+1$ formes d'ordre n est une forme d'ordre $(n+1)(n-n) = 0$, c'est-à-dire est scalaire.

A partir d'une forme d'ordre n, $f^{(n)}$, et d'un point m on définit les différentes polaires du point, à savoir

1re polaire $\quad f^{(n)})(m = f^{(n)} . m = \Sigma [am] a^{n-1}$

p^{me} polaire $\quad f^{(n)})(m^p = f^{(n)} \overset{p}{.} m^p = \Sigma [am]^p a^{n-p} \qquad p < n$

c'est-à-dire la forme d'ordre $n - p$ qui a pour équation

$$f^{(n)})(m^p x^{n-p} = \Sigma [am]^p [ax]^{n-p} = 0$$

invariant polaire $\quad f^{(n)})(m^n = f^{(n)} \overset{n}{.} m^n = \Sigma [am]^n$

Sur ce type est basée l'opération plus générale de *transvection* entre deux formes d'ordres n et n', $f^{(n)}$ et $g^{(n')}$, dont le p^{me} transvectant a pour expression

$$h^{(n+n'-2p)} = f^{(n)} \overset{p}{.} g^{(n')} = \Sigma [ab]^p a^{n-p} b^{n'-p}$$

et pour équation :

$$h^{(n+n'-2p)})(x^{n+n'-2p} = \Sigma [ab]^p [ax]^{n-p} [bx]^{n'-p} = 0 .$$

Nous n'envisagerons pas ici les autres opérations invariantes possibles; on peut du reste les construire toutes comme les précédentes au moyen de produits entre les formes lacunaires de Grassmann. Dans celles que nous avons considérées, avec quelque apparence de diversité dans les symboles, notons que nous avons employé le signe $\overset{p}{.}$ entre deux produits algébriques pour exprimer que p éléments du 1er ordre du premier produit formaient avec

p éléments analogues du second une combinaison scalaire sur le modèle du produit polaire, tandis que nous avons réservé le symbole)(de ce produit pour le cas où tous les éléments d'une des formes au moins entraient dans un tel produit.

En dehors des méthodes de Grassmann, Hamilton, ou de leurs disciples, la théorie des formes n'a guère considéré les opérateurs linéaires : homographies ou réciprocités, symboles de transformations quadratiques, etc. Il ne nous semble pas nécessaire de les traiter dans cette introduction.

Chapitre II.

Géométrie métrique des vecteurs du plan : produits de deux vecteurs.

Ce sont les points de la droite de l'infini du plan qu'on représente par les vecteurs. Les opérations de la géométrie métrique peuvent se définir à partir des seuls vecteurs réels, mais il est plus direct d'introduire dès le début des éléments imaginaires, à savoir les vecteurs isotropes (points cycliques) du plan.

Tandis que nous représenterons par u et v deux vecteurs égaux (que nous dirons unitaires) et rectangulaires, les vecteurs isotropes seront désignés par :

$$j_1 = u + \iota v \qquad j_2 = u - \iota v \qquad (\iota = \sqrt{-1})$$

Le *produit intérieur* de deux vecteurs a, b est dès lors défini par le produit polaire suivant[1] :

$$a \times b = ab \,)(\, j_1 j_2 = \frac{[aj_1][bj_2] + [aj_2][bj_1]}{2} \qquad (1)$$

Comme :

$$j_1 j_2 = u^2 + v^2$$

il peut aussi s'écrire, comme l'on sait :

$$a \times b = ab \,)(\, u^2 + v^2) = [au][bu] + [av][bv] \,. \qquad (2)$$

[1] Cf. R. Mehmke. *Vorlesungen über Punkt und Vektorenrechnung*, I, 1, p. 289.

Ses propriétés sont bien connues; nous rappellerons cependant qu'en conséquence de la définition, on a :

$$\overset{2}{j_1^{\times}} = \overset{2}{j_2^{\times}} = 0$$

et qu'un tel produit étant scalaire, on pose souvent, pour simplifier les calculs :

$$\overset{2}{u^{\times}} = \overset{2}{v^{\times}} = 1 = \frac{1}{2}(j_1 \times j_2) \qquad (3)$$

l'homogénéité rompue pouvant ensuite être rétablie au moyen de la même égalité (ce qui revient à calculer avec $\left.\frac{a \times b}{\overset{2}{u^{\times}}}\right)$.

Tandis que le produit algébrique de deux vecteurs ne s'annule qu'avec l'un de ses facteurs, il n'en est plus de même pour le produit intérieur. Il sera aussi toujours possible de résoudre une équation intérieure :

$$\pm \overset{2}{x^{\times}} = a \times b$$

Supposons, par exemple, $a \times b$ positif; l'équation peut s'écrire:

$$x^2 \,)(\, j_1 j_2 = ab \,)(\, j_1 j_2$$

et la division par $j_1 j_2$ est possible et donne :

$$x^2 = ab + \lambda_1 j_1^2 + \lambda_2 j_2^2$$

λ_1 et λ_2 étant deux paramètres indéterminés; ou encore:

$$x^2 = ab \qquad (\text{modules } j_1^2,\ j_2^2)$$

c'est-à-dire qu'on est ramené à une *équivalence algébrique*; nous utiliserons à plusieurs reprises ce mode de solution; si on veut poursuivre jusqu'au bout, il faut écrire :

$$x^2 \overset{2}{)(} = (ab + \lambda_1 j_1^2 + \lambda_2 j_2^2 \overset{2}{)(} = 0$$

équation scalaire de condition entre λ_1 et λ_2.

Ce produit intérieur de deux vecteurs aurait aussi pu être défini par :

$$a \times b = ab \Big)\Big(\frac{j_1^2 \cdot j_2^2}{[j_1 j_2]}$$

et pour plus de deux vecteurs on pourrait ainsi envisager diverses extensions du produit intérieur : mais aucune n'a semblé jusqu'ici s'imposer avec quelque utilité.

Arrivons à ce que Grassmann a appelé *produit complexe* de deux vecteurs, défini du reste seulement par des lois formelles. Non sans quelque hésitation, à cause des nombreuses acceptions du mot *complexe*, nous proposerons de substituer au terme usité par Grassmann celui de *produit cyclique*.

Entre deux vecteurs, nous définirons ce produit par l'expression :

$$a \smile b = \frac{1}{[j_1 j_2]^2}\Big((ab)(j_2^2)j_1^2 - (ab)(j_1^2)j_2^2\Big) \tag{4}$$

qui peut encore s'écrire :

$$a \smile b = \frac{2}{[j_1 j_2]} ab \cdot j_1 j_2 . \tag{5}$$

En effet, l'on a :

$$j_1 j_2 = \frac{j_1^2 \cdot j_2^2}{[j_1 j_2]}$$

et :

$$ab \cdot (j_1^2 \cdot j_2^2) = \frac{1}{2}\Big((ab)(j_2^2)j_1^2 - (ab)(j_1^2)j_2^2\Big) .$$

Pour développer $a \smile b$ sous la forme (5), il est commode d'employer la relation identique entre les quatre formes aj_1, aj_2, bj_1, bj_2 :

$$[aj_1]bj_2 - [aj_2]bj_1 = [bj_1]aj_2 - [bj_2]aj_1 . \tag{6}$$

On voit aussitôt que :

$$j_1 \smile j_2 = 0$$

et que le produit cyclique de deux vecteurs est une nouvelle forme quadratique, mais dépendant seulement de deux unités, par exemple $j_1^{\smile 2}$ et $j_2^{\smile 2}$; cette forme est en effet toujours apo-

laire (conjuguée) d'une part à $j_1 j_2$, d'autre part à la forme primitive, en vertu de:

$$ab \cdot j_1 j_2 \cdot j_1 j_2 = 0$$
$$ab \cdot j_1 j_2 \cdot ab = 0 \,.$$

Le produit cyclique de deux vecteurs représente donc le système des bissectrices du produit algébrique, avec un coefficient approprié. Nous dirons encore que $a \smile b$ est l'*orientante* de ab.

On a évidemment :

$$u^{\overset{2}{\smile}} = \frac{\iota}{[uv]} u^2 \,.\, (u^2 + v^2) = \iota uv$$
$$v^{\overset{2}{\smile}} = - \iota uv$$

donc :

$$\begin{cases} u^{\overset{2}{\smile}} + v^{\overset{2}{\smile}} = 0 \\ u \smile v = v \smile u \end{cases} \qquad \text{ainsi que :} \qquad (7)$$

soit les règles énoncées par Grassmann.

Remarquons encore qu'*à l'exception du produit* $j_1 \smile j_2$, le produit cyclique ne s'annule qu'avec l'un de ses facteurs, et aussi qu'on peut toujours satisfaire à l'équation :

$$x^{\overset{2}{\smile}} = a \smile b \qquad \text{ou :} \qquad (8)$$
$$x^2 \cdot j_1 j_2 = ab \cdot j_1 j_2 \,.$$

La division par $j_1 j_2$ est en effet possible et donne :

$$x^2 = ab + \lambda j_1 j_2$$

ou :

$$x^2 = ab \qquad (\text{module } j_1 j_2)$$

ce qui montre qu'à une équation cyclique (entre produits cycliques), on peut faire correspondre une *équivalence* ou congruence suivant le module $j_1 j_2$.

Quant au facteur indéterminé λ, sa valeur résulte de :

$$x^2 \overset{2}{)(} = (ab + \lambda j_1 j_2 \overset{2}{)(} = 0 \,.$$

Enfin, une équation cyclique, telle que (8.), peut aussi être remplacée par le système de deux équations scalaires :

$$\begin{cases} x^2)(j_1^2 = ab)(j_1^2 \\ x^2)(j_2^2 = ab)(j_2^2 \end{cases} \qquad (9)$$

c'est-à-dire par un système d'équations écrites en coordonnées *symétriques*.

Nous allons maintenant établir diverses formules de réduction entre produits cycliques de deux vecteurs, montrant aussi leur lien avec le produit intéiieur.

Ainsi le produit polaire de deux orientantes a pour expression:

$$a \smile b)(c \smile d = \frac{4}{[j_1 j_2]^2}(ab \, . \, j_1 j_2)(cd \, . \, j_1 j_2)$$

se développant en :

$$= \frac{2}{[j_1 j_2]^2}\begin{vmatrix} ab)(cd & j_1 j_2)(cd \\ ab)(j_1 j_2 & j_1 j_2)(j_1 j_2 \end{vmatrix}$$

donc :

$$a \smile b)(c \smile d = - ab)(cd + \frac{1}{2}(a \times b)(c \times d) \, . \qquad (10)$$

En particulier, l'équation : $a \smile b)(c \smile d = 0$ exprime en général que les bissectrices des couples ab et cd se bissectent mutuellement.

Une autre expression à considérer est :

$$a \smile b)(cd = \frac{2}{[j_1 j_2]} ab \, . \, j_1 j_2 \, . \, cd = - ab)(c \smile d \, .$$

Une telle expression, fonction linéaire de $a \smile b$ comme de $c \smile d$, est un produit particulier entre ces orientantes; c'est ce que nous allons retrouver ci-après. Remarquons d'abord que l'expression s'écrit aussi :

$$- \frac{2}{[j_1 j_2]}(ab \, . \, cd)(j_1 j_2 = - \iota (ab \, . \, cd)^{\times}$$

c'est-à-dire qu'elle représente à un facteur près l'invariant

intérieur du jacobien de *ab* et *cd*. Donc l'équation :

$$(ab \,.\, cd)^{\times} = 0$$

signifie que les couples *ab* et *cd* ont mêmes bissectrices.

Or le jacobien de $a \smile b$ et $c \smile d$ représente évidemment $j_1 j_2$ affecté d'un certain coefficient : si celui-ci était nul, *ab* et *cd* auraient encore mêmes bissectrices, d'où :

$$a \smile b \,.\, c \smile d = \lambda (ab \,.\, cd)^{\times} j_1 j_2 \,.$$

On détermine le coefficient λ en considérant en particulier :

$$\overset{2}{j_1} \cdot \overset{2}{j_2} = \lambda (j_1^2 \cdot j_2^2)^{\times} j_1 j_2$$

ce qui donne :

$$\lambda = -\frac{1}{2},$$

d'où la formule:

$$a \smile b \,.\, c \smile d = -\frac{1}{2} (ab \,.\, cd)^{\times} j_1 j_2 \qquad (11)$$

et par suite aussi, en substituant le produit intérieur au produit algébrique :

$$(a \smile b \,.\, c \smile d)^{\times} = -(ab \,.\, cd)^{\times} \qquad (12)$$

$$= -\frac{[ac]b \times d + [bd]a \times c}{2}$$

donc :

$$a \smile b \,)(\, cd = -ab \,)(\, c \smile d = \iota (a \smile b \,.\, c \smile d)^{\times} \qquad (13)$$

ce qui est bien, comme nous l'avons annoncé, une fonction linéaire d'un produit entre $a \smile b$ et $c \smile d$, donc un nouveau produit entre ces formes

Remarque — Nous avons, dans ce qui précède, employé autant que possible des symboles d'opération; on est parfois amené à leur substituer des symboles fonctionnels Ainsi, prendre l'orientante de *ab* peut être représenté par :

$$a \smile b = \mathcal{O}_2 (ab$$

de sorte que l'orientante de cette nouvelle forme serait :

$$\mathcal{O}_2 (a \smile b = \mathcal{O}_2 (\mathcal{O}_2 (ab = \mathcal{O}_2^{(2} (ab \,.$$

On vérifie du reste que l'on a :

$$\mathcal{O}_2^{(2}(ab = \frac{1}{[j_1 j_2]^2}\Big((ab)(j_2^2)j_1^2 + (ab)(j_1^1)j_2^2\Big)$$

donc:

$$\mathcal{O}_2^{(3}(ab = \mathcal{O}_2(ab$$

ce que l'on peut noter .

$$\mathcal{O}_2^{(3} = \mathcal{O}_2$$

et permet évidemment le calcul des puissances suivantes de l'opération $\mathcal{O}_2$.

Chapitre III.

Extension du produit cyclique au cas de n *vecteurs.*

Nous définirons comme *produit cyclique* de n vecteurs $a, b, c..l$ l'expression :

$$f^{\underset{\smile}{(n)}} = a \smile b \smile c \ldots \smile l = \frac{1}{[j_1 j_2]^n}\Big((f^{(n)})(j_2^n)j_1^n - (f^{(n)})(j_1^n)j_2^n\Big) \qquad (1)$$

où on a posé :

$$f^{(n)} = abc \ldots l\ .$$

Cette forme, ou *orientante* de la forme initiale, est, elle aussi, algébrique et de degré n, mais ne dépend que de deux unités, par exemple j_1^n et j_2^n; elle est en effet apolaire à tout produit :

$$j_1^p j_2^{n-p} \qquad (p = 1, 2 \ldots, n-1)$$

et l'est aussi à la forme initiale $f^{(n)}$. On peut encore l'écrire sous forme d'un jacobien généralisé :

$$f^{\underset{\smile}{(n)}} = \theta_n f^{(n)} \cdot j_1^{n-1} j_2 \cdot j_1^{n-2} j_2^2 \cdots \cdot j_1 j_2^{n-1} \qquad (2)$$

le coefficient θ_n pouvant se déterminer par le calcul de $j_1^{\underset{\smile}{n}}$, par exemple, ce qui donne :

$$\theta_n = \frac{C_n^1 C_n^2 \ldots C_n^{n-1}}{[j_1 j_2]^{\frac{n(n-1)}{2}}} \qquad (3)$$

le numérateur étant le produit des coefficients du binôme.

Comme pour le produit cyclique de deux vecteurs, on peut toujours résoudre l'équation binôme :

$$x_{\smile}^{n} = f_{\smile}^{(n)} \qquad (4)$$

soit en la ramenant à l'équivalence :

$$x^n = f^{(n)} + \lambda_1 j_1^{n-1} j_2 \dots + \lambda_{n-1} j_1 j_2^{n-1}$$

que nous écrirons de manière abrégée :

$$x^n = f^{(n)} \qquad (\text{module } j_1 j_2) \qquad (5)$$

puis déterminant les coefficients λ par la condition que le premier membre soit une puissance n^{me} parfaite ; soit encore en la remplaçant par le système d'équations simultanées :

$$\begin{cases} x^n \,)(\, j_1^n = f^{(n)} \,)(\, j_1^n \\ x^n \,)(\, j_2^n = f^{(n)} \,)(\, j_2^n \end{cases} \qquad (6)$$

Il résulte des considérations précédentes que les formes :

$$f^{(n)} \qquad \text{et} \qquad f^{(n)} + \lambda j_1 j_2 g^{(n-2)}$$

sont équivalentes pour le produit cyclique, quelle que soit la forme $g^{(n-2)}$ et aussi que les n solutions de l'équation binôme forment le faisceau régulier de n vecteurs que représente l'orientante $f_{\smile}^{(n)}$, faisceau apolaire au couple isotrope $j_1 j_2$.

On voit encore que les seuls produits cycliques qui sont nuls sans qu'un de leurs facteurs du premier ordre s'annule sont ceux qui admettent comme facteur (du second ordre) $j_1 \smile j_2$. C'est Laguerre qui a introduit la notion d'*orientation* (relative à un axe de repère u) d'un faisceau de directions; G. Humbert a désigné sous ce nom, pour la forme $abc\dots l$ le coefficient :

$$(-1)^n \frac{abc \dots l \,)(\, j_1^n}{abc \dots l \,)(\, j_2^n} = (-1)^n \frac{\zeta_a \zeta_b \cdots \zeta_l}{\bar\zeta_a \bar\zeta_b \cdots \bar\zeta_l}$$

en coordonnées symétriques :

$$\zeta = \xi + i\eta$$
$$\bar\zeta = \xi - i\eta \,.$$

Nous pouvons sans inconvénient modifier la définition de Humbert en négligeant le facteur $(-1)^n$, de sorte que l'orientation sera définie par :

$$\omega = \frac{f^{(n)})(j_1^n}{f^{(n)})(j_2^n} \tag{7}$$

qui est le coefficient essentiel d'une orientante, d'équation :

$$(j_1^n - \omega j_2^n)(x^n = 0 .$$

Les propriétés des orientations résulteront donc immédiatement de celles des orientantes, c'est-à-dire du produit cyclique. Il est évident que celui-ci est commutatif, mais il nous reste à montrer ce qu'on pourra considérer comme la *propriété associative* du produit, bien que cette propriété soit toute autre que celle qu'on considère dans les systèmes *numériques* complexes; le même cas se présente déjà, du reste, pour le produit extérieur de Grassmann.

Nous allons établir que si une forme $f^{(n)}$ est le produit algébrique de formes d'ordre moindre, telles que $g^{(p)}$, l'orientante $f^{\underset{\smile}{(n)}}$ est un produit des orientantes $g^{\underset{\smile}{(p)}}$, et pour le produit ainsi défini nous conserverons le signe $\smile$ du produit cyclique.

Nous remarquerons d'abord que si deux formes orientantes :

$$a^{(p)} = \alpha_1 j_1^p - \alpha_2 j_2^p$$

$$a'^{(p)} = \alpha_1 j_1^p + \alpha_2 j_2^p$$

diffèrent par le signe du coefficient de j_2^p, c'est-à-dire ont des orientations opposées, la seconde est fonction linéaire de la première — et inversement — le symbole de cette fonction ne dépendant pas de la forme considérée.

En effet :

$$a^{(p)})(j_2^p = \alpha_1 [j_1 j_2]^p$$

$$a^{(p)})(j_1^p = - \alpha_2 [j_2 j_1]^p$$

donc :

$$a'^{(p)} = \frac{1}{[j_1 j_2]^p} \left((a^{(p)})(j_2^p) j_1^p - (-1)^p (a^{(p)})(j_1^p) j_2^p \right) = \mathfrak{A}_p (a^{(p)} . \tag{8}$$

Supposons maintenant :

$$f^{(n)} = g^{(p)} h^{(q)} \qquad (p + q = n)$$

$$[j_1 j_2]^n \underset{\smile}{f^{(n)}} = \varphi_1 j_1^n - \varphi_2 j_2^n$$

$$[j_1 j_2]^p \underset{\smile}{g^{(p)}} = \gamma_1 j_1^p - \gamma_2 j_2^p$$

$$[j_1 j_2]^q \underset{\smile}{h^{(q)}} = \eta_1 j_1^q - \eta_2 j_2^q$$

avec :

$$\varphi_1 = f^{(n)})(j_2^n = \left(g^{(p)})(j_2^p\right)\left(h^{(q)})(j_2^q\right) = \gamma_1 \eta_1$$

$$\varphi_2 = \gamma_2 \eta_2$$

donc :

$$[j_1 j_2]^n \underset{\smile}{f^{(n)}} = \gamma_1 j_1^p \eta_1 j_1^q - \gamma_2 j_2^p \eta_2 j_2^q .$$

Le second membre est de la forme :

$$A_1 B_1 - A_2 B_2 = \frac{1}{2}\left[(A_1 - A_2)(B_1 + B_2) + (B_1 - B_2)(A_1 + A_2)\right]$$

donc :

$$\underset{\smile}{f^{(n)}} = \frac{1}{2}\left(\underset{\smile}{g^{(p)}}\, \mathfrak{A}_q(\underset{\smile}{h^{(q)}}) + \underset{\smile}{h^{(q)}}\, \mathfrak{A}_p(\underset{\smile}{g^{(p)}})\right) = \underset{\smile}{g^{(p)}} \smile \underset{\smile}{h^{(q)}} \qquad (9)$$

et comme on a vu en même temps :

$$\frac{\varphi_2}{\varphi_1} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \cdot \frac{\eta_2}{\eta_1}$$

l'orientation de $f^{(n)}$ est aussi le produit des orientations de $g^{(p)}$ et $h^{(q)}$.

Remarque. — L'opération linéaire $\mathfrak{A}_p$ précédemment employée *sur une orientante* est reliée simplement à l'opération $\mathcal{O}_p$ qui donne l'orientante d'une forme d'ordre p. On a, en effet, quelle que soit la parité de p :

$$\mathcal{O}_p = \mathfrak{A}_p^{(2}$$

mais si p est pair, on a plus simplement :

$$\mathcal{O}_p = \mathfrak{A}_p .$$

Chapitre IV.

Les similitudes vectorielles[1] *du plan et leur produit fonctionnel. Isomorphisme de ce produit et du produit cyclique des vecteurs.*

On désigne sous le nom de similitudes vectorielles les homographies du plan qui, appliquées à un vecteur, le font tourner d'un angle défini et altèrent en outre sa longueur dans un rapport déterminé. Comme il est bien connu, ces similitudes ont fourni la première représentation géométrique des nombres complexes. Nous noterons ici par $)\frac{b}{a}$ l'opérateur qui, appliqué à a, le transforme en b par une opération de la nature indiquée, donc :

$$\mathcal{H}(a =)\frac{b}{a}(a = b\ . \qquad (1)$$

Si on définit en particulier l'opération identique $\mathfrak{U}$ (qu'on se contente en général d'écrire 1), et le verseur droit $\mathcal{J}$, toute autre similitude $\mathcal{H}$ peut s'écrire sous la forme :

$$\mathcal{H} = \lambda\mathfrak{U} + \mu\mathcal{J} \qquad (2)$$

c'est-à-dire que :

$$\mathcal{H}(a = \lambda\mathfrak{U}(a + \mu\mathcal{J}(a$$

quel que soit a.

Nous rappelons encore que le *produit fonctionnel* ou *séquence* de deux opérateurs $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ est défini par :

$$\mathcal{H}(\mathcal{H}'(a \qquad (3)$$

de sorte que nous utiliserons pour lui le même symbole (c'est-à-dire la demi-parenthèse que nous employons aussi pour séparer l'opérateur de l'objet).

Les similitudes du plan formant un système linéaire à deux

[1] Cf. C. Burali-Forti et R. Marcolongo. *Analyse vectorielle générale*, I. Transformations linéaires, p. 47.

unités: $\mathcal{U}$, $\mathcal{J}$, on sait qu'elles satisfont à l'équation fondamentale de Hamilton-Cayley :

$$\mathcal{H}^{(2} - 2\alpha\mathcal{H} + \beta = 0 \tag{4}$$

ou :

$$\mathcal{H}^{(2} - 2\alpha\mathcal{H}(\mathcal{U} + \beta\mathcal{U}^{(2} = 0$$

Les coefficients α et β de cette équation étant donnés par[1]:

$$\left\{\begin{aligned} 2\alpha[ab] &= 2[\mathcal{H}\mathcal{U}][ab] = [\mathcal{H}a \,.\, b] + [a \,.\, \mathcal{H}b] \\ \beta[ab] &= \mathcal{H}^{\text{II}}[ab] = [\mathcal{H}a \,.\, \mathcal{H}b] \,. \end{aligned}\right. \tag{5}$$

Le produit fonctionnel des opérateurs étant associatif, on peut déduire toutes ses propriétés de l'équation de Hamilton-Cayley relative à $\mathcal{J}$, à savoir :

$$\mathcal{J}^{(2} + \mathcal{U}^{(2} = 0 \tag{6}$$

à laquelle il convient de joindre :

$$\mathcal{J}(\mathcal{U} = \mathcal{U}(\mathcal{J}(= \mathcal{J}) \,. \tag{6}$$

Soit u un vecteur unitaire, v un vecteur unitaire perpendiculaire. Avec la notation indiquée, on a :

$$\mathcal{U} =)\frac{u}{u} \qquad \mathcal{J} =)\frac{v}{u}$$

donc :

$$\left\{\begin{aligned} \left()\frac{u}{u}\right)^{(2} + \left()\frac{v}{u}\right)^{(2} &= 0 \\ )\frac{u}{u}\Big()\frac{v}{u} &=)\frac{v}{u}\Big()\frac{u}{u} \end{aligned}\right. \tag{7}$$

équations qu'on peut rapprocher de celles qui sont à la base du produit cyclique des vecteurs:

$$\left\{\begin{aligned} u\overset{2}{\smile} + v\overset{2}{\smile} &= 0 \\ u \smile v &= v \smile u \end{aligned}\right. \tag{8}$$

et qui montrent l'isomorphisme des deux produits soumis aux mêmes lois formelles. Mais cet isomorphisme est ici très intime,

[1] Cf. R. Mehmke. *Vorlesungen über Punkt und Vektorenrechnung*, I, 1, p. 320.

en ce sens que les produits précédents peuvent en somme « *se substituer l'un à l'autre en toute proportion* ».

Nous commencerons cependant par montrer que l'orientante d'une forme est bien définie indépendamment de toute direction de repère, malgré qu'il y figure les vecteurs isotropes j_1 et j_2 définis à partir de u et v.

Soit en effet:

$$u' = \cos\varphi u + \sin\varphi v$$

$$v' = -\sin\varphi u + \cos\varphi v \ .$$

Posons:

$$j_1' = u' + \iota v' \qquad j_2' = u' - \iota v' \ .$$

On voit que:

$$j_1' = e^{-\iota\varphi} j_1 \qquad j_2' = e^{\iota\varphi} j_2 \ .$$

On savait bien que l'ombilicale était indépendante de toute rotation des axes, c'est-à-dire:

$$j_1' j_2' = j_1 j_2 \ .$$

On voit en outre qu'on a aussi:

$$\frac{1}{[j_1 j_2]^n}\Big((f^{(n)})(j_2^n) j_1^n - (f^{(n)})(j_1^n) j_2^n \Big)$$
$$= \frac{1}{[j_1' j_2']^n}\Big((f^{(n)})(j_2'^n) j_1'^n - (f^{(n)})(j_1'^n) j_2'^n \Big)$$

c'est-à-dire que les produits cycliques sont bien définis de façon *absolue*.

Soit maintenant une forme:

$$f^{(n)} = abc \ldots l$$

évidemment indifférente à l'effet de l'opération identique $\mathfrak{U}$ sur un de ses facteurs; il en sera de même de son orientante.

Agissons ensuite avec le verseur droit $\mathfrak{I}$ sur un des facteurs de $f^{(n)}$, a par exemple, et voyons l'effet produit sur l'orientante. Il est évidemment permis de supposer a unitaire, et par suite de supposer a identique au vecteur u à partir duquel nous avons construit la forme orientante.

Alors:

$$[aj_2] = -\iota[a\mathcal{J}a] \qquad [aj_1] = \iota[a\mathcal{J}a]$$

et après la rotation:

$$[\mathcal{J}a \,.\, j_2] = [\mathcal{J}a \,.\, a] \qquad [\mathcal{J}a \,.\, j_1] = [\mathcal{J}a \,.\, a]$$
$$[\mathcal{J}a \,.\, j_2] = -\iota[aj_2] \qquad [\mathcal{J}a \,.\, j_1] = \iota[aj_1] \,.$$

Par suite, si:

$$a \smile b \smile c \ldots \smile l = \varphi_1 j_1^n - \varphi_2 j_2^n \tag{9}$$

$$\mathcal{J}a \smile b \smile c \ldots \smile l = -\iota(\varphi_1 j_1^n + \varphi_2 j_2^n) \,. \tag{10}$$

Quel que soit le facteur de $f^{(n)}$ sur lequel on aurait opéré, on serait arrivé au même résultat, ce qui montre que l'opération $\mathcal{J}$ est permutable avec les facteurs du produit cyclique; comme cela a lieu aussi pour la multiplication par un nombre et l'opération $\mathcal{U}$, cela est général pour toute similitude $\mathcal{H}$, et on pourra écrire:

$$\mathcal{H}(a \smile b \smile \ldots \smile l = \mathcal{H}a \smile b \smile c \ldots \smile l = \ldots = a \smile b \ldots \smile \mathcal{H}l \tag{11}$$

En particulier si:

$$a \smile b \ldots \smile l = x^{\overset{n}{\smile}}$$

on aura:

$$\mathcal{H}(x^{\overset{n}{\smile}} = \left(\mathcal{H}^{\left(\frac{1}{n}\right.} x\right)^{\overset{n}{\smile}} = \mathcal{H}^{\left(\frac{1}{n}\right.} a \smile \mathcal{H}^{\left(\frac{1}{n}\right.} b \ldots \smile \mathcal{H}^{\left(\frac{1}{n}\right.} l$$

c'est-à-dire que l'effet de l'opération $\mathcal{H}$ sur une orientante peut être réparti uniformément sur tous les facteurs de celle-ci, et ceci quelle que soit la détermination prise pour $\mathcal{H}^{\left(\frac{1}{n}\right.}$; autrement dit, faire subir la rotation φ à un facteur d'un produit $f^{(n)}$ revient à faire tourner l'orientante de cette forme de l'angle $\frac{\varphi}{n}$.

De même, si des similitudes $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$, ... etc. ont opéré sur divers émélents de $f^{(n)}$, le résultat réalisé sur l'orientante pourra simplement s'écrire:

$$\mathcal{H}(\mathcal{K}(\ldots(a \smile b \ldots \smile l \,.$$

Soit maintenant une équation cyclique:

$$a \smile b \smile \ldots \smile l = a' \smile b' \ldots \smile l' \,.$$

Dans ce système, la division par a' est possible[1] au second membre, donc au premier, et donne:

$$\Big)\frac{a \smile b \ldots \smile l}{a'} = b' \smile \ldots \smile l'$$

qu'on peut encore écrire:

$$\Big)\frac{a}{a'}\Big(b \smile c \ldots \smile l = b' \smile c' \ldots \smile l' \,.$$

Et comme on peut du reste faire apparaître au second membre un facteur quelconque u, en écrivant par exemple:

$$a' = \Big)\frac{a'}{u}\Big(u$$

on pourra en général diviser les deux membres d'une équation cyclique par tel facteur qu'on voudra, en susbtituant ainsi à chaque fois une similitude à un vecteur; de même qu'on pourra s'arrêter après un certain nombre de ces opérations, ayant ainsi ramené l'équation:

$$a \smile b \ldots \smile l = a' \smile b' \ldots \smile l'$$

à une forme:

$$p \smile q \smile r = p' \smile q' \smile r'$$

par exemple.

On pourra également faire les opérations inverses en multipliant par des vecteurs. Il n'y a donc qu'une différence d'*interprétation* entre les équations entre orientantes et celles entre similitudes; on voit en outre que de nombreuses opérations intermédiaires sont possibles, qui donnent facilement autant d'énoncés géométriques.

Remarquons encore que l'orientante d'un vecteur est ce vecteur lui-même et qu'on peut pousser les divisions par des vecteurs dans le système du produit cyclique au delà des similitudes et envisager des opérateurs tels que:

$$\Big)\frac{1}{a \smile b \smile \ldots \smile l}$$

---

[1] J'ai déjà employé cette méthode dans un cas particulier. *Enseignement mathématique*, XXII, 3.

qui, agissant sur un produit de $n+1$ facteurs, redonnent un vecteur, soit:

$$\left)\frac{1}{a \smile b \ldots \smile l}\right(a' \smile b' \ldots \smile l' \smile m' = m\ .$$

Nous verrons un peu plus tard comment on peut transformer ces opérateurs.

Remarque. Nous avons, chemin faisant, remarqué que l'opération $\mathcal{J}$, appliquée à une orientante:

$$\varphi_1 j_1^{\cdot n} - \varphi_2 j_2^{\cdot n}$$

la transformait en:

$$-\iota(\varphi_1 j_1^{\cdot n} + \varphi_2 j_2^{\cdot n})\ .$$

Ceci donne un sens plus précis aux opérations $\mathfrak{A}_n$ précédemment employées:

$$\mathfrak{A}_n = \iota \mathcal{J} \qquad (12)$$

et montre que l'opération $\mathfrak{A}_n$ est indépendante de son indice n.

En outre, la formule fondamentale (9) ch. III, devient:

$$f^{\underset{\smile}{(n)}} = \frac{\iota}{2}\left(g^{\underset{\smile}{(p)}} \mathcal{J} h^{\underset{\smile}{(q)}} + h^{\underset{\smile}{(q)}} \mathcal{J} g^{\underset{\smile}{(p)}}\right) = g^{\underset{\smile}{(p)}} \smile h^{\underset{\smile}{(q)}}\ . \qquad (13)$$

Chapitre V

Nouveaux développements sur les similitudes. Anti-similitudes et affinités.

On sait qu'à une similitude:

$$\mathcal{H} = \lambda \mathfrak{U} + \mu \mathcal{J}$$

on peut adjoindre la similitude conjuguée:

$$\mathrm{K}\mathcal{H} = \overline{\mathcal{H}} = \lambda \mathfrak{U} - \mu \mathcal{J}$$

qui a même équation fondamentale que $\mathcal{H}$, comme cela résulte de l'égalité des invariants:

$$\begin{cases} [\mathfrak{U}\overline{\mathcal{H}}] = [\mathfrak{U}\mathcal{H}] = \lambda \\ \overline{\mathcal{H}}^{\text{II}} = \mathcal{H}^{\text{II}} = \lambda^2 + \mu^2 \qquad \text{(norme de } \mathcal{H}) \end{cases}$$

invariants qui sont aussi donnés par:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(\mathcal{H} + \overline{\mathcal{H}}) = \lambda \\ \mathcal{H}(\overline{\mathcal{H}} = \overline{\mathcal{H}}(\mathcal{H} = \lambda^2 + \mu^2 \end{cases}$$

si on accepte de représenter par 1 l'opération identique.

Supposons maintenant:

$$\mathcal{H} =)\frac{b}{a} \qquad \overline{\mathcal{H}} = \frac{b^{\overset{2}{\times}}}{a^{\overset{2}{\times}}})\frac{a}{b}$$

donc :

$$\mathcal{H}^{\mathrm{II}} = \frac{b^{\overset{2}{\times}}}{a^{\overset{2}{\times}}} . \tag{1}$$

Puis, comme :

$$b = \mathcal{H} a = \lambda a + \mu \mathcal{J} a$$

$$a \times \dot{b} = \lambda a^{\overset{2}{\times}} .$$

On trouve d'autre part:

$$\lambda = [\mathfrak{U}\mathcal{H}] =)\frac{b}{a} + \frac{b^{\overset{2}{\times}}}{a^{\overset{2}{\times}}})\frac{a}{b} =)\frac{a^{\overset{2}{\times}} b^{\overset{2}{\smile}} + b^{\overset{2}{\times}} a^{\overset{2}{\smile}}}{a^{\overset{2}{\times}}\, a \smile b} = \frac{a \times b}{a^{\overset{2}{\times}}} \tag{2}$$

ce qui donne la relation identique entre les trois orientantes $a^{\overset{2}{\smile}}$, $a \smile b$, $b^{\overset{2}{\smile}}$:

$$a^{\overset{2}{\times}} b^{\overset{2}{\smile}} - 2(a \times b)\, a \smile b + b^{\overset{2}{\times}} a^{\overset{2}{\smile}} = 0 \tag{3}$$

qui n'est qu'une autre forme de la relation fondamentale à laquelle satisfait $\mathcal{H}$:

$$)\frac{b^{\overset{2}{\smile}}}{a^{\overset{2}{\smile}}} - 2\frac{a \times b}{a^{\overset{2}{\times}}})\frac{b}{a} + \frac{b^{\overset{2}{\times}}}{a^{\overset{2}{\times}}} = 0 . \tag{4}$$

A côté des similitudes, qui transforment une figure en une autre directement semblable, nous allons étudier les *anti-similitudes* (comprenant les anti-rotations), transformant une figure en une autre inversement semblable.

Il est pour cela commode d'introduire la notion de vecteur *inverse* d'un vecteur donné, que nous définirons et représenterons ici par:

$$\bar{x} = \frac{x}{x^{\overset{2}{\times}}}$$

et inversement:

$$x = \frac{\bar{x}}{\bar{x}^{\overset{2}{\times}}} .$$

La similitude conjuguée de:

$$\mathcal{H} = \Big)\frac{b}{a}$$

sera alors:

$$\bar{\mathcal{H}} = \Big)\frac{\bar{a}}{\bar{b}} .$$

Supposons maintenant que des vecteurs a, x soient transformés par une anti-similitude $\mathfrak{T}$ en vecteurs b, y. On doit avoir:

$$\Big)\frac{y}{b} = \mathbf{K}\Big)\frac{x}{a} = \Big)\frac{\bar{a}}{\bar{x}}$$

donc:

$$y = \mathfrak{T}x = \Big)\frac{b \smile \bar{a}}{\bar{x}}$$

et le numérateur pourrait du reste s'abréger en $e^{\overset{2}{\smile}}$. Il serait facile de montrer que la séquence de deux anti-similitudes est une similitude, comme de calculer les invariants de ces opérateurs. Mais nous n'avons là que des cas particuliers des homographies vectorielles du plan, ou affinités.

Nous allons montrer que, réciproquement, toute affinité plane peut-être décomposée en la somme d'une similitude et d'une anti-similitude. Nous rappelons à ce sujet qu'une homographie vectorielle, mise sous forme d'un rapport extensif, peut être transformée en une forme dyadique, c'est-à-dire en une somme de dyades.

Soit:

$$\mathfrak{A} = \Big\{ b \, , \; \bar{a} \Big\} \tag{5}$$

une telle dyade qui, par définition, transforme un vecteur x de la manière suivante:

$$y = \mathfrak{A}x = \left\{ b\,,\ \bar{a} \right\} (x = (\bar{a} \times x) b\ .$$

Il nous suffira évidemment de faire la démonstration indiquée sur la dyade $\mathfrak{A}$. Or on peut écrire:

$$2\mathfrak{A} = \left\{ b\,,\ \bar{a} + \mathfrak{I}b\,,\ \mathfrak{I}\bar{a} \right\} + \left\{ b\,,\ \bar{a} - \mathfrak{I}b\,,\ \mathfrak{I}\bar{a} \right\}\ . \qquad (6)$$

Le premier opérateur

$$\left\{ b\,,\ \bar{a} + \mathfrak{I}b\,,\ \mathfrak{I}\bar{a} \right\}$$

transforme les vecteurs a et $\mathfrak{I}a$ respectivement en b et $\mathfrak{I}b$. C'est donc une similitude:

$$\mathcal{H} = \left\{ b\,,\ \bar{a} + \mathfrak{I}b\,,\ \mathfrak{I}\bar{a} \right\} = \frac{b\,,\ \mathfrak{I}b}{a\,,\ \mathfrak{I}a} =)\frac{b}{a}\ .$$

Le second opérateur

$$\left\{ b\,,\ \bar{a} - \mathfrak{I}b\,,\ \mathfrak{I}\bar{a} \right\}$$

transforme a et $\mathfrak{I}a$ en b et $-\mathfrak{I}b$; c'est donc bien l'anti-similitude $\mathfrak{T}$ précédemment définie, donc:

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{2}(\mathcal{H} + \mathfrak{T})$$

décomposition aussi remarquable pour les propriétés métriques que la décomposition en parties symétrique et gauche pour les propriétés affines.

On définirait aussi simplement des opérateurs non-linéaires réalisant l'inversion et la sym-inversion (inversion symétrique), qui, par leurs séquences, reproduisent les similitudes directes et inverses. Nous les formerons directement dans les applications quand ils nous seront utiles.

Remarque. — Une anti-similitude est une transformation involutive, qui coïncide avec sa conjuguée, et dont l'équation fondamentale est:

$$\mathfrak{T}^{(2} = -\mathfrak{T}^{11}\ .$$

Quels que soient les vecteurs a et b, on a :

$$\mathcal{T}a \times \mathcal{T}b = \alpha a \times b$$

et nous pouvons écrire la constante α sous la forme $\mathcal{T}^{\overset{2}{\times}}$, donc :

$$\mathcal{T}a \times \mathcal{T}b = \mathcal{T}^{\overset{2}{\times}} a \times b \ . \qquad (7)$$

On voit immédiatement que :

$$\mathcal{T}^{\overset{2}{\times}} = - \mathcal{T}^{\text{II}} \ . \qquad (8)$$

Pour une similitude, au contraire, en définissant $\mathcal{H}^{\overset{2}{\times}}$ par :

$$\mathcal{H}a \times \mathcal{H}b = \mathcal{H}^{\overset{2}{\times}} a \times b \qquad (9)$$

on aurait :

$$\mathcal{H}^{\overset{2}{\times}} = \mathcal{H}^{\text{II}} \ . \qquad (10)$$

Ces relations (8) et (10) expriment toutes deux que l'homographie considérée est telle que le produit $\mathcal{A}(\overline{\mathcal{A}}$ est un opérateur numérique [1].

Ajoutons, en ce qui concerne les homographies $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ que la relation fondamentale n'est qu'un cas particulier de l'équation :

$$\frac{1}{2}\left(\mathcal{A}(\mathcal{B} + \mathcal{B}(\mathcal{A}\right) - [\mathcal{U}\mathcal{B}]\mathcal{A} - [\mathcal{U}\mathcal{A}]\mathcal{B} + [\mathcal{A}\mathcal{B}]\mathcal{U} = 0 \qquad (11)$$

identité entre cinq homographies vectorielles du plan.

Pour les similitudes ou anti-similitudes, on peut remplacer les coefficients de cette équation par des expressions telles que $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ défini par :

$$2(\mathcal{A} \times \mathcal{B})a \times b = (\mathcal{A}a \times \mathcal{B}b) + (\mathcal{A}b \times \mathcal{B}a) \ . \qquad (12)$$

---

[1] Cf. C. Burali-Forti et R. Marcolongo. *Analyse vectorielle générale*, I. Transformations linéaires, p. 47.

Chapitre VI

Extension du produit intérieur aux points et segments. Système linéaire des cercles du plan.

Nous avons là encore besoin de quelques notions de calcul géométrique pour écrire les relations projectives entre les divers éléments du plan: points, segments (droites), et leurs produits algébriques. Nous allons très brièvement citer l'indispensable pour préciser nos notations.

Les points du plan — y compris les vecteurs — dépendent linéairement de trois unités. Par le produit *extérieur*, on définit:

$$[ab] = -[ba]$$

(ou encore $\overline{ab}$ ou $a.b$), qui n'est plus ici un scalaire, mais un nouvel élément appelé *segment* (orienté), puis:

$$[abc] = [bca] = [cab] = -[bac] = -[acb] = -[cba]$$

(ou encore $\overline{abc}$, $a.b.c$) élément scalaire mesurant deux fois l'aire orientée du triangle abc. Les segments dépendent eux aussi de $\frac{3(3-1)}{2} = 3$ unités et forment un nouveau système linéaire, complémentaire de celui des points. Leurs produits extérieurs redonnent le point et l'aire orientée. Les segments considérés en tant qu'éléments seront représentés par des grandes lettres A, B, etc.

En géométrie affine, on distingue le système des vecteurs, ou points de la droite de l'infini $J = [uv]$; avec un point a quelconque, cette droite détermine un invariant, la *masse* du point $\alpha = [aJ]$; la masse d'un vecteur est nulle.

A un segment $A = [ab]$ appartient un vecteur déterminé:

$$[A \,.\, J] = [aJ]b - [bJ]a$$

de sorte que si les points a et b sont de masse 1, ce vecteur s'écrit:

$$b - a$$

Nous représenterons encore par $\overrightarrow{ab}$ le vecteur d'un segment $\overline{ab}$, puisqu'il s'agit là d'un produit entre les points a et b et le bivecteur J.

Remarquons que le vecteur d'un bivecteur λJ est nul. Les produits algébriques de points définissent des formes de divers degrés ou classes; il en est de même des produits algébriques de droites (ou segments) qui définissent des formes d'ordres divers. Combinées entre elles par des produits convenables, ces formes donnent des combinaisons scalaires. Nous considérerons entre formes de même classe les produits construits sur les modèles suivants:

polaire $$a^2 \,)(\, b^2 = b^2 \,)(\, a^2 = [ab]^2$$

$$\mathrm{A}^2 \,)(\, \mathrm{B}^2 = \mathrm{B}^2 \,)(\, \mathrm{A}^2 = [\mathrm{A} \,.\, \mathrm{B}]^2$$

puis:

$$a^2 \,)(\, b^2 \,)(\, c^2 = \ldots = [abc]^2$$

$$\mathrm{A}^2 \,)(\, \mathrm{B}^2 \,)(\, \mathrm{C}^2 = \ldots = [\mathrm{ABC}]^2$$

et de même pour les formes d'ordres supérieurs.

Ainsi, $f^{(3)}$ représentant une courbe de 3e classe, X une droite variable, l'équation tangentielle de la courbe est:

$$f^{(3)} \,)(\, \mathrm{X}^3 = 0$$

de sorte que si la droite X contient un point fixe m et un point variable x, cette équation s'écrivant:

$$f^{(3)} \,)(\, m^3 \,)(\, x^3 = 0$$

$f^{(3)} \,)(\, m^3$ représente la courbe de 3e ordre formée par les tangentes menées de m à $f^{(3)}$.

De même, entre des formes contrevariantes de degrés différents $f^{(n)}$ et $\mathrm{G}^{(p)}$, si n est supérieur à p, par exemple:

$$f^{(n)} \,)(\, \mathrm{G}^{(p)}$$

est une forme de classe n-p; si elle est identiquement nulle, $\mathrm{G}^{(p)}$ est apolaire à $f^{(n)}$.

Des produits de forme:

$$f^{(n)} \overset{r}{\cdot} g^{(p)} = \Sigma [ab]^r a^{n-r} b^{p-r}$$

$$f^{(n)} \overset{r}{\cdot} \mathrm{G}^{(p)} = \Sigma [a\mathrm{B}]^r a^{n-r} \mathrm{B}^{p-r}$$

définissent des formes *mixtes* dont nous nous servirons le moins possible. Cependant le produit :

$$\textit{jacobien généralisé} \quad [a^{(n)} \,.\, b^{(n)} \,.\, c^{(n)} \ldots] \quad \text{ou} \quad a^{(n)} \,.\, b^{(n)} \,.\, c^{(n)} \ldots$$

conserve la propriété simple d'exprimer, quand il est nul, que les formes $a^{(n)}$, $b^{(n)}$, etc., sont liées par une relation linéaire à coefficients numériques.

En géométrie métrique, nous ferons usage, au moins pour l'exposition, des vecteurs isotropes j_1 et j_2 précédemment utilisés, et entre deux droites A et B nous définirons le *produit intérieur* :

$$\mathrm{A} \times \mathrm{B} = \mathrm{AB} \,)(\, j_1 j_2 \qquad (1)$$

(ou, si l'on préfère, le quotient de l'expression précédente par $u^{\overset{2}{\times}}$). On peut du reste toujours, s'il s'agit de géométrie affine ou métrique, supposer que les points qui définissent les droites sont de masse unité — en tenant compte de la *loi de conservation des masses* — et nous le ferons désormais. En conséquence, soient m et n des points de A et B, a et b les vecteurs de ces segments.

$$\mathrm{A} = \overline{ma} \qquad \mathrm{B} = \overline{nb}$$

$$\mathrm{A} \times \mathrm{B} = a \times b \qquad \text{ou} \qquad \overline{ma} \times \overline{nb} = \overrightarrow{ma} \times \overrightarrow{nb}$$

c'est-à-dire que le *produit intérieur de deux segments est égal à celui de leurs vecteurs.*

Nous allons maintenant définir le *produit intérieur de deux points*, soient m et n.

$$m \times n = mn \,)(\, j_1 j_2 = \frac{1}{2}\left([mj_1][nj_2] + [mj_2][nj_1]\right) . \qquad (2)$$

Ce produit intérieur est donc une forme du second ordre, d'équation :

$$mn \,)(\, j_1 j_2 \,)(\, x^2 = 0 \,.$$

Comme cette équation exprime aussi :

$$mn \,)(\, x^2 \,)(\, j_1 j_2 = \overline{mx}\,\overline{nx} \,)(\, j_1 j_2 = \overline{mx} \times \overline{nx} = 0$$

la forme $m \times n$ est le cercle de diamètre m, n.

Plus généralement, à une forme de 2e classe $f^{(2)}$ appartient ainsi une forme intérieure:

$$\overset{(2)}{f^{\times}} = f^{(2)})(j_1 j_2 \qquad (3)$$

et qui est le cercle de Monge (orthoptique) de la courbe de seconde classe représentée par $f^{(2)}$.

Une forme ma, où a est un vecteur (et plus généralement une conique tangente à la droite de l'infini) donnera naissance à la forme intérieure:

$$m \times a$$

qui représente la droite menée en m perpendiculairement au vecteur a (ou une droite de Monge).

Les cercles, droites, et le produit intérieur de deux vecteurs, qui représente la droite de l'infini, forment un système linéaire à quatre unités— dans lequel les droites forment un système à trois unités. Ce système a été maintes fois étudié, soit au moyen des coordonnées quadri-circulaires, soit par les méthodes de Grassmann [1], bien qu'on ait jusqu'ici rarement accepté la définition du produit intérieur des points, à laquelle nous pensons rendre ici sa place.

Si o, u, v sont un point quelconque du plan et deux vecteurs unitaires rectangulaires, ce produit obéit aux lois formelles:

$$o \times u = u \times o \qquad o \times v = v \times o$$

$$u \times v = v \times u = 0 \qquad \overset{2}{u^{\times}} = \overset{2}{v^{\times}}$$

d'où les quatre unités du système:

$$\overset{2}{o^{\times}}, \quad o \times u, \quad o \times v, \quad \overset{2}{u^{\times}}$$

Si m est un élément quelconque, point ou vecteur, toute forme intérieure $\Sigma \mu \overset{2}{m^{\times}}$ peut être, d'une infinité de manières, réduite à un produit de deux éléments. Soit en effet à résoudre:

$$\Sigma \mu \overset{2}{m^{\times}} = x \times y \qquad (4)$$

[1] Cf. par exemple, E. Muller. *Die Kugelgeometrie nach den Principien der Grassmann'schen Ausdehnungslehre-Monatshefte f. Math. u. Phys.* III, IV.

On peut remplacer cette équation par l'équivalence:

$$\Sigma\mu m^2 = xy + \lambda_1 j_1^2 + \lambda_2 j_2^2 \qquad (5)$$

ou:

$$\Sigma\mu m^2 = xy \qquad \left(\text{modules } j_1^2 , j_2^2\right)$$

La première polaire de la droite de l'infini:

$$\Sigma\mu m = \Sigma\mu m^2)(J = xy)(J = \frac{1}{2}(x + y)$$

détermine le centre à distance finie ou infinie; la combinaison polaire $\Sigma\mu m^2)(J^2$ aurait de même exprimé la conservation des masses, que nous avons supposée réalisée: $\Sigma\mu = 1$.

On peut ensuite, soit résoudre l'équivalence, soit former l'équation du 2e degré ayant les séries de racines x, y et qui est:

$$\overset{2}{x^{\times}} - 2\Sigma\mu m \times x + \Sigma\mu \overset{2}{m^{\times}} = 0$$

d'où:

$$\left.\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\} = \Sigma\mu m \pm \sqrt{\overset{2}{(\Sigma\mu m)^{\times}} - \Sigma\mu \overset{2}{m^{\times}}} = o \pm \rho \sqrt{\overset{2}{u^{\times}}}$$

si o est le centre du cercle, ρ son rayon réel ou imaginaire.

On aurait une résolution analogue dans le cas d'une droite à distance finie ou infinie.

L'emploi de l'équivalence (5) a montré qu'une forme intérieure est en réalité attachée à un réseau de formes de 2e classe.

Dans le système des cercles, on sait former de nouveau des produits extérieur et intérieur. Nous définirons directement ce dernier de la façon suivante; l'expression:

$$f^{(2)})(j_1 j_2)(g^{(2)} = \overset{(2)}{f^{\times}})(g^{(2)} = f^{(2)})(\overset{(2)}{g^{\times}}$$

est une fonction linéaire de chacune des formes intérieures $\overset{(2)}{f^{\times}}$ et $\overset{(2)}{g^{\times}}$, et on peut montrer qu'elle coïncide avec ce produit intérieur (qu'on peut définir à un facteur constant près). C'est elle que nous choisirons comme *produit intérieur de deux cercles* (ou droites) et représenterons par:

$$\overset{(2)}{f^{\times}} \,\Big|\, \overset{(2)}{g^{\times}} = f^{(2)})(g^{(2)})(j_1 j_2 \qquad (6)$$

On sait que cette expression est la puissance mutuelle de deux circonférences; le calcul est du reste aisé:

$$\varpi = \left(o\overset{2}{\times} - \rho^2 u\overset{2}{\times}\right) \Big| \left(o\overset{\prime 2}{\times} - \rho'^2 u\overset{2}{\times}\right) = o\overset{2}{\times} \Big| \, o\overset{\prime 2}{\times} - u\overset{2}{\times} \Big| \left(\rho^2 o\overset{\prime 2}{\times} + \rho'^2 o\overset{2}{\times}\right)$$
$$= \overline{oo'}\overset{2}{\times} - \rho^2 - \rho'^2 \, .$$

Si les cercles ont été pris sous les formes $a \times b$ et $a' \times b'$:

$$\varpi = \frac{1}{2}\left(\overline{aa'} \times \overline{bb'} + \overline{ab'} \times \overline{ba'}\right)$$

Quand les cercles sont orthogonaux, cette puissance est nulle. Sous la forme: ab)(cd)($j_1 j_2 = o$ cela exprime que les couples *ab et cd* sont conjugués harmoniques sur une hyperbole équilatère, d'où le théorème réciproque: les cercles décrits avec deux tels couples aux extrémités d'un diamètre, sont orthogonaux. En développant l'expression précédente sous la forme:

$$(a' - a) \times (b' - b) + (b' - a) \times (a' - b) = 0$$

ou:

$$2\,(a \times b + a' \times b') = (a + a') \times (b + b')$$

on retrouve l'analogue de la relation harmonique; en outre:

$$\frac{a \times b + a' \times b'}{2} = \frac{a + a'}{2} \times \frac{b + b'}{2}$$

exprime que le cercle ayant pour points diamétraux les centres des deux cercles orthogonaux appartient au faisceau linéaire de ceux-ci (condition nécessaire et suffisante pour l'orthogonalité). On voit le principe de ces calculs: le produit intérieur des cercles se développe comme un produit polaire du domaine binaire, mais les segments qui apparaissent ainsi, et ne sont plus scalaires, sont soumis à une multiplication intérieure; dans le produit intérieur obtenu, on peut remplacer les segments par leurs vecteurs; si on exprime ceux-ci comme différences de points, on retrouve de nouvelles identités à interpréter entre produits intérieurs de points, c'est-à-dire entre cercles.

Les relations métriques sur la droite ne sont que des cas par-

ticuliers de ces relations entre cercles du plan, mais inversement l'analogie entre les relations telles que:

$$a^2 \,)(\, b^2 = \overline{ab}^2 = (b - a)^2 = b^2 - 2ab + a^2$$

sur la droite, et:

$$\overset{2}{a^{\times}} \mid \overset{2}{b^{\times}} = \overset{2}{\overline{ab}^{\times}} = \overset{2}{(b - a)^{\times}} = \overset{2}{b^{\times}} - 2a \times b + \overset{2}{a^{\times}}$$

dans le plan, fournit un *principe de transfert* utile, et développé dans le sens où Grassmann a exposé l'algèbre du domaine binaire comme celle du produit intérieur. Il est permis de penser que ce calcul donne plus que celui des coordonnées, qui ne considère les relations entre cercles qu'à partir d'un point, d'ailleurs arbitraire, mais extérieur au système: ce que nous obtenons, par exemple, à partir de la dernière relation, en formant l'expression:

$$\overset{2}{\overrightarrow{pb}^{\times}} - 2\overrightarrow{pa} \times \overrightarrow{pb} + \overset{2}{\overrightarrow{pa}^{\times}} .$$

On aura beau multiplier les points de vue p desquels on regarde le système, il sera évidemment difficile d'avoir une idée aussi nette de sa constitution que celle qui résulte de la composition de ses éléments !

Toutes les relations métriques entre cercles, droites et points, s'obtiennent et s'interprètent immédiatement; citons seulement la condition de contact de deux cercles exprimant que leur faisceau est singulier:

$$\left(\overset{(2)}{f^{\times}} . \overset{(2)}{g^{\times}}\right)\Big|^{2} = 0$$

la condition pour que trois cercles passent par un point, ou forment un réseau singulier:

$$\left(\overset{(2)}{f^{\times}} . \overset{(2)}{g^{\times}} . \overset{(2)}{h^{\times}}\right)\Big|^{2} = 0$$

etc., qui toutes se développent sur le type des formes du domaine binaire.

Nous voulons revenir en particulier sur la condition exprimant que quatre points sont sur un cercle:

$$\overset{2}{a^{\times}} . \overset{2}{b^{\times}} . \overset{2}{c^{\times}} . \overset{2}{d^{\times}} = 0 \,. \qquad (7)$$

On sait que le développement du carré intérieur du premier membre donne le théorème de Ptolémée; nous allons donner d'autres développements de cette condition, qui indique une relation de la forme:

$$\alpha a^{\overset{2}{\times}} + \beta b^{\overset{2}{\times}} + \gamma c^{\overset{2}{\times}} + \delta d^{\overset{2}{\times}} = 0 \qquad (8)$$

ou

$$\alpha a^2 + \beta b^2 + \gamma c^2 + \delta d^2 + \lambda_1 j_1^2 + \lambda_2 j_2^2 = 0 \qquad (9)$$

ce qui donne la condition sous forme projective:

$$a^2 \,.\, b^2 \,.\, c^2 \,.\, d^2 \,.\, j_1^2 \,.\, j_2^2 = 0 \,. \qquad (10)$$

Paul Serret, dans sa « Géométrie de Direction », a étudié plusieurs des formes qu'on peut donner à la relation précédente entre six points sur une conique. C'est ainsi qu'elle se transforme aisément en:

$$\overline{ab}^2 \,.\, \overline{bc}^2 \,.\, \overline{ca}^2 \,.\, \overline{dj_1}^2 \,.\, \overline{dj_2}^2 \,.\, \overline{j_1 j_2}^2 = 0 \qquad (11)$$

et exprime qu'une courbe de 2e classe est inscrite dans les triangles *abc* et $dj_1 j_2$: cette courbe est une parabole de foyer *d*, dont la tangente au sommet est la droite de Simson de ce point par rapport au triangle *abc*. Ou encore la relation (11) signifie que ces deux triangles *abc* et $dj_1 j_2$ sont conjugués à une même courbe du 2e ordre, à savoir l'hyperbole équilatère de centre *d* passant par les sommets du quadrangle orthocentrique ayant *abc* pour triangle diagonal, et le cercle figure ici comme cercle des 9 points. On peut aussi employer la forme remarquable:

$$\left(\overline{ab}\,\overline{cd} \,.\, \overline{ac}\,\overline{db}\right)\!\left(\, j_1^2 \,.\, j_2^2\right) = 0 \qquad (12)$$

ou

$$\begin{vmatrix} \overline{ab}\,\overline{cd}\,)(\, j_1^2 & \overline{ac}\,\overline{db}\,)(\, j_1^2 \\ \overline{ab}\,\overline{cd}\,)(\, j_2^2 & \overline{ac}\,\overline{db}\,)(\, j_2^2 \end{vmatrix} = 0$$

qu'on peut du reste modifier grâce à l'identité:

$$\overline{ab}\,\overline{cd} + \overline{ac}\,\overline{db} + \overline{ad}\,\overline{bc} = 0 \qquad (13)$$

et sur laquelle nous aurons à revenir.

Au point de vue métrique, si a, b, c, d sont des points, non des vecteurs, les masses:

$$a^{\overset{2}{\times}} \,\Big|\, u^{\overset{2}{\times}} \,, \quad b^{\overset{2}{\times}} \,\Big|\, u^{\overset{2}{\times}} \,, \quad c^{\overset{2}{\times}} \,\Big|\, u^{\overset{2}{\times}} \,, \quad d^{\overset{2}{\times}} \,\Big|\, u^{\overset{2}{\times}}$$

étant toutes égales à l'unité, la relation (9) donne, en prenant la 1re forme polaire de la droite de l'infini J:

$$\alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d = 0$$

relation qui se déduit aussi de (8) en prenant:

$$\alpha \overline{au} \times \overline{ax} + \beta \overline{bu} \times \overline{bx} + \gamma \overline{cu} \times \overline{cx} + \delta \overline{du} \times \overline{dx} = 0 \ .$$

On en déduit aussitôt:

$$\frac{[bcd]}{\alpha} = \frac{-[cda]}{\beta} = \frac{[dab]}{\gamma} = \frac{-[abc]}{\delta}$$

ce qui satisfait aussi à:

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0 \ .$$

En outre (8) peut s'écrire:

$$\alpha\left(a^{\overset{2}{\times}} - d^{\overset{2}{\times}}\right) + \beta\left(b^{\overset{2}{\times}} - d^{\overset{2}{\times}}\right) + \gamma\left(c^{\overset{2}{\times}} - d^{\overset{2}{\times}}\right) = 0$$

$$\left(a^{\overset{2}{\times}} - d^{\overset{2}{\times}}\right) . \left(b^{\overset{2}{\times}} - d^{\overset{2}{\times}}\right) . \left(c^{\overset{2}{\times}} - d^{\overset{2}{\times}}\right) = 0$$

ou:

$$\frac{a+d}{2} \times (a-d) \ . \ \frac{b+d}{2} \times (b-d) \ . \ \frac{c+d}{2} \times (c-d) = 0$$

ce qui exprime que les droites menées perpendiculairement à *ad*, *bd*, *cd* en leur milieu, concourent au centre du cercle, et permet le calcul de ce centre.

Ces exemples élémentaires suffisent sans doute à montrer la simplicité du calcul employé. Ajoutons qu'il se généralise pour ainsi dire sans changement en un calcul appliqué aux sphères de l'espace, et qu'en outre cercles et sphères rentrent dans un système plus étendu de cercles et sphères orientés qui nécessite, par exemple, dans le plan, qu'on substitue aux points les cycles de Laguerre: j'espère montrer dans une autre occasion que ceux-ci sont les éléments de produits intérieurs qui fournissent sans peine des combinaisons intéressantes.

CHAPITRE VII

Extension du produit cyclique aux points et segments.

Le *produit cyclique* de n segments A, B, ... L sera l'expression :

$$F^{(n)}_{\smile} = A \smile B \smile \ldots \smile L = \frac{1}{[j_1 j_2]^n}\Big(\big(F^{(n)})(j_2^n\big) j_1^n - \big(F^{(n)})(j_1^n\big) j_2^n\Big). \quad (1)$$

Cette forme vectorielle d'ordre n sera encore appelée l'*orientante* de la forme segmentaire initiale $F^{(n)}$; la définition s'étendra au cas où la forme $F^{(n)}$ sera une somme de produits de segments d'ordre n, et nous voyons que l'*orientante d'une forme segmentaire est celle de la forme vectorielle correspondante*, obtenue en remplaçant chaque segment par son vecteur.

Si nous considérons maintenant une forme ponctuelle $f^{(n)}$, nous appellerons *forme cyclique* correspondante, ou *produit cyclique*, la forme *mixte* :

$$f^{(n)}_{\smile} = \frac{1}{[j_1 j_2]^n}\Big(\big(f^{(n)})(j_2^n\big) j_1^n - \big(f^{(n)})(j_1^n\big) j_2^n\Big). \quad (2)$$

Une telle forme étant nulle dès qu'on substitue à $f^{(n)}$ une forme contenant $j_1 j_2$ en facteur, il est facile de voir que les formes cycliques d'ordre n dépendent linéairement de $2n-1$ unités.

C'est ainsi que les formes cycliques du 2e ordre forment un système linéaire à 5 unités, que nous étudierons un peu en détail.

Dans le système ainsi formé, on peut définir un nouveau produit intérieur, ce que nous ferons de la manière suivante. L'expression :

$$\frac{1}{[j_1 j_2]^n}\Big(\big(f^{(n)})(g^{(n)})(j_2^n\big) j_1^n - \big(f^{(n)})(g^{(n)})(j_1^n\big) j_2^n\Big) \quad (3)$$

est une fonction linéaire des produits cycliques $f^{(n)}_{\smile}$ comme $g^{(n)}_{\smile}$; on peut la considérer comme un nouveau produit entre ces

formes; le *produit intérieur de deux formes cycliques*[1] de même ordre est donc défini par:

$$f_{\smile}^{(n)} \mid g_{\smile}^{(n)} = f_{\smile}^{(n)})(g^{(n)} = g_{\smile}^{(n)})(f^{(n)} \qquad (4)$$

le produit polaire au second membre ayant le sens de l'expression (3). Il est à remarquer qu'un tel produit n'est ici *pas scalaire*, mais dépend de deux unités; ce produit intérieur sera aussi appelé *l'orientante* des formes $f^{(n)}$ et $g^{(n)}$, ou $f_{\smile}^{(n)}$ et $g_{\smile}^{(n)}$.

Si $f_{\smile}^{(n)}$ et $g_{\smile}^{(n)}$ sont des puissances cycliques de points, ce qui n'est pas le cas général, on a donc:

$$a_{\smile}^{n} \mid b_{\smile}^{n} = \overline{ab}_{\smile}^{n} = \overrightarrow{ab}_{\smile}^{n} = (b - a)_{\smile}^{n}$$

ce qui montre l'existence d'un *principe de transfert* analogue à celui que nous avons signalé pour le produit intérieur de cercles.

En ce qui concerne les formes cycliques d'ordre n, nous devons signaler qu'une telle forme peut en général se ramener à un produit cyclique de n éléments, c'est-à-dire qu'on peut résoudre en a, b, c,... l l'équation:

$$f_{\smile}^{(n)} = a \smile b \smile c \ldots l$$

à laquelle on peut substituer l'équivalence:

$$f^{(n)} = abc \ldots l \,. \qquad (\text{module } j_1 j_2)$$

Celle-ci peut à son tour être remplacée par:

$$\begin{cases} f^{(n)})(j_1^n = abc \ldots l)(j_1^n \\ f^{(n)})(j_2^n = ab \ldots l)(j_2^n \end{cases}$$

Or $f^{(n)})(j_1^n$ et $f^{(n)})(j_2^n$ représentent le système des tangentes menées à la forme $f^{(n)}$ de classe n par les points cycliques j_1 et j_2; ces deux systèmes de tangentes ont en général pour intersections un système de n^2 foyers, et c'est l'ensemble des n foyers réels a, b ... l que nous prendrons de préférence comme solutions.

On pourra encore dire que la forme mixte $f_{\smile}^{(n)}$ caractérise l'ensemble des courbes de classe n homofocales à la forme $f^{(n)}$.

---

[1] Ce produit n'est du reste pas le seul produit absolu qu'on puisse former entre formes cycliques.

Sauf quand il contient le facteur du 2e ordre $j_1 \smile j_2$ un produit cyclique de points ne s'annulera encore qu'avec l'un de ses facteurs.

Entre deux formes cycliques d'ordres différents, on peut aussi employer le produit intérieur: quand nous aurons besoin de le faire, nous nous ramènerons facilement au cas de deux formes de même ordre.

Nous allons maintenant montrer, au moyen de quelques applications, la simplicité des nouveaux produits définis pour l'expression des théorèmes sur l'orientation de Laguerre et G. Humbert, pour l'étude des propriétés focales des courbes et des coniques en particulier, enfin pour la représentation des covariants des formes binaires sur le plan complexe.

NOTE *sur la représentation des imaginaires de Laguerre et Darboux.*

Nous avons défini les opérations de la géométrie métrique à partir de celles de la géométrie projective au moyen des vecteurs isotropes:

$$j_1 = u + \iota v \qquad j_2 = u - \iota v$$

mais on peut rendre ces opérations indépendantes de l'introduction de ces éléments imaginaires si l'on substitue au nombre complexe ι la rotation d'un angle droit représentée par l'opérateur $\mathcal{J}$. C'est ce principe de représentation géométrique des imaginaires, comme l'on dit, qui a été en géométrie analytique étendu par Laguerre et Darboux à la représentation des points à coordonnées imaginaires: le calcul vectoriel est tout indiqué pour cette adaptation.

Toute équation entre vecteurs où figurent des coefficients imaginaires sera transformée, par le remplacement de ι par $\mathcal{J}$, en une équation d'autre signification, qui donnera une interprétation de la relation précédente entre vecteurs imaginaires. En outre, nous pourrons donner un sens à un symbole ponctuel:

$$a + \mathcal{J}b$$

substitué à:

$$a + \iota b$$

point imaginaire de la droite $\overline{ab}$, si toute équation qui contient de tels symboles peut être transformée en une équation vecto-

rielle, c'est-à-dire si on impose la conservation des masses. Ainsi :

$$m' = a + \mathfrak{J}b$$

n'aura de sens qu'en donnant à m' la masse $(1 + \mathfrak{J})$ et le représentant par le point m tel que :

$$(1 + \mathfrak{J})m = a + \mathfrak{J}b$$

$$m - a = \mathfrak{J}(b - m) .$$

C'est dans ces conditions que deux points imaginaires conjugués, par exemple :

$$m_1 = \frac{a + ib}{1 + i} \qquad m_2 = \frac{a - ib}{1 - i}$$

de la droite $\overline{ab}$, sont représentés par leurs *anti-points* réels :

$$m = \frac{a + \mathfrak{J}b}{1 + \mathfrak{J}} \qquad m' = \frac{a - \mathfrak{J}b}{1 - \mathfrak{J}} .$$

Les points à coordonnées imaginaires appartenant à un domaine à 4 dimensions, et étant désormais représentés dans le plan à deux dimensions, la position d'un point-image (représentatif d'un point imaginaire), situé par exemple hors d'une droite, ne suffit pas à indiquer si le point imaginaire correspondant appartient à la droite ; au contraire, tout point du plan peut être l'image d'un point imaginaire d'une droite, d'un cercle, d'une courbe quelconque, quand on ne connaît que sa position ; sa masse, par contre, c'est-à-dire un opérateur à deux dimensions de la forme $(\alpha\mathfrak{U} + \beta\mathfrak{J})$, sera déterminée dès qu'on assujettira le point à être l'image d'un point imaginaire d'une courbe définie ; et aussi par suite l'anti-point conjugué.

Dans les relations cycliques, où l'on utilise l'équation :

$$j_1 \smile j_2 = u^{\smile 2} + v^{\smile 2} = 0$$

qui est aussi l'équation de définition de l'opérateur $\mathfrak{J}$ (ou son opposé) :

$$u^{\smile 2} - \mathfrak{J}^{(2}(v^{\smile 2} = 0$$

ou bien où l'on se sert d'équivalences suivant le module $(u^2 + v^2)$, toute différence entre les points imaginaires et leurs anti-points disparaît.

CHAPITRE VIII

Quelques applications des formes quadratiques intéreures eti cycliques.

Comme nous l'avons déjà signalé, les relations identiques entre formes algébriques de second ordre ou de seconde classe — en particulier — fourniront des identités analogues entre formes intérieures ou formes cycliques. Soient ainsi 4 segments P, Q, R, S du plan; ils sont liés par la relation identique:

$$(P \,.\, Q)(R \,.\, S) + (P \,.\, R)(S \,.\, Q) + (P \,.\, S)(Q \,.\, R) = 0 \qquad (1)$$

de forme:

$$\alpha aa' + \beta bb' + \gamma cc' = 0 \qquad (2)$$

qui signifie seulement que les trois couples aa', bb', cc' sont des formes de seconde classe dégénérées d'un même faisceau tangentiel. On en déduit immédiatement, en prenant les polaires successives de la droite de l'infini:

$$\alpha \frac{a + a'}{2} + \beta \frac{b + b'}{2} + \gamma \frac{c + c'}{2} = 0 \qquad (3)$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 0 \qquad (4)$$

comme aussi:

$$\alpha a \times a' + \beta b \times b' + \gamma c \times c' = 0 \qquad (5)$$

$$\alpha a \smile a' + \beta b \smile b' + \gamma c \smile c' = 0 \qquad (6)$$

la première de ces équations rappelant plus généralement que les cercles de Monge des coniques d'un faisceau tangentiel forment un faisceau ponctuel, la seconde traduisant une relation analogue entre les foyers des coniques du faisceau; relation qui, exprimée à partir d'un point quelconque x par:

$$\alpha \overrightarrow{xa} \smile \overrightarrow{xa'} + \beta \overrightarrow{xb} \smile \overrightarrow{xb'} + \gamma \overrightarrow{xc} \smile \overrightarrow{xc'} = 0$$

signifie seulement que les bissectrices des couples de droites joignant x aux foyers des coniques du faisceau appartiennent à une même involution.

De même la relation identique entre 4 points a, b, c, d:

$$(a \,.\, b)(c \,.\, d) + (a \,.\, c)(d \,.\, b) + (a \,.\, d)(b \,.\, c) = 0$$

donne aussitôt:

$$\overrightarrow{ab} \times \overrightarrow{cd} + \overrightarrow{ac} \times \overrightarrow{db} + \overrightarrow{ad} \times \overrightarrow{bc} = 0$$

$$\overrightarrow{ab} \smile \overrightarrow{cd} + \overrightarrow{ac} \smile \overrightarrow{db} + \overrightarrow{ad} \smile \overrightarrow{bc} = 0$$

relations bien connues.

Pour les formes de seconde classe, il est intéressant de noter qu'inversement les relations linéaires entre produits intérieurs et produits cycliques suffisent pour entraîner les relations algébriques.

Ceci revient à dire qu'une courbe de seconde classe est déterminée uniquement par son cercle de Monge et le système de ses foyers, à condition encore que de ces deux données résulte le même centre et la même masse.

Si en effet $\overset{(2)}{f^{\times}}$ et $\overset{(2)}{f^{\smile}}$ sont connus, la forme $f^{(2)}$ elle-même est connue à un multiple près de $j_1 j_2$ dans le premier cas, de $\overset{2}{j_1}$ et $\overset{2}{j_2}$ dans le second: elle est donc bien déterminée.

En conséquence, il sera naturel d'étudier le système linéaire à 5 unités formé par les produits cycliques du 2e ordre. Dans ce système, les produits d'un point par un vecteur (foyers de paraboles) forment un important système à 4 unités. Soient o, u, v un point quelconque du plan et deux vecteurs unitaires rectangulaires; les relations:

$$o \smile u = u \smile o \qquad o \smile v = v \smile o$$

$$u \smile v = v \smile u \qquad \overset{2}{u^{\smile}} + \overset{2}{v^{\smile}} = 0$$

permettent de garder pour unités, par exemple:

$$\overset{2}{o^{\smile}}\,, \qquad o \smile u\,, \qquad o \smile v\,, \qquad \overset{2}{u^{\smile}}\,.$$

Comme précédemment pour le produit intérieur, une forme $\Sigma \mu \overset{2}{m^{\smile}}$ à masse différente de zéro et qu'on peut supposer ramenée à l'unité, pourra, si elle a un centre o à distance finie:

$$\Sigma \mu = 1 \qquad \Sigma \mu\, m = 0$$

être mise sous la forme du produit cyclique de deux foyers f, f', racines de:

$$f\overset{2}{\smile} - 2o \smile f + \Sigma\mu m\overset{2}{\smile} = 0$$

$$\left.\begin{matrix} f \\ f' \end{matrix}\right\} = o \pm \sqrt{o\overset{2}{\smile} - \Sigma\mu m\overset{2}{\smile}} = o \pm \gamma\sqrt{u\overset{2}{\smile}} = o \pm \gamma u$$

donc:

$$\Sigma\mu m\overset{2}{\smile} = f \smile f' = o\overset{2}{\smile} - \gamma^2 u\overset{2}{\smile} .$$

Toutes les courbes de seconde classe de foyers f, f' ont pour forme générale:

$$ff' \mp \beta^2 j_1 j_2 = o^2 - \alpha^2 u^2 \mp \beta^2 v^2$$

avec:

$$\alpha^2 = \pm \beta^2 + \gamma^2 .$$

Plücker a montré comment obtenir les foyers d'une courbe donnée par son équation tangentielle; sous des formes voisines, Siebeck, Möbius, ont étudié les foyers des coniques d'un faisceau tangentiel; Beltrami, Cesaro, Transon, Laguerre, etc. ont fait des études analogues.

Rappelons-en l'essentiel; dans un faisceau $a \smile a'$, $b \smile b'$ figure généralement une forme parabolique $p \smile u$:

$$a \smile a' - b \smile b' = p \smile u . \tag{1}$$

En faisant le produit intérieur par $p\overset{2}{\smile}$:

$$\overrightarrow{pa} \smile \overrightarrow{pa'} = \overrightarrow{pb} \smile \overrightarrow{pb'} = \overrightarrow{pc} \smile \overrightarrow{pc'} \tag{2}$$

si:

$$\alpha a \smile a' + \beta b \smile b' = (\alpha + \beta)\, c \smile c' . \tag{3}$$

On a aussi:

$$\frac{\overrightarrow{pa}}{\overrightarrow{pb}} = \frac{\overrightarrow{pb'}}{\overrightarrow{pa'}}$$

donc p se construit comme centre de similitude de ab et $b'a'$.

Comme on a en outre:

$$\alpha\frac{a + a'}{2} + \beta\frac{b + b'}{2} = (\alpha + \beta)\frac{c + c'}{2}$$

ou:

$$\alpha\frac{\overrightarrow{pa} + \overrightarrow{pa'}}{2} + \beta\frac{\overrightarrow{pb} + \overrightarrow{pb'}}{2} = (\alpha + \beta)\frac{\overrightarrow{pc} + \overrightarrow{pc'}}{2}$$

un couple quelconque $c \smile c'$ du faisceau se construit facilement à partir de p, les vecteurs $\overrightarrow{pc}$ et $\overrightarrow{pc'}$ étant donnés par leur demi-somme et leur moyenne cyclique.

Nous avons jusqu'à présent laissé de côté le cas des formes cycliques paraboliques, c'est-à-dire qu'on peut mettre sous la forme $p \smile u$, produit d'un point par un vecteur. Comment se composent ces formes?

Soient $u \smile a$ et $v \smile b$ deux telles formes (a, b points, u, v vecteurs quelconques ici); toute forme en dépendant linéairement sera:

$$w \smile c = \alpha u \smile a + \beta v \smile b \qquad (4)$$

ce qui entraîne (en prenant la polaire de la droite de l'infini):

$$w = \alpha u + \beta v \qquad (5)$$

c'est-à-dire la *conservation*, ou la *composition* des vecteurs. Or, dans (4), divisons les vecteurs des 2 membres par un vecteur quelconque r; les points a, b, c sont alors précédés d'opérateurs complexes $)\frac{u}{r}$, $)\frac{v}{r}$, $)\frac{w}{r}$ et nous retrouvons l'addition des points-images de points imaginaires, que nous avons indiquée. Nous pourrons encore dire que dans une expression $u \smile a$, le point a a une masse *vectorielle*, et nous parlerons alors d'une *addition cyclique des points*; les points c résultant de la formule (4) sont en effet situés sur une circonférence, comme foyers de paraboles d'un faisceau tangentiel.

En particulier, l'identité:

$$(c - b) \smile a + (a - c) \smile b + (b - a) \smile c = 0$$

ou:

$$\overrightarrow{bc} \smile a + \overrightarrow{ca} \smile b + \overrightarrow{ab} \smile c = 0 \qquad (6)$$

généralisation de celle de la droite:

$$[bc]\,a + [ca]\,b + [ab]\,c = 0$$

situe les trois points a, b, c sur une même circonférence, la masse vectorielle attachée à chacun d'eux étant proportionnelle au vecteur joignant les deux autres points[1].

---

[1] Une telle addition a été employée pour la représentation des vis de Ball d'un faisceau et du cylindroïde qui le porte.

Au système à cinq unités des formes quadratiques cycliques est adjoint le système complémentaire des expressions du type:

$$a\overset{2}{\smile} . b\overset{2}{\smile} . c\overset{2}{\smile} . d\overset{2}{\smile}$$

qui trouvent une représentation dans les hyperboles équilatères:

$$a^2 . b^2 . c^2 . d^2 . j_1 j_2$$

déterminées par quatre points a, b, c, d ou quatre conditions linéaires équivalentes. Il n'y a ainsi aucune difficulté à interpréter l'équation scalaire:

$$a\overset{2}{\smile} . b\overset{2}{\smile} . c\overset{2}{\smile} . d\overset{2}{\smile} . e\overset{2}{\smile} = 0$$

De même, la condition:

$$a\overset{2}{\smile} . b\overset{2}{\smile} . c\overset{2}{\smile} . h\overset{2}{\smile} = 0 \qquad (7)$$

signifie que les quatre points a, b, c, h forment un quadrangle orthocentrique — ou sont sur une même droite.

Cette relation pourra encore être écrite:

$$\left(h\overset{2}{\smile} - a\overset{2}{\smile}\right) . \left(h\overset{2}{\smile} - b\overset{2}{\smile}\right) . \left(h\overset{2}{\smile} - c\overset{2}{\smile}\right) = 0$$

ou:

$$\left(\overrightarrow{ah} \smile \frac{a+h}{2}\right) . \left(\overrightarrow{bh} \smile \frac{b+h}{2}\right) . \left(\overrightarrow{ch} \smile \frac{c+h}{2}\right) = 0$$

et elle donne les propriétés déjà énoncées du cercle des neuf points du quadrangle. Ou bien, par:

$$\alpha a\overset{2}{\smile} + \beta b\overset{2}{\smile} = -\left(\gamma c\overset{2}{\smile} + \eta h\overset{2}{\smile}\right) \qquad (8)$$

elle donne:

$$\alpha\beta \, \overrightarrow{ab}\overset{2}{\smile} = \gamma\eta \, \overrightarrow{ch}\overset{2}{\smile}$$

c'est-à-dire que $\overrightarrow{ch}$ est perpendiculaire — ou parallèle — à $\overrightarrow{ab}$; ceci résultait également de:

$$\overrightarrow{ab}\overset{2}{\smile} . \overrightarrow{ch}\overset{2}{\smile} = 0$$

ou:

$$\left(\overrightarrow{ab}\overset{2}{\smile} . \overrightarrow{ch}\overset{2}{\smile}\right)^{\times} = -\left(\overrightarrow{ab} . \overrightarrow{ch}\right)\left(\overrightarrow{ab} \times \overrightarrow{ch}\right) = 0$$

d'après (12, ch. II).

Le produit intérieur entre formes cycliques donne d'autres résultats intéressants. Je rappelle que :

$$m \smile n \mid p \smile q = 0 \qquad (9)$$

signifie que les deux couples m, n et p, q sont cycliquement conjugués, c'est-à-dire qu'ils ont pour conique harmonique un cercle — courbe dont l'orientation des directions asymptotiques est nulle — sur lequel ils sont conjugués harmoniques. L'équation est en effet équivalente à :

$$\left\{ \begin{array}{l} mn\ )(\ pq\ )(\ j_1^2 = 0 \\ mn\ )(\ pq\ )(\ j_2^2 = 0 \end{array} \right.$$

montrant que les points cycliques appartiennent au lieu :

$$mn\ )(\ pq\ )(\ x^2 = 0$$

L'équation (9) se développe en :

$$\overrightarrow{mp} \smile \overrightarrow{nq} + \overrightarrow{mq} \smile \overrightarrow{np} = 0 \qquad (10)$$

$$(p - m) \smile (q - n) + (q - m) \smile (p - n) = 0$$

$$2\,(m \smile n + p \smile q) = (m + n) \smile (p + q) \qquad (11)$$

forme de la relation harmonique qui donne les relations vectorielles connues à partir d'une origine arbitraire x, qu'on peut en particulier placer en un des points, ou au milieu d'un des couples :

D'après (10) ou :

$$)\frac{\overrightarrow{mp}}{\overrightarrow{mq}} = -\ )\frac{\overrightarrow{np}}{\overrightarrow{nq}}$$

on reconnaît que :

$$)\frac{\overrightarrow{mp}^{\times 2}}{\overrightarrow{mq}^{\times 2}} =)\frac{\overrightarrow{np}^{\times 2}}{\overrightarrow{nq}^{\times 2}}$$

et aussi :

$$\widehat{pmq} = \widehat{pnq} \qquad (\text{module } \pi)$$

ce qui met en évidence deux cercles orthogonaux, l'un conjugué

au couple p, q et passant par m, n, l'autre contenant les quatre points. Soit o le milieu de p, q :

$$p + q = 2o$$

et en faisant le produit intérieur de (11) par $\overset{2}{o\smile}$:

$$\overrightarrow{om} \smile \overrightarrow{on} = \overset{2}{\overrightarrow{op}\smile} = \overset{2}{\overrightarrow{oq}\smile} \tag{12}$$

Tous les couples de vecteurs $\overrightarrow{om}$, $\overrightarrow{on}$ définis par une telle équation, et qui ont $\overrightarrow{op}$ ou $\overrightarrow{oq}$ pour moyenne cyclique, sont formés en joignant le point o aux points m et n qu'on dit correspondants dans une *inversion symétrique* ou *sym-inversion*, de centre o, axe op, puissance $\overset{2}{\overrightarrow{op}\times}$.

Représentons maintenant par des lettres x, y des vecteurs sym-inverses; e étant un vecteur déterminé, l'équation :

$$y =)\frac{\overset{2}{e\smile}}{x} \tag{13}$$

détermine la sym-inversion; ou encore :

$$)\frac{y}{e} =)\frac{e}{x}$$

Pour l'inversion proprement dite, il faut prendre :

$$)\frac{x'}{e} = \mathrm{K}\,)\frac{e}{x}$$

ou :

$$x' = \mathrm{K}\,)\frac{e}{x}\,(e =)\frac{\bar{x}}{e}\,(e = e\overset{2}{\times}\bar{x} \tag{14}$$

$\bar{x}$ étant le vecteur défini comme *inverse* de x avec la puissance d'inversion 1. On voit encore facilement que le produit (séquence) de deux sym-inversions de même pôle est une similitude.

La sym-inversion apparaît aussi comme cas particulier d'une transformation quadratique plus générale, l'*inversion triangulaire*, dont nous allons donner la définition; a, b, c étant les 3 sommets d'un triangle, un couple de points inverses, m, m', sera défini par :

$$a \smile b \;.\; b \smile c \;.\; c \smile a \;.\; m \smile m' = 0 \tag{15}$$

de sorte que m et m' sont les foyers d'une conique inscrite dans le triangle abc. Cette équation n'est qu'une généralisation de (7) et si on considère abc comme triangle diagonal d'un quadrangle orthocentrique $efgh$, on peut aussi l'écrire:

$$e\overset{2}{\smile} . f\overset{2}{\smile} . g\overset{2}{\smile} . m \smile m' = 0 .$$

Pour la sym-inversion déjà définie par:

$$p \smile q \mid m \smile n = 0 \tag{9}$$

le faisceau d'hyperboles équilatères qui définit la transformation est formée de courbes concentriques passant par p, q et leurs deux anti-points imaginaires; on pourra représenter la transformation par:

$$p\overset{2}{\smile} . q\overset{2}{\smile} . \frac{p+q}{2} \smile \mathcal{J}(p-q) . m \smile n = 0 \tag{16}$$

qui sous une forme équivalente à (9) définit les couples m, n conjugués.

Reverons pour un instant à l'équation (8) pour en tirer de nouvelles conclusions; on peut écrire:

$$\alpha a\overset{2}{\smile} + \beta b\overset{2}{\smile} = -\left(\gamma c\overset{2}{\smile} + \eta h\overset{2}{\smile}\right) = -(\gamma+\eta)\, c' \smile c'' .$$

De même:

$$\beta b\overset{2}{\smile} + \gamma c\overset{2}{\smile} = -\left(\alpha a\overset{2}{\smile} + \eta h\overset{2}{\smile}\right) = -(\alpha+\eta)\, a' \smile a''$$

$$\gamma c\overset{2}{\smile} + \alpha a\overset{2}{\smile} = -\left(\beta b\overset{2}{\smile} + \eta h\overset{2}{\smile}\right) = -(b+\eta)\, b' \smile b''$$

(je rappelle que $\alpha+\beta+\gamma+\delta=0$ et que ces coefficients se déterminent comme pour l'équation (8, chap. VI).)

Je dis que deux quelconques des couples ainsi obtenus ont une orientante nulle (indéterminée), par exemple:

$$a' \smile a'' \mid b' \smile b'' = 0 .$$

C'est en effet:

$$\left(\alpha a\overset{2}{\smile} + \eta h\overset{2}{\smile}\right) \Big| \left(\beta b\overset{2}{\smile} + \eta h\overset{2}{\smile}\right) = 0$$

$$\alpha\beta\,\overrightarrow{ab}\overset{2}{\smile} + \left(\alpha a\overset{2}{\smile} + \beta b\overset{2}{\smile}\right) \Big| \eta h\overset{2}{\smile} = 0$$

ou:

$$\alpha\beta\,\overrightarrow{ab}\overset{2}{\smile} - \left(\gamma c\overset{2}{\smile} + \eta h\overset{2}{\smile}\right) \mid \eta h\overset{2}{\smile} = 0$$

$$\alpha\beta\,\overrightarrow{ab}\overset{2}{\smile} = \gamma\eta\,\overrightarrow{ch}\overset{2}{\smile}$$

ce que nous avons déjà démontré.

On voit donc la configuration formée par les points a', a'', b', b'', c', c'', situés par quatre sur trois cercles de centres a, b, c, respectivement conjugués aux triangles bch, cah, abh. De même h est centre d'un cercle conjugué au triangle abc, comme le traduit:

$$-\eta h\overset{2}{\smile} = \alpha a\overset{2}{\smile} + \beta b\overset{2}{\smile} + \gamma c\overset{2}{\smile}$$

ou:

$$\lambda j_1 j_2 - \eta h^2 = \alpha a^2 + \beta b^2 + \gamma c^2$$

La relation harmonique (9) que nous avons établie entre deux couples $m \smile n$ et $p \smile q$:

$$m \smile n \mid p \smile q = 0$$

signifie que n est le conjugué cyclique de m par rapport à $p \smile q$ donc:

$$\overrightarrow{mp} \smile q + \overrightarrow{mq} \smile p = \left(\overrightarrow{mp} + \overrightarrow{mq}\right) \smile n \,. \tag{17}$$

C'est un cas particulier d'un théorème de Laguerre que le conjugué d'un point m est le même par rapport à une famille de coniques homofocales — c'est-à-dire par rapport aux foyers f, f' — que par rapport aux points de contact des tangentes menées de m à une conique de la famille. Soient en effet $\overline{ma}$, $\overline{ma'}$ deux telles tangentes:

$$\mu m^2 + \alpha a a' = (\mu + \alpha)\,(ff' - \beta^2 j_1 j_2)$$

d'ou:

$$\mu m\overset{2}{\smile} + \alpha a \smile a' = (\mu + \alpha) f \smile f'$$

et en prenant le conjugué cyclique de m par rapport aux 2 membres:

$$\alpha a \smile a' \mid m = (\mu + \alpha) f \smile f' \mid m$$

comme aussi:

$$\alpha a \smile a' \mid m\overset{2}{\smile} = (\mu + \alpha) f \smile f' \mid m\overset{2}{\smile}$$

$$\alpha\,\overrightarrow{ma} \smile \overrightarrow{ma'} = (\mu + \alpha)\,\overrightarrow{mf} \smile \overrightarrow{mf'}$$

ce qui est un théorème de Poncelet.

Quant au théorème de Laguerre, il exprime que tous les cercles circonscrits aux triangles *maa'* pour toutes les coniques homofocales, forment un faisceau.

Cherchons encore l'enveloppe des droites polaires X du point m par rapport à un faisceau de coniques homofocales:

$$ff' + \lambda j_1 j_2$$

le lieu est donné par le produit extérieur:

$$(ff' \mid X) \,.\, (j_1 j_2 \mid X) \,.\, m = 0$$

se développant en:

$$[fX][j_1X][f'j_2m] + [fX][j_2X][f'j_1m] + [f'X][j_1X][fj_2m] + [f'X][j_2X][fj_1m] = 0$$

ou:

$$[fX]j_1j_2)(X\overline{f'm} + [f'X]j_1j_2)(X\overline{fm} = 0$$

ou:

$$(f\mathfrak{J}\overrightarrow{mf'} + f'\mathfrak{J}\overrightarrow{mf})(X^2 = 0$$

équation tangentielle d'une conique, qui est une parabole (dite de Chasles) et dont la droite de Monge (directrice) a pour équation:

$$(\mathfrak{J}\overrightarrow{mf'} \times f + \mathfrak{J}\overrightarrow{mf} \times f')(x^2 = (2\mathfrak{J}\overrightarrow{mo} \times o)(x_2 = 0$$

tandis que les foyers sont donnés par la forme cyclique:

$$\mathfrak{J}\overrightarrow{mf'} \smile f + \mathfrak{J}\overrightarrow{mf} \smile f' \,.$$

Or nous avons vu que:

$$\overrightarrow{mf'} \smile f + \overrightarrow{mf} \smile f' = (\overrightarrow{mf} + \overrightarrow{mf'}) \smile n$$

n étant conjugué cyclique de m par rapport à f et f'; un des foyers de la parabole est donc ce point n, tandis que l'autre est rejeté à l'infini dans la direction du vecteur:

$$\mathfrak{J}(\overrightarrow{mf} + \overrightarrow{mf'}) = 2\mathfrak{J}\overrightarrow{mo}$$

o étant le centre des coniques homofocales.

Nous avons déjà noté que les produits intérieurs de points traduisaient des théorèmes relatifs aux figures formées par les

cercles. Mais les produits cycliques transforment et complètent d'heureuse manière les relations ainsi formées. Ainsi nous avons signalé que pour quatre points sur un cercle:

$$\overset{2}{a^{\times}} \,.\, \overset{2}{b^{\times}} \,.\, \overset{2}{c^{\times}} \,.\, \overset{2}{d^{\times}} = 0$$

pouvait s'écrire (12, chap. VI):

$$\begin{vmatrix} \overline{ab}\,\overline{cd}\ )(\ j_1^2 & \overline{ac}\,\overline{db}\ )(\ j_1^2 \\ \overline{ab}\,\overline{cd}\ )(\ j_2^2 & \overline{ac}\,\overline{db}\ )(\ j_2^2 \end{vmatrix} = 0 \ .$$

Or ceci traduit:

$$\overline{ab} \smile \overline{cd} \,.\, \overline{ac} \smile \overline{db} = 0 \qquad (18)$$

ou:

$$(\overline{ab} \smile \overline{cd} \,.\, \overline{ac} \smile \overline{db})^{\times} = 0 \qquad (19)$$

c'est-à-dire que les bissectrices des couples de directions $\overrightarrow{ab}\,\overrightarrow{cd}$, $\overrightarrow{ac}\,\overrightarrow{db}$ et aussi $\overrightarrow{ad}\,\overrightarrow{bc}$ sont confondues si les points a, b, c, d sont sur un cercle. Il est du reste avantageux de développer ces relations sous la forme projective de congruences géométriques, c'est-à-dire d'égalités entre les positions des formes, sans tenir compte des masses qui les affectent; l'équation:

$$\overrightarrow{ab} \smile \overrightarrow{cd} \equiv \overrightarrow{ac} \smile \overrightarrow{db}$$

signifiant seulement:

$$\overrightarrow{ab} \smile \overrightarrow{cd} = \theta\, \overrightarrow{ac} \smile \overrightarrow{db}$$

θ étant un coefficient numérique dont la valeur importe peu ici. Cette équation, sous la forme:

$$)\frac{\overrightarrow{ab}}{\overrightarrow{ac}} \equiv)\frac{\overrightarrow{db}}{\overrightarrow{dc}}$$

rappelle la propriété bien connue de l'angle inscrit:

$$\widehat{bac} = \widehat{bdc} \qquad (\text{module } \pi) \ . \qquad (20)$$

C'est du reste ce qu'on retrouve en développant (19) d'après (12, chap. II):

$$(\overrightarrow{ab} . \overrightarrow{ac})(\overrightarrow{cd} \times \overrightarrow{db}) + (\overrightarrow{cd} . \overrightarrow{db})(\overrightarrow{ab} \times \overrightarrow{ac}) = 0 \qquad (21)$$

$$\sin \widehat{bac} \cos \widehat{bdc} - \sin \widehat{bdc} \cos \widehat{bac} = 0$$

équation qui, résolue en sin. ou tg., redonne la condition (20).

Quant au centre o, il est donné par:

$$\Big) \frac{\overrightarrow{ob}}{\overrightarrow{oc}} = \Big) \frac{\overrightarrow{ab}}{\overrightarrow{ac}} \left(K \Big) \frac{\overrightarrow{ab}}{\overrightarrow{ac}} \right)^{(-1} .$$

On pouvait encore développer (15) sous la forme suivante:

$$[abc] b \times c \mid d^{\overset{2}{\times}} - [dbc] b \times c \mid a^{\overset{2}{\times}} = 0$$

$$\left([abc] d^{\overset{2}{\times}} - [dbc] a^{\overset{2}{\times}} \right) \Big| \, b \times c = 0$$

et si on suppose que a, b, c sont fixes, d variable sur le cercle:

$$b \times c \mid d^{\overset{2}{\times}} - \alpha [bcd] = 0$$

détermine le cercle comme appartenant au faisceau déterminé par le cercle $b \times c$ et la droite $[bc]$.

Montrons comment l'équation du cercle:

$$\overrightarrow{ab} \smile \overrightarrow{cd} . \overrightarrow{ac} \smile \overrightarrow{db} = 0$$

conduit elle aussi au théorème de Ptolémée. Si on la rapproche de l'identité:

$$\overrightarrow{ab} \smile \overrightarrow{cd} + \overrightarrow{ac} \smile \overrightarrow{db} + \overrightarrow{ad} \smile \overrightarrow{bc} = 0$$

on voit que:

$$\frac{\overrightarrow{ab} \smile \overrightarrow{cd}}{\lambda} = \frac{\overrightarrow{ac} \smile \overrightarrow{db}}{\mu} = \frac{\overrightarrow{ad} \smile \overrightarrow{bc}}{\nu}$$

λ, μ, ν étant trois nombres tels que:

$$\lambda + \mu + \nu = 0$$

Il s'ensuit la relation entre les normes:

$$\frac{\overrightarrow{ab}^{\overset{2}{\times}}\ \overrightarrow{cd}^{\overset{2}{\times}}}{\lambda^2} = \frac{\overrightarrow{ac}^{\overset{2}{\times}}\ \overrightarrow{db}^{\overset{2}{\times}}}{\mu^2} = \frac{\overrightarrow{ad}^{\overset{2}{\times}}\ \overrightarrow{bc}^{\overset{2}{\times}}}{\nu^2}$$

donc:

$$\sqrt{\overrightarrow{ab}^{\overset{2}{\times}}\ \overrightarrow{cd}^{\overset{2}{\times}}} \pm \sqrt{\overrightarrow{ac}^{\overset{2}{\times}}\ \overrightarrow{db}^{\overset{2}{\times}}} \pm \sqrt{\overrightarrow{ad}^{\overset{2}{\times}}\ \overrightarrow{bc}^{\overset{2}{\times}}} = 0 \ .$$

Enfin, notons que:

$$\frac{\overrightarrow{ca} \smile \overrightarrow{db}}{\overrightarrow{cb} \smile \overrightarrow{da}} = \frac{\dfrac{\overrightarrow{ca}}{\overrightarrow{cb}}}{\dfrac{\overrightarrow{da}}{\overrightarrow{db}}}$$

est le rapport anharmonique complexe de quatre points du plan. Si ce rapport est un nombre réel, le quatrième point d appartient au cercle déterminé par les trois premiers. S'il est imaginaire, d est seulement image d'un point imaginaire du cercle. Selon la valeur du module du rapport, d appartient à un cercle déterminé par:

$$\frac{\overrightarrow{ca}^{\overset{2}{\times}}\ \overrightarrow{db}^{\overset{2}{\times}}}{\overrightarrow{cb}^{\overset{2}{\times}}\ \overrightarrow{da}^{\overset{2}{\times}}} = \theta^2$$

$$\left(\overrightarrow{ca}^{\overset{2}{\times}} b^{\overset{2}{\times}} - \theta^2\, \overrightarrow{cb}^{\overset{2}{\times}} a^{\overset{2}{\times}}\right) \Big|\ d^{\overset{2}{\times}} = 0 \ .$$

Sous la forme projective, les relations cycliques traduisent les conditions *angulaires*, tandis que les formes intérieures sont, comme on le sait, particulièrement adaptées aux relations *métriques*. Traitons ici un problème du premier type; sur les côtés $\overline{ab}$, $\overline{bc}$, $\overline{ca}$ d'un triangle sont trois points e, f, g; les cercles circonscrits aux triangles age, bef, cfg concourent en un point d; il en est de même du cercle circonscrit à abc dans le cas où e, f, g sont en ligne droite. En effet, soit d le point de concours des deux premiers cercles:

$$\overrightarrow{dg} \smile \overrightarrow{ae} \equiv \overrightarrow{de} \smile \overrightarrow{ag}$$

$$\overrightarrow{de} \smile \overrightarrow{bf} \equiv \overrightarrow{df} \smile \overrightarrow{be} \ .$$

Faisons le produit membre-à-membre des deux équations; après suppression de $\overrightarrow{de}$, il reste:

$$\overrightarrow{dg} \smile \overrightarrow{ae} \smile \overrightarrow{bf} \equiv \overrightarrow{ag} \smile \overrightarrow{df} \smile \overrightarrow{be}$$

mais:

$$[abe] = 0$$

donc:

$$\overrightarrow{ae} \equiv \overrightarrow{be} \ ,$$

d'où:

$$\overrightarrow{dg} \smile \overrightarrow{bf} \equiv \overrightarrow{ag} \smile \overrightarrow{df}$$

ou, d'après:

$$[cbf] = 0 \qquad [acg] = 0$$

$$\overrightarrow{dg} \smile \overrightarrow{cf} \equiv \overrightarrow{df} \smile \overrightarrow{cg}$$

ce qui exprime bien que d est sur le troisième cercle. Si on avait supposé $[efg] = o$, on aurait de même montré que d appartenait au quatrième cercle. La démonstration géométrique usuelle est exactement la même, traduite de préférence par les similitudes:

$$\Big)\frac{\overrightarrow{de}}{\overrightarrow{dg}} \equiv \Big)\frac{\overrightarrow{ae}}{\overrightarrow{ag}} \qquad \Big)\frac{\overrightarrow{df}}{\overrightarrow{de}} \equiv \Big)\frac{\overrightarrow{bf}}{\overrightarrow{be}} \ . \quad \text{etc.}$$

Le théorème qui mène à la droite de Simson n'est qu'une réciproque particulière du théorème précédent; il suffit de reprendre la démonstration en sens inverse. La démonstration est encore la même quand par l'inversion on substitue des cercles concourants en un point aux droites de la figure, et la configuration présente alors plus de symétrie.

Suivons encore la démonstration suivante: deux cercles variables, tangents entre eux, sont assujettis à avoir chacun, en un point fixe, une tangente déterminée; le lieu de leurs points de contact est formé de deux cercles orthogonaux.

Soient a, b, m les points de contact fixes et mobile, c, s, t les points de rencontre des tangentes en ces points:

$$\overrightarrow{ta} \smile \overrightarrow{tm} \equiv \overrightarrow{am}^{\overset{2}{\smile}}$$

$$\overrightarrow{sb} \smile \overrightarrow{sm} \equiv \overrightarrow{bm}^{\overset{2}{\smile}}$$

en divisant membre-à-membre et tenant compte de: $[stm] = 0$

$$)\frac{\vec{ta}}{\vec{sb}} \equiv)\frac{\vec{am}^{\smile 2}}{\vec{bm}^{\smile 2}}$$

ou:

$$)\frac{\vec{ca}}{\vec{cb}} \equiv)\frac{\vec{am}^{\smile 2}}{\vec{bm}^{\smile 2}}$$

donc:

$$)\frac{\vec{ma}}{\vec{mb}} \equiv \left\{ \begin{array}{l} \left( )\frac{\vec{ca}}{\vec{cb}} \right)^{(\frac{1}{2}} \\ \mathcal{J}\left( )\frac{\vec{ca}}{\vec{cb}} \right)^{(\frac{1}{2}} \end{array} \right.$$

quelle que soit la détermination prise pour

$$\left( )\frac{\vec{ca}}{\vec{cb}} \right)^{(\frac{1}{2}}$$

ce qui est bien le théorème énoncé.

Nous avons assez longuement insisté sur les relations conduisant aux lieux circulaires; mais dans le domaine des formes quadratiques on écrit aussi aisément des lieux formés de droites, ou coniques. Ainsi:

$$\vec{ca} \smile \vec{cb} \,.\, \vec{da} \smile \vec{db} = 0$$

donne comme lieu pour le point d une hyperbole équilatère passant par les points a et b, symétriques par rapport à son centre, tandis que:

$$\vec{ma} \smile \vec{au} \,.\, \vec{mb} \smile \vec{bu} = 0$$

où a, b, u sont des points et un vecteur fixe, donne comme lieu pour m la droite $\overline{ab}$ et la droite de l'infini.

CHAPITRE IX

Les théorèmes de Laguerre et Humbert sur l'orientation ; la représentation complexe des covariants des formes binaires.

Dans le chapitre VII, nous avons énoncé que l'orientante d'une forme segmentaire est celle de la forme vectorielle correspondante ; c'est ce que Laguerre a exprimé en disant que l'orientation d'une courbe d'ordre n était aussi celle du système de ses asymptotes.

Pour les formes du second ordre, nous avons déjà employé le fait que si deux formes cycliques $f \smile f'$ et $g \smile g'$ avaient une orientante nulle, les familles de coniques homofocales $ff' - \beta^2 j_1 j_2$ et $gg' - \mu^2 j_1 j_2$ avaient pour coniques harmoniques des cercles, dont les asymptotes déterminent des orientantes nulles.

Si nous écrivons maintenant le système des tangentes communes à deux coniques sous la forme :

$$(ff' - \beta^2 j_1 j_2) \cdot (gg' - \mu^2 j_1 j_2)\,)(\,(ff' - \beta^2 j_1 j_2\,)(\,x^2 \cdot (gg' - \mu^2 j_1 j_2\,)(\,x^2 = 0$$

où x est le point courant, ou encore :

$$\begin{vmatrix} (ff' - \beta^2 j_1 j_2 \overset{2}{)(}\,)(\,x^2 & (gg' - \mu^2 j_1 j_2\,)(\,ff' - \beta^2 j_1 j_2\,)(\,x^2 \\ (ff' - \beta^2 j_1 j_2\,)(\,gg' - \mu^2 j_1 j_2\,)(\,x^2 & (gg' - \mu^2 j_1 j_2 \overset{2}{)(}\,)(\,x^2 \end{vmatrix} = 0$$

quels que soient les paramètres β et μ, la forme orientante de cette forme du quatrième ordre sera :

$$(f \smile f')\overset{2}{|} \smile (g \smile g')\overset{2}{|} - (f \smile f' \,|\, g \smile g')^{\overset{2}{\smile}}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\overline{ff'}^{\overset{2}{\smile}} \smile \overline{gg'}^{\overset{2}{\smile}} - (\overline{fg} \smile \overline{f'g} + \overline{fg'} \smile \overline{f'g})^{\overset{2}{\smile}}\right)$$

ou :

$$\overrightarrow{fg} \smile \overrightarrow{fg'} \smile \overrightarrow{f'g} \smile \overrightarrow{f'g'} \equiv T_1 \smile T_2 \smile T_3 \smile T_4$$

T_1, T_2, T_3, T_4 étant les quatre tangentes communes à deux coniques quelconques prises dans les deux familles d'homofocales.

Laguerre a énoncé un théorème analogue pour l'orientation

des tangentes communes à deux courbes quelconques, ou a deux de leurs homofocales, les systèmes de leurs foyers en particulier.

Sans entrer dans le détail de la formation symbolique des résultants, ce sera encore une conséquence du fait que dans le calcul de la forme orientante d'une forme donnée, toute différence entre les homofocales disparaît, les termes contenant $j_1 j_2$ en facteur s'annulant par la substitution du produit cyclique au produit algébrique.

Humbert s'est aussi attaché à la considération des divers groupes polaires cycliques d'un point par rapport à une courbe de classe quelconque, et aux lieux décrits par les points obtenus quand la courbe variait dans un faisceau tangentiel.

Or soit $f^{(n)}$ une courbe de classe n, m un point du plan:

$$f^{\underset{\smile}{(n)}} \mid m \smile x^{\overset{n-1}{\smile}} = 0$$

donne le groupe des $n - 1$ points réels, communs aux deux faisceaux d'équations:

$$f^{(n)})(\; mx^{n-1} \;)(\; j_1^n = 0$$

$$f^{(n)})(\; mx^{n-1} \;)(\; j_2^n = 0$$

qui constituent les droites polaires de m par rapport aux tangentes menées des points cycliques à la courbe $f^{(n)}$.

Le groupe polaire suivant sera le groupe polaire cyclique de m par rapport au précédent, et ainsi de suite, jusqu'à:

$$f^{\underset{\smile}{(n)}} \mid m^{\overset{n-1}{\smile}} \smile x = 0$$

qui donne le point m' commun aux droites:

$$f^{(n)})(\; m^{n-1}x \;)(\; j_1^n = 0$$

$$f^{(n)})(\; m^{n-1}x \;)(\; j_2^n = 0 \; .$$

Si on suppose maintenant que la courbe $f^{(n)}$ appartienne à un faisceau:

$$f^{(n)} = a^{(n)} + \theta \, b^{(n)}$$

le lieu du point m', engendré par l'intersection de rayons homo-

graphiques issus des points cycliques j_1 et j_2, sera un cercle, d'équation:

$$\left(\overset{(n)}{a} \,\middle|\, \overset{n-1}{m} \smile x\right) . \left(\overset{(n)}{b} \,\middle|\, \overset{n-1}{m} \smile x\right) = 0 \ .$$

Dans les mêmes conditions, le groupe de points formant la $p^{\text{ième}}$ polaire cyclique de m aurait décrit la courbe d'équation:

$$\left(\overset{(n)}{a} \,\middle|\, \overset{p}{m} \smile \overset{n-p}{x}\right) . \left(\overset{(n)}{b} \,\middle|\, \overset{p}{m} \smile \overset{n-p}{x}\right) = 0$$

ou:

$$\left(a^{(n)})(m^p x^{n-p})(j_1^n\right) \left(b^{(n)})(m^p x^{n-p})(j_2^n\right)$$
$$- \left(a^{(n)})(m^p x^{n-p})(j_2^n\right) \left(b^{(n)})(m^p x^{n-p})(j_1^n\right) = 0$$

et les points cycliques étant points multiples d'ordre $2(n\text{-}p)$, cette courbe est $(n\text{-}p)$-circulaire.

En particulier, les foyers d'une courbe de classe n constituent le groupe polaire d'une courbe de classe $n + 1$ par rapport à un vecteur *quelconque* u de la droite de l'infini.

La représentation complexe des covariants des formes binaires repose sur le principe de transfert déjà exposé entre les relations sur la droite et les relations cycliques du plan. Mais précédemment son exposition nécessitait l'emploi des coordonnées symétriques relatives à des axes déterminés, alors qu'elle peut maintenant se faire de façon absolue. Nous nous bornerons ici à l'étude partielle d'une forme cubique:

$$\overset{(3)}{f} = a \smile b \smile c \ .$$

Les formes covariantes sont l'évectant cubique:

$$\overset{(3)}{g} = a' \smile b' \smile c'$$

et la hessienne:

$$\overset{(2)}{h} = h_1 \smile h_2$$

dont le discriminant fournit l'invariant de la forme cubique, que nous supposerons différent de zéro.

La hessienne peut être définie par:

$$\left(\overset{(3)}{f} \,\middle|\, x\right)\Big|^2 = 0$$

ou:

$$\left(f^{(3)}_{\smile} \smile x\right)\Big|^{2} = (a \smile b \smile c \smile x)\Big|^{2} = 0$$

qui sous l'une ou l'autre forme exprime que h_1 et h_2 sont les deux points x pour lesquels le rapport anharmonique complexe $(abcx)$ est équi-anharmonique.

L'évectant cubique est le lieu des points x pour lesquels:

$$\left(f^{(3)}_{\smile} \,\Big|\, x^{2}_{\smile}\right) . \left(h^{(2)}_{\smile} \,\Big|\, x\right) = 0 \quad \text{ou} \quad \left(f^{(3)}_{\smile} \smile x\right)^{2}_{.}\left(f^{(3)}_{\smile} \smile x\right)^{2}_{.}\left(f^{(3)}_{\smile} \smile x\right) = 0$$

ou qui sont tels qu'un des rapports $(abcx)$ est harmonique.

Donc, sur le cercle circonscrit à abc, a', b', c' sont les conjugués cycliques de a, b, c respectivement par rapport à $b \smile c$, $c \smile a$, $a \smile b$, tandis que la hessienne est représentée par les anti-points de h_1 et h_2, conjugués au cercle précédent.

On sait que, quel que soit le point x, on a:

$$f^{(3)}_{\smile} \,\Big|\, h^{(2)}_{\smile} \smile x = 0$$

et aussi que $g^{(3)}_{\smile}$ a même hessienne que $f^{(3)}_{\smile}$.

Nous voulons montrer la construction des polaires d'un point p par rapport à $f^{(3)}$; soient q_1 et q_2 constituant le premier groupe polaire:

$$\overrightarrow{ap} \smile b \smile c + \overrightarrow{bp} \smile c \smile a + \overrightarrow{cp} \smile a \smile b = \left(\overrightarrow{ap} + \overrightarrow{bp} + \overrightarrow{cp}\right) \smile q_1 \smile q_2$$
$$= 3\,\overrightarrow{gp} \smile q_1 \smile q_2$$

d'où:

$$-\,\Big)\frac{\overrightarrow{ab} \smile \overrightarrow{bc} \smile \overrightarrow{ca}}{3\,\overrightarrow{gp}} = \Big)\frac{\overrightarrow{aq_1} \smile \overrightarrow{aq_2} \smile \overrightarrow{bc}}{\overrightarrow{ap}} = \Big)\frac{\overrightarrow{bq_1} \smile \overrightarrow{bq_2} \smile \overrightarrow{ca}}{\overrightarrow{bp}} = \Big)\frac{\overrightarrow{cq_1} \smile \overrightarrow{cq_2} \smile \overrightarrow{ab}}{\overrightarrow{cp}}$$

Supposons d'abord p sur le cercle des points a, b, c.:

$$\Big)\frac{\overrightarrow{ap}}{\overrightarrow{bp}} = \lambda \Big)\frac{\overrightarrow{ac}}{\overrightarrow{bc}}$$

λ étant un nombre réel; le second et le troisième rapport donnent:

$$\overrightarrow{aq_1} \smile \overrightarrow{aq_2} + \lambda \left(\Big)\frac{\overrightarrow{ac}}{\overrightarrow{bc}}\right)^{(2} \overrightarrow{bq_1} \smile \overrightarrow{bq_2} = 0$$

$$\left(\overrightarrow{bc}^{2}_{\smile} \smile a^{2}_{\smile} + \lambda\, \overrightarrow{ac}^{2}_{\smile} \smile b^{2}_{\smile}\right) \Big|\, q_1 \smile q_2 = 0$$

de forme :

$$e_1 \smile e_2 \mid q_1 \smile q_2 = 0 \ .$$

Or on sait en outre que :

$$h_1 \smile h_2 \mid q_1 \smile q_2 = 0$$

d'où la construction de $q_1 \smile q_2$, couple conjugué à deux couples déterminés.

A remarquer que:

$$)\frac{\overrightarrow{bc}^{\overset{2}{\smile}}}{\overrightarrow{ac}^{\overset{2}{\smile}}} = -\lambda)\frac{\overrightarrow{be_1}^{\overset{2}{\smile}}}{\overrightarrow{ce_1}^{\overset{2}{\smile}}} = -\lambda)\frac{\overrightarrow{be_2}^{\overset{2}{\smile}}}{\overrightarrow{ce_2}^{\overset{2}{\smile}}}$$

permet de construire les points e_1 et e_2, et que cette construction sera la même, comme aussi celle des points q_1 et q_2, quand à un point p sur le cercle on aura substitué un point hors du cercle, λ étant alors remplacé par un opérateur complexe (similitude).

On construira ensuite la seconde polaire r par:

$$q_1 \smile q_2 \mid r \smile p = 0$$

sans aucune difficulté.

Pour construire q_1 et q_2, on pouvait aussi employer:

$$)\frac{\overrightarrow{ap}}{\overrightarrow{aq}} +)\frac{\overrightarrow{bp}}{\overrightarrow{bq}} +)\frac{\overrightarrow{cp}}{\overrightarrow{cq}} = 0$$

en mettant q à la place d'un des points q_1 ou q_2.

En employant:

$$\overrightarrow{ap} = \overrightarrow{aq} + \overrightarrow{qp} \ , \quad \text{etc.,}$$

on aura:

$$)\frac{\overrightarrow{qp}}{\overrightarrow{qa}} +)\frac{\overrightarrow{qp}}{\overrightarrow{qb}} +)\frac{\overrightarrow{qp}}{\overrightarrow{qc}} = 3 \ .$$

De même la construction de r mènera à:

$$)\frac{\overrightarrow{pr}}{\overrightarrow{pa}} +)\frac{\overrightarrow{pr}}{\overrightarrow{pb}} +)\frac{\overrightarrow{pr}}{\overrightarrow{pc}} = 3 \ .$$

En employant les opérateurs conjugués, on peut écrire:

$$\frac{\overrightarrow{pa''}}{\overrightarrow{pr''}} +)\frac{\overrightarrow{pb''}}{\overrightarrow{pr''}} +)\frac{\overrightarrow{pc''}}{\overrightarrow{pr''}} = 3$$

a'', b'', c'', r'' étant les points inverses de a, b, c, r par rapport à p avec la puissance un, ou:

$$\overrightarrow{pa''} + \overrightarrow{pb''} + \overrightarrow{pc''} = 3\overrightarrow{pr''}$$

ce qui donne r'', d'où r. C'est en somme ainsi que procède Laguerre, mais nous voulons insister sur le fait qu'il ne convient pas de représenter par $)\frac{1}{\overrightarrow{pa}}$ ou $\frac{1}{\overrightarrow{pa}}$ le vecteur $\overrightarrow{pa''}$, parce que le produit cyclique par un vecteur quelconque donnerait des résultats tout à fait différents pour les deux expressions.

Si on a commencé par la construction de r, celle de q_1 et q_2 résulte de :

$$r \smile p \mid q_1 \smile q_2 = 0$$

avec:

$$h_1 \smile h_2 \mid q_1 \smile q_2 = 0 .$$

Nous n'avons pas abordé, dans cette étude, le calcul différentiel; pour en donner un exemple, considérons la transformation conforme :

$$y = \frac{1}{2}\left(x +)\frac{\overset{2}{c^{\smile}}}{x}\right)$$

x, y, c étant des vecteurs:

$$x = \overrightarrow{op} \qquad c = \overrightarrow{of} \qquad y = \overrightarrow{om} .$$

Dans ces conditions, si p décrit un cercle de centre o, m décrit une ellipse de foyers f et $f' = 2o - f$; si p décrit une droite passant par o, m décrit une hyperbole homofocale aux ellipses précédentes, et ayant pour asymptotes la droite lieu de p et sa symétrique par rapport à $\overline{of}$.

Un déplacement quelconque de p entraîne un déplacement correspondant de m et :

$$2dy = dx -)\frac{c^{\overset{2}{\smile}} \smile dx}{x^{\overset{2}{\smile}}} =)\frac{dx}{x}\left(x -)\frac{c^{\overset{2}{\smile}}}{x}\right)$$

$$dy =)\frac{dx}{x}(x - y)$$

ce qui donne la similitude instantanée :

$$)\frac{dy}{dx} = 1 -)\frac{y}{x}$$

Si p décrit un cercle de centre o :

$$)\frac{dx}{x} = \lambda \mathcal{J} =)\frac{dy}{x - y}$$

donc le déplacement du point m est perpendiculaire à :

$$x - y = \overrightarrow{mp}$$

Si au contraire p décrit une droite passant par o, le déplacement de m est suivant mp. On retrouve là les propriétés caractéristiques de la normale à l'ellipse et de la tangente à l'hyperbole homofocale.

Nous espérons, par les brèves indications précédentes, et l'esquisse tracée dans cet article des efforts qu'on peut faire pour adapter l'algèbre géométrique à la traduction claire des propriétés des figures, avoir intéressé quelques lecteurs et leur avoir donné, avec le goût de poursuivre de semblables essais, la conviction que nous avons empruntée à Leibnitz, Grassmann et tant d'autres: qu'il sera un jour possible de répéter, par des combinaisons de symboles, les configurations géométriques, mécaniques, physiques, dont nous aurons pénétré les lois. Que cette conviction nous excuse des maladresses et longueurs encore présentes dans cet exposé !

APPLICATION DE L'INTÉGRATION PAR PARTIES AU DÉVELOPPEMENT EN SÉRIE

PAR

E. Jablonski (Royan).

Li'ntégration par parties conduit sans peine à une formule très générale, non remarquée encore je crois, d'où l'on peut déduire la formule de Maclaurin et par suite celle de Taylor, c'est-à-dire toutes les formes classiques des développements en séries et en plus d'autres formes de développements qui ne sont pas sans intérêt. Ce qui suit est cependant à rapprocher des pages fondamentales du *Traité d'Analyse* de M. Emile Picard (T. I, 2me édition, ch. I, § V).

1. Soit y une fonction quelconque d'une variable indépendante x (nous nous bornerons ici au cas d'une fonction réelle d'une variable réelle, mais la généralisation est aisée). Soit x_0 une valeur particulière de x, y_0 la valeur correspondante de y, nous supposerons seulement que y et toutes ses dérivées, jusqu'à celle d'ordre $n+1$ incluse, soient finies et bien déterminées pour toute valeur de x telle que $\mathrm{mod}\,(x - x_0) \leq a$ nombre positif convenablement choisi. On peut, sans restreindre la généralité de ce qui suivra, faire comme si x_0 était nul en convenant de remplacer x par $x_0 + x$. Cela posé, on a évidemment

$$y \equiv y_0 + \int_0^x \frac{dy}{dx} \cdot dx$$

d'où, par applications successives de l'intégration par parties

$$y \equiv y_0 + x\frac{dy}{dx} - \int_0^x x\frac{d^2y}{dx^2}dx$$

$$y \equiv y_0 + x\frac{dy}{dx} - \frac{x^2}{2!}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{2!}\int_0^x x^2\frac{d^3y}{dx^3}.dx$$

. . . .

et enfin

$$y \equiv y_0 + x\frac{dy}{dx} - \frac{x^2}{2!}\frac{d^2y}{dx^2} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n!}x^n\frac{d^ny}{dx^n}$$
$$+ \frac{(-1)^n}{n!}\int_0^x x^n\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}dx \qquad (1)$$

Considérons la série

$$S = y_0 + \sum_{p=1}^{p=\infty}\frac{(-1)^{p-1}}{p!}x^p\frac{d^py}{dx^p}.$$

Si, pour mod $(x) \leqq a$ et $0 \leqq q \leqq p-1$, $x^q\frac{d^py}{dx^p}$ reste fini quelque grand que soit p, la série S est absolument convergente et représente la fonction y. En effet soit mod $\left(x^q\frac{d^py}{dx^p}\right) < A$ nombre positif assignable, le terme général de S est moindre en valeur absolue que mod $\left(\frac{1}{p!}x^{p-q}.A\right)$, elle est donc absolument convergente; d'autre part, en vertu de (1)

$$y = S_n + \frac{(-1)^n}{n!}\int_0^x x^n\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}.dx\ ,$$

S_n tend vers S et le terme complémentaire est, en valeur absolue, moindre que mod $\left(\frac{1}{n!(n-q+1)}.x^{n-q}.A\right)$ et par suite moindre que $\frac{Aa^{n-q}}{n!(n-q+1)}$ qui tend vers zéro lorsque n croît indéfiniment; le terme complémentaire tend donc vers zéro et par suite y est bien la valeur de la série S pour mod $(x) \leqq a$.

Dans le cas particulier de $q=0$ la condition est que $\frac{d^py}{dx^p}$ reste finie lorsque p croît indéfiniment.

2. En se bornant à ce cas particulier on peut facilement étendre la formule à une fonction d'autant de variables que l'on voudra indépendantes ou non. Soit $y = f(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_m)$ qui reste finie et bien déterminée ainsi que toutes ses dérivées partielles, quelque grands qu'en soient les indices, sous les conditions $\operatorname{mod}(x_i) \leqq a_i$, nombre positif convenablement choisi, où i peut prendre toutes les valeurs entières de 1 à m. Considérons la fonction de l'unique variable indépendante t

$$z = f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_m)$$

en vertu des hypothèses faites, cette fonction et toutes ses dérivées par rapport à t restent finies et bien déterminées quelque grand que soit l'ordre de la dérivée considérée sous la seule condition $t \leqq 1$; on peut donc lui appliquer la formule précédente et l'on aura, en faisant $t = 1$,

$$y = f(0, 0, \ldots 0) + \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p!} \left[x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} \right]^{(p)} \quad \text{(puissance symbolique).}$$

3. De la formule (1) on peut déduire la formule de Maclaurin, avec une forme du terme complémentaire non encore remarquée et qui contient, comme cas particuliers les formes classiques de Lagrange et de Cauchy. En effet, on peut appliquer la formule (1) non seulement à y, mais à toutes ses dérivées jusqu'à celle d'ordre n incluse; on a ainsi:

$$y \equiv y_0 + x \cdot \frac{dy}{dx} - \frac{x^2}{2!} \frac{d^2y}{dx^2} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n!} x^n \frac{d^ny}{dx^n} + \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^x x^n \frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} \cdot dx$$

$$\frac{dy}{dx} \equiv \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 + x \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{x^2}{2!} \frac{d^3y}{dx^3} + \ldots + \frac{(-1)^{n-2}}{(n-1)!} x^{n-1} \frac{d^ny}{dx^n} + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \int_0^x x^{n-1} \frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} dx$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} \equiv \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 + x \frac{d^3y}{dx^3} - \frac{x^2}{2!} \frac{d^4y}{dx^4} + \ldots + \frac{(-1)^{n-3}}{(n-2)!} x^{n-2} \frac{d^ny}{dx^n} + \frac{(-1)^{n-2}}{(n-2)!} \int_0^x x^{n-2} \frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} dx$$

. . . .

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} \equiv \left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) + x \frac{d^ny}{dx^n} - \int_0^x x \frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} \cdot dx$$

$$\frac{d^ny}{dx^n} \equiv \left(\frac{d^ny}{dx^n}\right)_0 + \int_0^x \frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} \cdot dx \;;$$

en multipliant les deux membres de ces identités, dans leur ordre, respectivement par

$$1\,,\ \frac{x}{1}\,,\ \frac{x^2}{2\,!}\,,\ \dots\ \frac{x^n}{n\,!}$$

et ajoutant membres à membres, on obtient, toutes réductions faites :

$$y = y_0 + x\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 + \frac{x^2}{2\,!}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 + \dots + \frac{x^n}{n\,!}\left(\frac{d^ny}{dx^n}\right)_0 + \mathrm{R} \qquad (2)$$

ce qui est la formule de Maclaurin, où R, terme complémentaire, est donné par la formule:

$$\mathrm{R} = \frac{(-1)^n}{n\,!}\int_0^x x^n \frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}\,dx + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)\,!}\cdot\frac{x}{1\,!}\int_0^x x^{n-1}\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}\,dx + \dots$$

$$+ \frac{(-1)^{n-p}}{(n-p)\,!}\cdot\frac{x^p}{p\,!}\int_0^x x^{n-p}\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}\,dx + \dots + \frac{x^n}{n\,!}\int_0^x \frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}\,dx\,.$$

En écrivant z au lieu de x, hors du signe d'intégration et faisant comme si z était indépendant de x, on peut écrire:

$$\mathrm{R} = \frac{1}{n\,!}\int_0^x (z-x)^n \frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}\,.\,dx \qquad (3)$$

où l'on intègrera comme si z était constant; après intégration, on fera $z = x$. Pour déduire de (3) la forme de Cauchy écrivons

$$\mathrm{R} = \frac{1}{n\,!}\int_0^x (z-x)^{n-q}(z-x)^q \frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}\,.\,dx\,, \qquad (q \leq n)$$

puis remplaçons sous le signe d'intégration $(z-x)^q \frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}$ par la valeur que prend ce produit fonction de x pour une valeur fixe θx $(\theta < 1)$ comprise entre les deux limites de l'intégrale et convenablement choisie, nous aurons:

$$\mathrm{R} = \frac{(-1)}{n\,!\,(n-q+1)}(z-\theta x)^q\left(\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}\right)_{\theta x}\left[(z-x)^{n-q+1} - z^{n-q+1}\right]$$

où l'on doit faire $z = x$ ce qui donne enfin:

$$R = \frac{x^{n+1}(1-\theta)^q}{n!\,(n-q+1)}\left(\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}\right)_{\theta x}$$

qui est bien la forme de Cauchy; pour $q = 0$ on a celle de Lagrange.

4. Il résulte de ce qui précède que la formule (1) conduit, en passant au besoin par celle de Maclaurin à tous les développements connus des fonctions en série mais elle peut aussi conduire directement à ces résultats ou à d'autres que la formule de Maclaurin ne peut pas donner. J'en vais exposer quelques exemples.

1° Appliquons la formule à $y = e^{-x}$ on a immédiatement

$$e^{-x} \equiv 1 - \frac{x}{1!}e^{-x} - \frac{x^2}{2!}e^{-x} - \frac{x^3}{3!}e^{-x} - \ldots - \frac{x^n}{n!}e^{-x} - \ldots$$

d'où

$$1 \equiv e^x - \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2!} \cdots - \frac{x^n}{n!} - \cdots$$

ou enfin

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

quel que soit x.

2° Soit $y = (1+x)^m$, m quelconque, x positif.

La formule donne immédiatement

$$(1+x)^m \equiv 1 + \frac{m}{1}\cdot x(1+x)^{m-1} - \frac{m(m-1)}{1.2}x^2(1+x)^{m-2} + \ldots$$

d'où

$$(1+x)^{-m} \equiv 1 - \frac{m}{1}\left(\frac{x}{1+x}\right)$$
$$+ \frac{m(m-1)}{2!}\left(\frac{x}{1+x}\right)^2 - \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\left(\frac{x}{1+x}\right)^3 + \cdots$$

ou en changeant m en $-m$

$$(1+x)^m \equiv 1 + \frac{m}{1}\left(\frac{x}{1+x}\right)$$
$$+ \frac{m(m+1)}{2!}\left(\frac{x}{1+x}\right)^2 + \frac{m(m+1)(m+2)}{3!}\left(\frac{x}{1+x}\right)^3 + \cdots$$

pour toute valeur positive de x.

3° Soit $y = L(1 + x)$.

La formule donne:

$$L(1+x) \equiv \frac{x}{1} \cdot \frac{1}{1+x} - \frac{x^2}{2} \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{x^3}{3} \frac{1}{(1+x)^3} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \frac{1}{(1+x)^n} + \dots$$

ou

$$L(1+x) \equiv \frac{x}{1+x} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x}{1+x}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{1+x}\right)^3 + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{x}{1+x}\right)^n + \dots$$

pour toute valeur positive de x.

Si on y fait $x = \frac{1}{N}$, N entier positif quelconque, on a:

$$L(N+1) - LN = \frac{1}{N+1} - \frac{1}{2} \frac{1}{(N+1)^2} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{N+1}\right)^3 + \dots$$

qui donne sous forme de série rapidement convergente la différence tabulaire d'une table de logarithmes népériens c'est-à-dire le moyen de calculer cette table.

Royan, février 1921.

MELANGES ET CORRESPONDANCE

Le Problème des quatre couleurs.

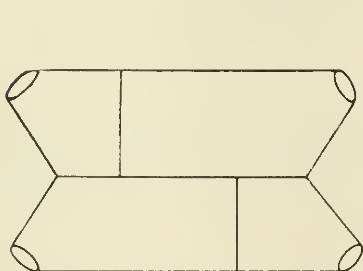
A propos d'une communication de M. J. Chuard.

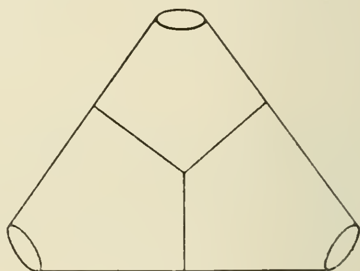
Dans le n° 6 du tome XXII de l'*Enseignement mathématique*, paru en mai 1923, je lis, aux pages 373 et 374, une note de M. Jules Chuard, *sur le problème des quatre couleurs*. Sans vouloir diminuer son mérite, je lui ai signalé, et je crois que cela peut être intéressant pour les lecteurs de l'*Enseignement math.*, que la proposition à laquelle il arrive n'est certainement pas exacte, dans les termes où il l'a énoncée.

On sait depuis très longtemps, que le problème des quatre couleurs revient à celui de décomposer le réseau cubique (c'est-à-dire à sommets trièdres), en un réseau linéaire (c'est-à-dire formé d'arêtes isolées et reliant deux à deux tous les sommets), et un réseau quadratique (c'est-à-dire formé de polygones isolés passant par tous les sommets), et de façon que tous ces polygones aient un nombre pair de côtés; ce serait le cas, par exemple, s'il n'y avait qu'un seul polygone.

Le point difficile qu'affirme M. Chuard, c'est qu'il existe une décomposition dans laquelle il n'y a qu'un seul polygone; et j'ajoute qu'on a souvent cherché dans cette voie la démonstration du problème, mais jusqu'ici sans succès, à ma connaissance.

Cependant, il n'est pas exact, comme le dit M. Chuard, que dans tout réseau cubique tracé sur une sphère, il existe un polygone passant par tous les sommets. Il est aisé de construire des exemples qui infirment cet énoncé. Et je vous en donne deux ci-dessous.


Fig. 1.


Fig. 2.

Peut-être existe-t-il une propriété de ce genre-ci, et encore, faudrait-il la démontrer: dans tout réseau connexe, traçable sur une sphère, cubique, et satisfaisant à d'autres conditions qu'il faudrait préciser, il existe un polygone passant par tous les sommets. Et si ces conditions sont telles que les réseaux qui ne les satisfont pas sont coloriables en quatre couleurs pour d'autres motifs, alors le théorème des quatre couleurs serait démontré.

Uccle (Belgique), 16 juillet 1923. A. Errera.

Sur les fonctions multipériodiques d'une variable réelle.

A propos d'une Note de M. Winants.

On trouve dans la Note de M. Winants sur les fonctions triplement périodiques (*Enseignement mathématique*, XXII, N° 6, p. 358) la remarque suivante: « on a démontré l'impossibilité d'une fonction

(d'une variable réelle) doublement périodique ». Pour rendre cette remarque précise il faudra ajouter: « qui soit *continue* ».

Pour les fonctions *discontinues* d'une variable réelle ce théorème ne s'applique point. Une fonction discontinue d'une variable réelle peut admettre deux, trois, ..., n et même une infinité dénombrable ou non dénombrable de périodes. Par exemple la fonction $f(x)$, égale à 0 pour tous les x de la forme

$$p = m + n\sqrt{2} \qquad (1)$$

(m, n nombres entiers) et égale à 1 pour tous les autres x réels, admet *deux* périodes distinctes: 1 et $\sqrt{2}$, comme il est aisé de voir. La fonction égale à 0 pour tous les x qui sont de la forme

$$p = m_1 + m_2\sqrt{2} + m_3\sqrt{3} \qquad (m_1\,.\ m_2\,,\ m_3 \text{ entiers})$$

et égale à 1 pour tous les autres x réels, admet *trois* périodes distinctes, à savoir: 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$. La fonction de Dirichlet, qui est égale à 0 pour tous les x irrationnels et égale à 1 pour tous les rationnels, admet comme périodes tous les nombres rationels et n'a pas de périodes distinctes. Dans un mémoire « Sur les fonctions multipériodiques uniformes d'une variable réelle » *(Comptes Rendus de la Société des Sciences de Varsovie*, 1918, p. 807-816, dans la langue polonaise, avec un résumé rédigé en français), j'ai construit aussi les fonctions, mesurables ou non mesurables, possédant un ensemble non dénombrable de périodes. On démontre aisément qu'une fonction multipériodique d'une variable réelle est *discontinue* pour toute valeur de la variable indépendante et qu'elle possède des périodes arbitrairement petites; on peut alors donner à ces fonctions *multipériodiques* aussi le nom: *micropériodiques*.

J'ai démontré (*l. c.*), qu'une fonction multipériodique, mesurable et différente de la constante est *presque partout* constante, c'est-à-dire constante hors des points d'un ensemble de mesure nulle (au sens de Lebesgue). Pour qu'un ensemble quelconque de nombres puisse représenter l'ensemble des périodes d'une fonction, il faut et il suffit que cet ensemble contienne les nombres $x + y$ et $x - y$, s'il contient les nombres x et y.

On voit donc qu'il existe des fonctions multipériodiques d'une variable réelle et que l'on peut développer leur théorie.

Antoine LOMNICKI (Lwów, Pologne).

---

1 C'est-à-dire qu'ils ne sont pas les multiples entiers d'une même période (v. TANNERY-MOLK, *Fonctions elliptiques*, t. I, p. 141-142).

CHRONIQUE

L'enseignement mathématique aux Etats-Unis.

Les travaux de la délégation américaine[1] de la Commission internationale de l'enseignement mathématique viennent d'être complétés d'une façon très heureuse par un important volume intitulé : *The Reorganization of Mathematics in secondary Education*[2], publié par un comité constitué sous les auspices de la « Mathematical Association of America ». Tandis que les rapports rédigés par la délégation américaine se proposaient surtout de donner un aperçu général de l'organisation des études mathématiques et des méthodes d'enseignement, l'enquête dont on vient de publier les résultats examine les réformes à accomplir dans l'enseignement secondaire des Etats-Unis.

En 1916, à la suite de propositions assez nombreuses qui avaient été formulées, soit dans les périodiques, soit dans les assemblées de professeurs de mathématiques, la « Mathematical Association » a décidé de coordonner les mouvements de réforme qui avaient pris naissance dans différents Etats et d'en faire un mouvement national. Sous le titre « National Committee on Mathematical Requirements », il a été constitué une commission comprenant des représentants des trois grandes associations de professeurs de mathématiques de l'enseignement secondaire (The Association of Teachers of Mathematics in New-England, The Association of Teachers of Mathematics in the Middle State and Maryland and The Central Association of Science and Mathematical Teachers), et composée comme suit: J.-W. Young, Dartmouth College, chairman; J.-A. Foberg, State Department of Public Instruction, Harrisburg, Pa., vice-chairman; A.-R. Crathorne, University of Illinois; C.-N. Moore, University of Cincinnati; E.-H. Moore, University of Chicago; D.-E. Smith, Columbia University; H.-W. Tyler, Mass. Institute of Technology; W.-F. Downey, English High School, Boston, Mass.; Vevia Blair, Horace Mann School, New-York City; A.-C. Olney, Commissioner of Secondary Education, Sacramento, Calif.; Raleigh Schorling, The Lincoln

1 Voir la liste dans *L'Ens. Math.*, t. XXI, p. 328-329, 1920.

2 A Report by the National Committee on Mathematical Requirements under the auspices of the Mathematical Association of America, Inc. — 1 vol. in-8° de 652 p., 1923.

School, New-York City; P.-H. UNDERWOOD, Ball High School, Galveston, Tex.; Eula A. WEEKS, Cleveland High School, Saint-Louis, Mo.

Le Comité a fait appel à une collaboration aussi large que possible dans les divers Etats. Ses questionnaires et rapports préliminaires ont été mis en discussion dans toutes les sociétés de professeurs de mathématiques. Près d'une centaine de groupements ont pris une part effective à cette enquête sur les progrès à réaliser dans l'enseignement des mathématiques dans les établissements secondaires. Les rapports que publie aujourd'hui le Comité représentent ainsi l'opinion générale du corps enseignant et ne manqueront pas de rencontrer un accueil favorable auprès des autorités scolaires.

Nous aurons l'occasion de revenir sur cette intéressante étude. Pour le moment nous devons nous borner à reproduire ici la liste des rapports:

Part. I. *General Principles and Recommendations.* — I. A brief outline of the report. — II. Aims of mathematical instruction — general principles. — III. Mathematics for years seven, eight and nine. — IV. Mathematics for years ten, eleven and twelve. — V. College entrance requirements. — VI. List of proposition in plane and solid geometry. — VII. The function concept in secondary school mathematics. — VIII. Terms and symbols in elementary mathematics.

Part II. *Investigations conducted for the Committee.* — IX. The present status of disciplinary values in education, by Vevia BLAIR. — X. The Theory of Correlation applied to school grades, by A. R. CRATHORNE. — XI. Mathematical Curricula in foreign countries, by J.-C. BROWN. — XII. Experimental courses in mathematics, by Raleigh SCHORLING. — XIII. Standardized tests in mathematics for secondary schools, by C.-B. UPTON. — XIV. The training of teachers of mathematics, by R.-C. ARCHIBALD. — XV. Certain questionnaire investigations. — XVI. Bibliography of the teaching of mathematics, by D.-E. SMITH and J.-A. FOBERG. — Appendix: List of Co-operating Organizations. — Index.

Ce volume a pu être publié grâce à l'appui financier du « General Education Board of New York City ». Les rapports préliminaires ont été imprimés par les soins du « United States Bureau of Education » et de la Revue « The Mathematics Teachers ». H. FEHR.

Nouvelles diverses. — Nominations et distinctions.

Congrès international de mathématiques. — Des pourparlers sont engagés en vue de l'organisation d'un congrès international de mathématiques pures et appliquées qui aurait lieu à *Toronto* au début de septembre 1924, comme suite à la réunion que la British Association

tiendra au Canada l'an prochain. Nous ne manquerons pas de renseigner nos lecteurs sur le programme de ce congrès.

France. — *Faculté des Sciences de Paris.* — M. Serge BERNSTEIN, professeur à l'Université de Kharkof, a fait une série de leçons sur « l'Introduction des propriétés extrémales et de la meilleure approximation des fonctions d'une variable réelle ».

Le titre de professeur a été conféré à M. G. JULIA.

Faculté des Sciences de Grenoble. — M. GOSSE est nommé titulaire de la chaire de mathématiques générales.

Ingénieur docteur. — Un décret du 30 avril 1923 institue le titre d'ingénieur docteur en vue de provoquer des recherches sur les applications de la science. Ce titre ne peut être obtenu qu'après quatre inscriptions dans un laboratoire et seulement après la soutenance d'une thèse.

56me *Congrès des Sociétés savantes, Paris* 1923. — Le 3 avril 1923, la section des sciences a entendu, à la Sorbonne, la seule communication inscrite au programme: « la première machine à calculs binaires, par M. A. GÉRARDIN, correspondant du Ministère de l'Instruction publique à Nancy. Cette machine que l'auteur fait construire après plusieurs années de recherches et d'essais permet l'étude des nombres de FERMAT, de MERSENNE en particulier, et de nombres spéciaux pouvant avoir quarante chiffres en numération décimale. Rappelons que les tables classiques permettent l'étude de nombres de huit chiffres, et que les procédés mécaniques employés depuis 1912 par l'auteur allaient jusqu'à 19 ou 20 chiffres, limite qui n'a pas été dépassée depuis. La présente machine se compose d'un chariot-opérateur, d'un piano mathématique, et d'un report modulaire électrique.

Italie. — *R. Accademia dei Lincei.* — M. U. CISOTTI, Professeur à l'Institut technique supérieur de Milan, a été élu membre correspondant. M. A. E. H. LOVE (Oxford) a été élu associé étranger.

La Société italienne des Sciences (dite des XL) a décerné les prix de mathématiques pour 1922 et pour 1923 respectivement à M. G. SCORZA, Professeur à l'Université de Naples, pour son ouvrage « Corpi numerici ed algebre » (Messina, Principato, 1921), et à M. L. TONELLI, Professeur à l'Université de Bologne, pour le 1er volume de l'ouvrage « Fondamenti di Calcolo delle variazioni » (Bologna, Zanichelli, 1922).

Universités. — M. CIPOLLA, de l'Université de Catane, a été appelé à l'Université de Palerme pour l'Analyse supérieure.

Ont été admis en qualité de *privat-docents :* A l'Université de Gênes M. F. SBRANA pour la mécanique rationnelle; à l'Université de Naples M. S. CHERUBINO pour l'analyse infinitésimale et M. M. PASCAL pour la mécanique rationnelle; à l'Université de Pise, M. G. ALBANESE, pour la géométrie analytique, M. M. BEDARIDA pour l'analyse algébrique, M. F. CECIONI pour l'analyse infinitésimale.

Prof. Dr G. Huber.

26 octobre 1857 — 24 janvier 1923.

L'Université de Berne a perdu en quelques années tout un groupe de professeurs de mathématiques qui l'avaient fidèlement servie pendant plus d'un quart de siècle. Ce sont les Professeurs Benteli et Ott en 1917, puis le Prof. Graf en 1918 et tout dernièrement le Prof. Dr G. Huber.

G. Huber avait fait ses études gymnasiales à Schaffhouse, dans son canton d'origine. Il suivit ensuite les cours de l'Ecole polytechnique fédérale à Zurich, où il fut l'élève de Fiedler et de Geiser. Après Zurich il continua ses études à Munich chez Pringsheim et Brill pour venir les terminer à Berne chez Schläfli. Il subit ses examens de doctorat en mathématiques à Berne en 1883.

Il ne devait plus quitter Berne, où il resta comme professeur au Gymnase de la ville depuis 1884 à 1906 et comme professeur à l'Université de 1884 à 1921.

A la mort de Schönholzer, en 1884, il fut chargé comme privat-docent d'une partie des cours de mathématiques à l'Ecole normale supérieure. En 1890, il fut promu professeur extraordinaire et chargé plus spécialement de l'enseignement de la géométrie. En 1906, il devint professeur ordinaire de géométrie et d'astronomie théorique, poste qu'il conserva jusqu'au moment où il prit sa retraite au printemps 1921.

G. Huber se fit remarquer par des qualités pédagogiques de premier ordre. Ses cours extraordinairement bien préparés étaient considérés comme des modèles de clarté. Se vouant entièrement à sa charge, il avait acquis toute la confiance de ses élèves sur lesquels il exerçait une grande influence.

Il est évident que l'intensité de son activité pédagogique partagée longtemps entre deux établissements eut un contrecoup sur ses publications scientifiques. Elle ne lui laissa pas le temps de publier toutes les idées qu'il avait développées dans ses cours ou dans son séminaire. Néanmoins nous avons de lui quatorze Mémoires scientifiques dans divers domaines, et ceux de géométrie analytique furent particulièrement remarqués. En voici la liste:

1. Anwendungen der conformen Abbildungen. (Thèse de Doctorat.) Zurich 1883.
2. Conforme Abbildung des Kreises auf das innere einer Epicyloïde. Mitteilungen der B. N. G., 1882.
3. Die Cassinischen Kurven. Mitteilungen der B. N. G., 1889.
4. Forschungen auf dem Gebiete der Spektralanalyse. Mitteilungen der B. N. G., 1891.
5. Die Kegelfokalen. Jahresbereicht des Städt. Gymnasiums Bern, 1893.

6. Sternschnuppen, Feuerkugeln, Meteorite, Meteorschwärme. Mitteilungen der B. N. G., 1894.
7. Die Conchalen, ihre orthogonalen Trajectorien und die Cissoiden 4ter Ordnung. Monatshefte für Mathematik und Physik. Wien 1895.
8. Die kleinen Planeten des Asteroidenringes. Mitteilungen der B. N. G., 1896.
9. Ueber den sphärischen Kegelschnitt und seine abwickelbare Tangentenfläche. Zeitschrift für Mathematik und Physik, Leipzig 1900.
10. Der Astronom Tycho Brahe. Mitteilungen der B.N.G., 1902.
11. Die Conchoidenfläche, eine Linienfläche 4ter Ordnung. Monatshefte für Mathematik und Physik. Wien 1903.
12. Auswertung einiger bestimmter Integrale mit Anwendung des freien Integrationsweges. Montashefte für Mathematik und Physik, Wien 1905.
13. Die Ponsfläche, eine Fläche dritter Ordnung mit vier Doppelpunkten. Monatshefte für Mathematik und Physik, Wien 1911.
14. Die Doppel- und mehrfachen Sterne. Jahresbericht des Städt. Gymnasiums, Bern 1905.

Tous ces travaux sont remarquablement élaborés et très minutieusement soignés jusque dans l'exécution des détails. Ils ont fait école, et sont fréquemment cités par les géomètres modernes. Au séminaire mathématique de l'Université de Berne, ils devinrent le point de départ des 52 dissertations de doctorat faites sous la direction du professeur Huber.

G. Huber était un homme modeste dont la vie fut entièrement consacrée à la science. Il laisse un grand vide dans le monde scientifique suisse, mais il laisse également un bel exemple de travail et de dévouement dont les jeunes peuvent s'inspirer.

L. Crelier (Berne).

Nécrologie.

P.-J.-H. Baudet et J. Cardinaal. — Nous apprenons avec regrets la mort des mathématiciens hollandais P.-J.H. Baudet, professeur à l'Ecole technique supérieure de Delft et de J. Cardinaal, membre de l'Académie des Sciences d'Amsterdam, ancien professeur à l'Ecole technique supérieure de Delft. M. Cardinaal était le délégué de la Hollande à la Commission internationale de l'enseignement mathématique.

M. Louis Bertrand, ancien professeur de mathématiques au Collège de Genève, ancien directeur de cet établissement (1899-1918), est mort le 13 mars 1923 dans sa 83me année. On lui doit une Géométrie de position (1873), un Traité d'Arithmétique (1876), des Leçons de géométrie élémentaire (1re édition, 1[illegible]0 2me édition, 1921), ainsi que des brochures sur des questions scolaires. L. Bertrand était le doyen des maires et des députés genevois.

H. BROCARD. — Nous apprenons avec regret la mort de M. Henri Brocard, décédé à Bar-le-Duc à l'âge de 77 ans. Ancien élève de l'Ecole Polytechnique, officier du génie, il se consacra aux sciences mathématiques et à la météorologie. On lui doit de nombreuses notes d'algèbre, de théorie des nombres et de géométrie, ainsi que des mémoires bibliographiques. Tout récemment encore, il publia, en collaboration avec M. T. Lemoyne, uu volume intitulé « Courbes géométriques remarquables ».

M. A. FAVARO professeur de statique graphique et d'histoire des mathématiques à l'Université de Padoue, est décédé le 30 septembre 1922, à l'âge de 75 ans.

Ch. de FREYCINET. — M. de Freycinet, membre de l'Académie des Sciences et membre de l'Académie française, est décédé à Paris le 15 mai 1923 à l'âge de 95 ans. Ancien élève de l'Ecole polytechnique, ingénieur en 1850, de Freycinet a publié un grand nombre de travaux scientifiques, notamment: L'Analyse infinitésimale, étude sur la métaphysique du haut calcul, 2me édition, 1881; Essai sur la philosophie des sciences, 2me édition, 1900; Sur les principes de la Mécanique rationnelle, 1902; De l'expérience en Géométrie, 1903 (Gauthier-Villars, Paris). Homme d'Etat éminent Ch. de Freycinet a joué un rôle de premier ordre. De tous les parlementaires de la 3me République il fut celui qui détint le plus longtemps le pouvoir: il fut deux fois ministre des Travaux publics, quatre fois chef du gouvernement et ministre des Affaires étrangères et cinq fois ministre de la Guerre.

M. E. JABLONSKI, professeur honoraire au Lycée Saint-Louis, est décédé à Royan en avril 1923.

M. W. KILLING, professeur à l'Université de Munster, est décédé le 11 février 1923 à l'âge de 72 ans.

M. C. G. KNOTT, secrétaire général de la Royal Society of Edinburgh, est décédé le 26 octobre 1922 à l'âge de 66 ans. On lui doit, entre autres, le beau *Memorial Volume*, publié à l'occasion de la Napier Tercentenary Celebration, 1914.

A. A. MARKOFF. — On annonce la mort du savant mathématicien russe Markoff, membre de l'Académie des Sciences et professeur émérite de l'Université de Pétrograd, survenue à l'âge de 66 ans.

J.-D. Van der WAALS. — Le grand savant hollandais J.-D. Van der Waals, secrétaire perpétuel de l'Académie des sciences d'Amsterdam, associé étranger de l'Académie des sciences de Paris, est décédé le 8 mars 1923 à l'âge de 85 ans. Il fut professeur de physique à l'Université d'Amsterdam de 1877 jusqu'à sa retraite en 1908. Il restera célèbre par ses remarquables travaux sur l'équation d'état (1873), la loi des états correspondants (1880) et la théorie des mélanges binaires (1889).

NOTES ET DOCUMENTS

Cours universitaires.

Année 1923-1924.

ÉTATS-UNIS D'AMÉRIQUE

University ot Chicago. — Courses which continue for more than one quarter are indicated with Roman numerals, as I, II, III, IV. Prof. E. H. Moore : Hermitian matrices in General Analysis, I, II, III, IV, V; Vectors, matrices, and quaternions. — Prof. L. E. Dickson : Hypercomplex numbers, I, II ; Theory of equations. — Prof. H. E. Slaught : Differential equations; Definite integrals; Elliptic integrals; Advanced calculus. — Prof. G. A. Bliss : Theory of functions of a real variable; Calculus of variations; Integral equations; Advanced calculus. — Prof. E. J. Wilczynski : Seminar on Geometry; Metric differential geometry; Solid analytic geometry. — Prof. F. R. Moulton : Modern theories of analytic differential equations, I, II; Advanced ballistics, I, II. — Prof. W. D. MacMillan : Analytic mechanics, I, II; Celestial mechanics; Dynamics of rigid bodies; Theory of the potential. — Prof. A. C. Lunn : Vector analysis; Applications of vector analysis in the theory of electromagnetism; Thermodynamics; Vector analysis in Riemann-Einstein space. — Prof. J. W. A. Young : Selected topics in mathematics. — Dr. Mayme I. Logsdon : Theory of functions of a complex variable; Introduction to higher algebra. Courses in research are also offered by Professor Moore in Foundations of mathematics and in General Analysis, by Professor Bliss in Analysis, by Professor Dickson in Algebra and Theory of Numbers, by Professor Wilczynski in Geometry, and by Professor Lunn in Applied mathematics.

Columbia University; (*New York*). — Prof. T. S Fiske : Differentiel equations. — Prof. F. N. Cole : Theory of groups (first term). — Prof. D. E. Smith : History of mathematics; Practicum in the history of mathematics. — Prof. C. J. Keyser : Modern theories in geometry (fiist term); Introduction to mathematical philosophx (first term). — Prof. Edward Kasner: Einstein's theory of gravitation. — Prof. W. B. Fite · Infinite series (second term). — Prof. J. F. Ritt : Elliptic functions (first term); Analytic theory of numbers (second term). — Dr. G. A. Pfeiffer : Topics in projective geometry (second term). — Dr. Jesse Douglas : Topics in higher geometry (second term).

Cornell University; (*Ithaca*). — Prof. J. H. Tanner : Mathematics of finance. — Prof. Virgil Snyder : Algebraic geometry . — Prof. F. R. Sharpe:

Hydrodynamics and Elasticity. — By Professor Arthur RANUM : Line geometry. — Prof. W. B. CARVER : Advanced calculus. — Prof. D. C. GILLESPIE : Theory of functions of a complex variable. — Prof. W. A HURWITZ : Differential equations of mathematical physics. — Prof. C. F. CRAIG : Projective geometry. — Prof. F. W. OWENS : Advanced analytic geometry. — Prof. H. M. MORSE : Analysis situs (first term) ; The restricted problem of three bodies (second term) ; Elementary differential equations. — Dr. G. M. ROBISON : Calculus of variations (first term) ; Infinite series (second term). — Mr. D. S. MORSE : Modern higher algebra.

Harward University; (*Cambridge, Mass.*). — Prof. W. F. OSGOOD : Advanced calculus; Theory of functions (second course). — Prof. J. L. COOLIDGE : Line geometry (first half-year); Probability (second half-year); Kinematics (second half-year). — Prof. G. D. BIRKHOFF : Space, time, and relativity (first half-year); Advanced dynamics and Quantum theory (second half-year). — Prof. E. V. HUNTINGTON : The fundamental concepts of mathematics (first half-year). — Prof. O. D. KELLOGG : Dynamics (second course); Introduction to the theory of potential functions and Laplace's equation (first half-year); Theory of point sets (second half-year). — Prof. W. C. GRAUSTEIN : Introduction to modern geometry; Projective geometry (first half-year); Geometrical transformations (second half-year). — Dr. J. L. WALSH : The partial differential equations of mathematical Physics (second half-year). — Dr. Philip FRANKLIN : The analytical theory of heat and problems in elastic vibrations (second half-year); Relativity, advanced course (second half-year). There will also be a seminary in Analysis conducted by Dr. Walsh and Dr. Franklin, and the following courses of research : Topics in the theory of functions, Professor Osgood; Topics in Postulate-Theory, Professor Huntington; Topics in geometry, Professor Coolidge; Topics in the theory of potential functions, Professor Kellogg; Topics in the theory of differential equations, Professor Birkhoff; Topics in geometry, Professor Graustein.

University of Illinois; (*Urbana*). — Prof. E. J. TOWNSEND : Functions of a complex variable; Differential equations and advanced calculus. — Prof. C. A. MILLER : Theory of groups; Theory of equations and determinants (first semester). — Prof. J. B. SHAW : Vector methods. — Prof. A. B. COBLE : Projective geometry. — Prof. R. D. CARMICHAEL : Linear difference equations. — Prof. A. EMCH : Algebraic surfaces; Constructive and projective geometry (second semester). — Prof. A. R. CRATHORNE : Statistics (first semester); Acturial theory. — Prof. G. E. WAHLIN : Calculus of variations (second semester). — Prof. A. J. KEMPNER : Theory of numbers. — Prof. H. BLUMBERG : Graphical and numerical methods (second semester); Introduction to modern mathematics. — Prof. E. B. LYTLE : Teacher's course (first semester); Fundamental concepts of mathematics (second semester).

Massachusetts Institute of Technology; (*Cambridge, Mass.*). — Prof. F. S. WOODS : Advanced calculus and differential equations ; Higher geometry, — Prof. C. L. E. MOORE : Theoretical Aeronautics; Rigid dynamics. — By Professor H. B. Phillips : Thermodynamics; Statistical Mechanics; Quantum Theory; Theory of the gyroscope. — Prof. Joseph LIPKA : Analytical mechanics; Mathematical laboratory. — Prof. F. L. HITCHCOCK : Application of mathematics to Chemistry. — By Dr. George RUT-

LEDGE : Modern algebra; Theory of functions. — Dr. J. S. TAYLOR : Mathematics of investment. — Dr. N. WIENER : Fourier's series and integral equations. — Dr. S. D. ZELDIN : Vector analysis.

University of Pennsylvania; (*Philadelphia*). — Prof. E. S. CRAWLEY : Higher plane curves. — Prof. G. H. HALLETT : Infinite series and products (first term); The theory of functions of a complex variable (second term). — Prof. O. E. GLENN : The theory of invariants. — Prof. F. H. SAFFORD : The mathematical theory of elasticity. — Prof. G. G. Chambers : Synthetic projective geometry. — Prof. H. H. MITCHELL : The analytic theory of numbers. — Prof. M. J. BABB : Introduction to the theory of numbers. — Professor F. W. BEAL : Linear differential equations of the second order (first term); Advanced calculus (second term). — Prof. J. R. KLINE: Point-set theory (first term) : Integral equations (second term).

Princeton University. — Prof. J. H. M. WEDDERBURN : Complex variables. — Prof. L. P. EISENHART : Differential geometry. — Dr. C. E. HILLE : Advanced course in analysis. — Dr. C. C. MACDUFFEE : Algebraic invariants. — Dr. B. KEREKJARTO : Analysis situs. — Prof. O. VEBLEN : Seminar on mathematical physics.

Yale University (*New Haven, Conn.*); Prof. J. K. WHITTEMORE: Differential geometry; Special topics in advanced differential geometry. — Prof. W. A. WILSON: Functions of a real variable; Special topics in the theory of aggregates. — Prof. E. J. Miles: Advanced calculus of variations, — Prof. E. W. BROWN: Celestial mechanics. — Prof. J. I. TRACEY: Higher algebra. — Prof. James PIERPONT: Non-Euclidean geometry and Einstein's theory. — Mr. MIKESH: Teachers' course.

University of Wisconsin (First Semester). — Prof. E. B. SKINNER : Advanced calculus; Theory of numbers. — Prof. H. W MARCH: Harmonic analysis. — Prof. E. B. VAN VLECK: Differential equations; Theory of analytic functions; Integral equations. — Prof. A. DRESDEN : Calculus of variations. Prof. C. S. SLICHTER: Mechanics. — Prof. L. W. DOWLING: Projective geometry.

FRANCE

Paris; *Faculté des Sciences.* (Ouverture des cours le 5 novembre 1923). — C. GUICHARD: Géométrie supérieure. Les travaux pratiques afférents au certificat de géométrie supérieure seront dirigés par M. THYBAUT. — GOURSAT: Calcul différentiel et intégral et éléments de la théorie des fonctions analytiques. M. JULIA fera des conférences en vue du certificat de calcul différentiel et intégral. — DRACH: Applications géométriques du calcul différentiel (1er semestre); la déformation des surfaces et les problèmes connexes (2e semestre). — MONTEL: Mécanique rationnelle. Conférences de mécanique rationnelle par M. THYBAUT, en vue du certificat de mathématiques générales, et par M. CAHEN. — VESSIOT : Des transformations infinitésimales et de leurs applications à la théorie des équations aux dérivées partielles. — DENJOY: Mathématiques générales préparatoires aux sciences physiques, avec conférences et travaux pratiques dirigés par MM. THYBAUT et CAHEN. — BOREL: Théorie de l'élasticité. — G. KŒNIGS: Principes généraux de la mécanique appliquée et des moteurs soit hydrauliques, soit thermiques. Travaux pratiques au laboratoire de mécanique

expérimentale. Conférences de statique graphique et résistance des matériaux par M. Servant. — Andoyer: Astronomie. Pendant le premier semestre M. Andoyer développera l'ensemble des matières comprises dans le programme du certificat d'études supérieures d'astronomie approfondie et pendant le second semestre il fera un cours sur la théorie générale des éclipses. Conférences d'astronomie pratique et exercices, par M. Lambert (1er semestre).

Paris; *Collège de France*. (Ouverture des cours le 4 décembre 1923). — Mathématiques, M. Lebesgue: Sur l'analysis situs. — Mécanique analytique et mécanique céleste, M. Hadamard: Les premières années de l'œuvre de Poincaré (équations différentiellles), 1 h.; il dirigera des analyses de mémoires scientifiques (1 h.). — M. Brillouin: La constitution interne du globe terrestre, d'après la géodésie et la sismologie. — M. Langevin: La liaison entre les phénomènes électriques et élastiques. — M. Le Roy: L'exigence idéalistique et le problème de la matière (1 h.); l'idée de la loi physique (1 h.).

Strasbourg; *Institut de mathématiques de l'Université*. — En dehors des cours de licence et des conférences d'agrégation les *cours de recherches* suivants seront professés à l'Institut en 1923-24 et intéresseront particulièrement les candidats au diplôme d'études supérieures et au Doctorat d'Etat ou au Doctorat d'Université.

Premier Semestre, novembre 1923-février 1924. — Bauer : Théorie statistique de la chaleur : Principes généraux (2 heures par semaine). — Cerf : Eléments de la théorie des groupes de transformations continues et finies. Applications recentes à la géométrie (2 heures). — Fréchet : Les notions de dimension et d'intégrale dans les espaces abstraits (3 heures).

Deuxième Semestre, mars 1924-juin 1924. — Bauer : Théorie statistique de la chaleur : Quanta (2 heures). — Fréchet : Théorie des erreurs d'observation (3 heures). — Valiron : Etude de quelques équations fonctionnelles (2 heures). — Villat : Théorie des tourbillons. Applications à quelques recherches récentes (2 heures). — Thiry : Principes fondamentaux de géométrie supérieure. Déformation des surfaces (2 heures).

ITALIE[1]

Bologna, *Università*. — Pincherle : Vedute superiori nella geometria elementare, 4. — Tonelli : Teoria delle funzioni analitiche, 3. — N. N. : Geometria superiore, 3. — N. N. : Fisica matematica, 3.

Catania, *Università*. — Aprile : Elementi di geometria dello spazio a quattro dimensioni, 3. — Cipolla : Applicazioni geometriche della teoria dei gruppi d'ordine finito, 4. — Lazzarino : Teoria dei campi vettoriali — Idrodinamica — Elettrodinamica, 3. — Marletta : Trattazione sintetica delle trasformazioni cremoniane con applicazioni, 4. — Picone : Metodi di integrazione approssimata delle equazioni alle derivate parziali della Fisica matematica, 4.

[1] Les cours fondamentaux, tels que Analyse algébrique et infinitésimale, Géometrie analytique, descriptive, projective, Mécanique rationnelle, existant dans toute université, ne figurent pas dans la liste.

Genova, *Università.* — LORIA : Trasformazioni geometriche, 3. — SBRANA : Teoria dell' elasticità con applicazioni tecniche, 4. — SEVERINI : Funzioni analitiche — Funzioni algebriche, 3. — SILLA : Elettricità e magnetismo, 3.

Messina, *Università.* — CALAPSO : Teoria delle funzioni algebriche e dei loro integrali, 4. — GIAMBELLI : Geometria sopra una curva. — Problemi numerativi sulle curve, 3. — I (fenomeni di) eredità e le funzioni di linee, 3.

Napoli, *Università.* — MARCOLONGO : Calcolo differenziale assoluto — Applicazioni alla meccanica, alla geometrica differenziale, alla relatività, 3. —MONTESANO : La teoria degli elementi immaginari secondo Staudt, 3. — PASCAL : Le trasformazioni di Lie, 3. — SCORZA : Elementi di geometria differenziale. — Geometria non euclidea, 3. — SIGNORINI : Teoria dell' elasticità con applicazioni, 3.

Padova, *Università.* — AMALDI : Esposizione storico-critica delle ricerche sui principi della geometria, 3. — D'ARCAIS : Funzioni di variabile complessa; serie di Fourier; equazioni differenziali di Eulero e di Jacobi e nozioni di funzioni ellittiche, 4. — LAURA : La teoria matematica dell' elettricità, 3. — RICCI : Metodi di Calcolo Differenziale assoluto con applicazioni alla teoria delle superfizie e alla teoria generale delle varietà, 4.— SOLER : Potenziale, funzioni sferiche, forme planetarie, 3. — TONOLO : Forme differenziali quadratiche. — Geometria differenziale delle superficie, 3.

Palermo, *Università.* — DE FRANCHIS : Geometria sulle curve algebriche sotto l' aspetto funzionale, 3. — GEBBIA : Teoria del potenziale. — Meccanica dei sistemi continui. — Idrostatica e idrodinamica, 4. — MINEO : Spazio, tempo e gravitazione, 3. — OCCHIPINTI : Calcolo delle variazioni e applicazioni, 3. — STRAZZERI : Le forme di prima, seconda e terza specie dal punto di vista analitico e proiettivo, 3.

Pavia, *Università.* — BRUSOTTI : Curve piane algebriche, 3. — VIVANTI : Equazioni a derivate parziali, 3. — N. N. : Fisica matematica, 3.

Pisa, *Università.* — BIANCHI : Equazioni differenziali ed integrali, 3. — MAGGI : Funzioni armoniche. — Campo elettromagnetico. — Teoria elettronica e relatività, 3. — ROSATI : Teoria degli iperspazi e geometria sopra una curva algebrica, 3.

Roma, *Università.* — ARMELLINI : Statistica stellare, 3. — BAGNERAG : Trascendenti intere, 3. — BISCONCINI : Approssimazioni numeriche, 3. — CANTELLI : Calcolo delle probabilità, 3. — Matematica attuariale, 3. — CASTELNUOVO : Geometria non euclidea. — Problema della divisione del cerchio, 3. — CRUDELI : Introduzione allo studio dell' elettricità e del magnetismo, 3. — ENRIQUES : Geometria sopra le curve e le superficie algebriche, 3. — LEVI-CIVITA : Fondamenti meccanici dell' aerotecnica, 3. — PERNA : Equazioni algebriche, 3. — SEVERI : Integrali di differenziali algebrici, 3. — TRICOMI : Complementi di calcolo, 3. — VOLTERRA : Ottica, 3. — Equazioni generali della dinamica e metodi di integrazione, 3. — ZONDADARI : Applicazione della geometria descrittiva alla teoria delle ombre e alle equazioni differenziali, 3.

Torino, *Università.* — BOGGIO : Teoria del potenziale. — Relatività, 3. — SEGRE : Capitoli di geometria differenziale, 3. — SOMIGLIANA : Teoria del calore. — Termodinamica. — Teoria cinetica dei gas, 3. — TOGLIATTI : Geometria non euclidea, 2.

SUISSE

Semestre d'hiver (octobre 1923 à mars 1924).

Bâle; *Université.* — H. MOHRMANN : Diff.- u. Integralrechn.; Flächentheorie; Mathem. Seminar. — O. SPIESS : Analyt. Geometrie; die Diff. gleichgn. d. mathem. Physik; Geschichte des Raum-Zeit-Problems. — W. MATTHIES : Vektor- u. Tensorrechn.; mathem.-physik. Seminar. — Th. NIETHAMMER : Sphär. Astronomie; Methode der kleinsten Quadrate; astronom. Uebgn. — R. FLATT : Päd. Seminar, mathem.-physik. Abteilung; Repetorium d. Algebra. — M. KNAPP : Pop. Astronomie; Astrognosie; Geschichte d. Astronomie.

Bern; *Université.* — L. CRELIER : Integralrechn.; Gammafunktion u. Eulersche Integrale; Funktionalrechn.; mathem. Seminar mit Prof. Gonseth. — F. GONSETH : Geom. Analysis (Quaternionen etc.); Analysis situs; analyt. Geometrie d. Raumes; Einl. in d. Diff.-rechn.— Joss : Einf. i. d. projekt. Geometrie. — R. de SAUSSURE : Einl. i. d. Geometrie d. starren Körper. — MICHEL : Algebra. — MAUDERLI : Theor. Astronomie; Uebgn; Seminar. — Chr. MOSER : Alters-u. Invaliditätsversicherung; Seminar. — BOHREN : Methode d. kleinsten Quadrate. — GRUNER : Vektoranalysis; Mechanik deformierbarer Körper. — LUTERBACHER : Dynamik. — KOERSTLER : Anw. d. höh. Mathematik auf d. Naturwissenschaft; Einf. i. d. angew. Differenzenrechn.

Fribourg; *Université.* — BAYS: Calcul diff. et intégral (compléments); Equations différentielles; th. des fonctions. — X.: Géométrie analytique; calcul diff. et intégral; Exercices. — JOYE: Physique mathématique.

Genève; *Université.* — H. FEHR : Elem. de mathématiques sup.; Exerc. prat.; Conférences d'algèbre et de géométrie; Géométrie réglée; Sém. de géométrie, géométrie non-euclidienne. Colloque mathém. (avec MM. les prof. Mirimanoff et Wavre). — R. WAVRE : Calcul diff. et integral; Exerc. prat.; Mécanique rationnelle; Exerc. prat.; Calcul tensoreil. — D. MIRIMANOFF : Calcul des probabilités; Th. des équations diff. — R. GAUTIER : Astronomie générale. — A. SCHILDOF : Mécanique statistique et théorie des quanta. — Histoire et philosophie des sciences, conférences faites par MM. les prof. de la Faculté des sciences. — F. LEVY : Théorie de Galois. — G. TIERCY : Mécanique céleste, orbites planétaires.

Lausanne; *Université.* — G. DUMAS : Calcul diff. et intégral; Exerc.; Géométrie infinit. — M. (vacat.).: Th. des fonctions; Sém. math. — M. LACOMBE : Géom. descript., Epures; Géom. analyt.; Géom. de position. — B. MAYOR : Mécanique rationnelle; Physique mathém. — L. MAILLARD : Astronomie sphérique; Mathématiques générales; Mécanique; Exerc. — Ch. JACCOTTET: Chap. choisis d'Algèbre. — J. CHUARD : Questions de th. des nombres.

Neuchâtel, *Université.* — L.-G. DUPASQUIER : Calcul diff. et intégral Exerc.; Equations diff.; Fonctions ellipt.; Science actuarielle; Sém. mathém. — L. GABEREL : Géom. analyt. et infinit.; Géom. descript. — G. JUVET : Astronomie stellaire; Mécanique céleste; Exerc. — A. JAQUEROD. Mécanique rationnelle.

Zurich, *Université.* — R. Fueter : Einf. i. d. mathem. Behandl. d. Naturwiss. mit Uebgn.; Funktionnentheorie, Math. Seminar mit Prof. Speiser. — A. Speiser : Diff. u. Integralrechn.; höh. Geometrie, Analysis situs, Liniengeometrie. — M. Disteli : Darst. Geometrie; Zentralperspektive u. projekt. Geometrie. — Wolfer : Einl. i.d. Astronomie; Bahnbestimmungen im Sonnensystem. — Schrödinger : Analyt. Mechanik. — Amberg : Spezielle Didaktik des mathem. Unterrichts.

Zurich, *Ecole polytechnique fédérale, section normale.* — Hirsch : Höh. Mathematik, — Franel : Mathématiques supérieures. — Grossmann : Darstell. Geometrie. — Kolross : Géométrie descriptive. — Meissner : Mechanik der Kontinua. — Plancherel : Géométrie analyt.; Algèbre, 2; math. Sem. — Weyl: Vektoranalysis; Funktionentheorie; math. Sem. — Polya: Einf. in d. Analysis reeller Grössen; Zahlentheorie; mathem. Seminar. — Bæschlin : Vermessungskunde ; Bahnbestimmungen. — Amberg : Didaktik d. math. Unterrichts. — Marchand : Einf. i.d. Versicherungsmathematik.

Cours libres. — Beyel : Rechenschieber mit Uebgn., 1 ; Darst. Geometrie; Flächen 2. Grades. — Kienast : Lineare Diff. gleichgn.

BIBLIOGRAPHIE

P. Appell. — **Souvenirs d'un Alsacien** (1858-1922). — 1 vol. in-8° de 320 pages; 7 fr. 50, Payot, Paris, 1923.

Ce beau livre relève plus de l'œuvre littéraire que de l'œuvre scientifique, mais quelle précieuse littérature que l'autobiographie d'un grand savant ! Quelle belle leçon de psychologie on prend en lisant des pages émouvantes où l'homme livre son cœur en toute simplicité, alors qu'en étudiant les travaux d'un mathématicien on a parfois l'idée fort singulière, mais bien ancrée chez certains, que le génie d'abstraction des sciences exactes ne peut aller qu'avec un personnage aux allures abstraites en tous les domaines.

Les personnalités qui apparaissent ici sont celles de l'enfant qui prête naturellement des couleurs féeriques au pays natal, du fils qui compte s'honorer par le travail et répondre mieux ainsi à la chaude tendresse d'une mère, de l'opprimé qui se demande avec angoisse s'il échappera jamais à toutes les répercussions d'une inhumaine loi de conquête, du frère dont l'aîné laisse sa vie, lambeaux par lambeaux, dans une forteresse allemande, du citoyen qui a vécu toutes les terribles heures de la Grande Guerre, qui n'a jamais douté de la délivrance qu'elle promettait mais qui a dû s'incliner sur ses nombreuses misères et finalement ressentir, beaucoup plus qu'il n'était admissible, l'amertume d'une paix imparfaite n'apportant ni les garanties ni les réparations les plus légitimes et laissant, par contre, aux coupables, comme la diabolique satisfaction de pouvoir dire que leurs abominables méthodes n'étaient pas complètement vaincues.

De telles réalités ont permis la publication de grandes pages où la vérité, se suffisant à elle seule, n'a jamais eu besoin de recourir au moindre artifice romanesque.

Comme, malgré cela, on ne cessera sans doute point de se représenter M. Paul Appell sous les traits du géomètre et du professeur, il est bon d'ajouter que le livre nous fait assister aussi à la naissance des idées pour lesquelles il a toujours combattu. Il nous dépeint ses premières méfiances visant le baccalauréat et les fait dater de l'époque où simple candidat, il fut frappé du rôle joué dans l'examen par le hasard et les idées préconçues des examinateurs. Il nous introduit à l'Ecole Normale, temple où la vénération due aux maîtres n'a jamais été mise en question, où Briot, Bouquet et Darboux préparaient à l'Agrégation en paraissant en mépriser quelque peu le programme, où il osa à peine parler à Bouquet d'un travail de géométrie qui devait cependant faire une élégante Thèse de Doctorat. De tels sentiments sont parfaitement dans l'ordre et je trouve très normal de les avoir éprouvés à mon tour lorsque, jeune homme, il me fut donné d'approcher M. Appell.

D'autres pages ont trait aux amitiés avec Henri Poincaré et Emile Picard. Un autre ami à figure grandiose et plus particulièrement alsacienne, le colonel Picquart, apparaît aux heures troubles de l'affaire Dreyfus.

Mais la fin du livre est particulièrement poignante. C'est la récente guerre, la création du Secours National, le travail scientifique dont il importait de ne point montrer la cessation devant la menace de l'ennemi marchant sur la capitale, l'organisation pratique de laboratoires en vue de la défense. Les horreurs passées, un haut idéalisme survit; l'humanité, le règne du droit, la Société des Nations doivent cesser d'être d'insuffisantes formules. Et cependant, en 1923, la notion sacrée de la réparation des dommages de guerre n'apparaît pas comme moralement inéluctable à tout être humain de psychologie normale ! Ne sommes nous pas encore suffisamment loin de l'animalité ancestrale pour pouvoir connaître l'évolution féconde et paisible ? On peut en douter, à la lecture des journaux quotidiens, mais c'est justement pourquoi l'œuvre de M. Appell est belle et réconfortante puisquelle nous montre qu'un grand esprit, qui a jugé, de beaucoup plus près que d'autres, la barbarie, dans ses multiples formes, ne se refuse cependant point à croire au rôle souverain de la Justice et du Droit servis par la Science.

A. Buhl (Toulouse).

H. Beghin. — **Statique et Dynamique**. (Collection Armand Colin.) — 2 vol. in-16 de 200 pages avec figures, brochés, Fr. 5 le volume; Librairie Armand Colin, Paris.

La plupart des ouvrages de Mécanique français sont consacrés, soit à une étude théorique des principes et des équations de la Mécanique, soit à un exposé purement pratique des effets des forces.

L'ouvrage de M. Beghin a concilié les deux points de vue. Le sens du concret n'abandonne jamais l'auteur qui enveloppe de réalités les formules, et qui, inversément, dans chaque application pratique, sait discerner et faire comprendre le jeu et le rôle des lois.

C'est pourquoi ce livre, accessible à tous ceux qui ont abordé les éléments des mathématiques supérieures, rendra service aux étudiants des Facultés

et des grandes Ecoles, ainsi qu'aux ingénieurs qui se sont, dès le début, orientés vers les applications.

L'ouvrage comprend les quatre parties suivantes : Géométrie et cinématique des masses. — Lois de la mécanique. — Statique des systèmes. — Dynamique des systèmes.

Un très grand nombre d'exercices, choisis avec le plus grand soin parmi les machines et les appareils usuels, permet au lecteur d'apprendre à manier lui-même les théories de la mécanique.

L. Bieberbach. — **Theorie der Differentialgleichungen,** Vorlesungen aus dem Gesamtgebiet der gewöhnlcihen und der partiellen Differentialgleichungen. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete). — 1 vol. in-8° de 317 p., avec 19 figures, Fr. 14,—; J. Springer, Berlin.

Ce nouveau volume de la collection « Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften », où l'on retrouve les tendances et les qualités de précision et de rigueur qui caractérisent l'auteur du « Lehrbuch der Funktionentheorie », est consacré à la théorie des équations différentielles ordinaires et aux dérivées partielles. Le sujet est immense ; on comprend donc que bien des points, et des plus importants, comme par exemple la théorie de Sophus Lie, ont dû être laissés de côté. Un choix s'imposait, d'autant plus nécessaire, que le livre de M. Bieberbach s'adresse aux commençants et ne suppose, chez le lecteur, que la connaissance de ces éléments d'analyse que M. Bieberbach a si bien résumés dans ses trois « Leitfäden ». Il a fallu par conséquent consacrer une partie du volume aux méthodes élémentaires d'intégration, cette base de l'intégration formelle, que l'auteur expose du reste d'une manière originale, cherchant à mettre en évidence le vrai sens et la portée des transformations. Mais déjà dans le chapitre II il passe à l'étude directe des intégrales en s'appuyant sur la méthode des approximations successives, à laquelle il rattache plus loin celle de Cauchy-Lipschitz. Le problème fondamental se transforme et le sens du mot solution s'élargit. A côté de la solution quantitative, qui est fournie par la méthode de Picard, l'auteur cherche, en s'engageant dans la voie tracée par Poincaré, à obtenir la solution qualitative du problème. On sait avec quel succès les mathématiciens contemporains, et en particulier M. Bendixson, ont repris et continué les admirables recherches de Poincaré. C'est cette étude topologique des caractéristiques dans le voisinage d'un point singulier qui forme le sujet du chapitre III. L'auteur résume, en les complétant parfois, les beaux résultats obtenus dans cette voie par M. Bendixson dans le t. 24 des Acta Mathematica. C'est là sans contredit l'un des chapitres les plus intéressants et les plus suggestifs du livre.

Nous passons ensuite à l'étude de l'équation du premier ordre dans le domaine complexe, où à côté des théorèmes classiques de Briot et Bouquet et de MM. Picard et Painlevé, l'auteur mentionne les travaux curieux, moins connus, parce que plus récents, de M. Malmquist.

Telles sont les principales questions qui forment le sujet de la première partie (106 p.) du livre.

La seconde est consacrée aux équations différentielles du second ordre et, en particulier, aux équations linéaires du second ordre. Les sujets traités dans cette partie s'apparentent aux problèmes étudiés dans la première.

L'auteur commence par exposer les méthodes élémentaires d'intégration pour les équations du second ordre et le procédé des approximations successives; comme dans la première partie, il aborde ensuite l'étude topologique des caractéristiques en se bornant à des équations d'une forme particulière qui ont été étudiées par M. Birkhoff Ce chapitre, que l'on peut, dans une certaine mesure, rapprocher des recherches de M. Bendixson, est d'une lecture plus difficile. Mais si l'auteur s'est contenté de quelques aperçus, s'il n'a fait qu'effleurer un sujet qui intéresse particulièrement les analystes, c'est qu'il tenait surtout à diriger la curiosité du lecteur vers des problemes où l'Analysis situs est appelée certainement à jouer un rôle capital, et faire pressentir ainsi l'importance de cette discipline.

D'autres problèmes, classiques cette fois-ci, sont traités ensuite par M. Bieberbach, les uns se rattachant aux belles recherches de M. Picard sur les équations différentielles renfermant un paramètre arbitraire, d'autres à celles de Fuchs, et bien que l'auteur se borne aux équations linéaires du second ordre, ce qu'il en dit peut suffire pour aborder sans difficulté l'étude du cas général.

La troisième partie du livre est consacrée à la théorie des équations aux dérivées partielles que l'auteur esquisse à grands traits.

Il est à regretter que quelques errata se soient glissés dans l'excellent ouvrage de M. Bieberbach, mais un lecteur attentif les corrigera sans peine.

D. Mirimanoff (Genève).

Emile Borel et Robert Deltheil. — **Probabilités, Erreurs.** — 1 vol. in-16 de 200 pages et 10 figures. (Collection Armand Colin); 5 francs; Librairie Armand Colin, Paris, 1923.

Cet ouvrage, malgré son aspect réduit, aborde les principaux problèmes du Calcul des Probabilités. Il est même riche quant aux développements relatifs aux probabilités continues particulièrement étudiées par M. R. Deltheil.

Les principes généraux sont présentés, d'une manière remarquablement aisée, non pas en établissant immédiatement des théorèmes mais en résolvant tout de suite des problèmes où n'intervient que la notion de dénombrement. Les théorèmes s'imposent, dès lors, de manière absolument naturelle. La valeur probable ou la valeur moyenne suivent l'introduction de l'espérance mathématique.

La formule de Stirling remplace rapidement les factorielles de l'analyse combinatoire par des exponentielles plus maniables et nous voici, avec la loi des écarts, à la fonction $\Theta(\lambda)$ et à la courbe en cloche. Tout cela se lit comme un recueil de récréations mathématiques et cependant rien n'est omis pour faire juger de l'extrême importance du théorème de Jacques Bernouilli, de la loi des grands nombres, du principe fondamental ainsi formulé: *Dans une nombreuse série d'épreuves, l'événement favorable se produit avec une fréquence voisine de sa probabilité.* Il convient aussi de signaler ici d'ingénieuses discussions relatives aux cas où les épreuves sont partagées en plusieurs groupes, et où l'on peut conserver une même loi d'écart à condition d'avoir une *unité d'écart* variable.

Les probabilités continues apparaissent comme pouvant donner lieu aussi bien à d'élégantes formules de calcul intégral qu'à des constructions géométriques des plus esthétiques.

Signalons le problème du bâton brisé en trois morceaux favorables à la construction d'un triangle, le fameux problème de l'aiguille qui fait dépendre d'un jeu de hasard un π fort acceptable, les problèmes de cordes dans le cercle imaginés par J. Bertrand et qui sont repris et généralisés. Là encore, c'est tantôt l'amusement mathématique, tantôt l'aperçu profond sur le choix de la *probabilité élémentaire* où s'introduit, d'après Poincaré, une fonction arbitraire positive, ce qui n'empêche pas certains cas particulièrement intéressants de conduire à des résultats indépendants de la fonction arbitraire choisie.

Un chapitre sur les *Probabilités des Causes* termine la première partie de l'ouvrage. Nous serons bref sur les *Applications* constituant la deuxième partie. Elle portent sur les statistiques et leurs anomalies étudiées par Dormoy, Lexis, Pearson, ... Viennent ensuite les méthodes statistiques de la Physique moléculaire. Signalons la loi de Maxwell, l'équipartition de l'énergie, le principe de Carnot et l'interprétation de Boltzmann pour laquelle le système tend vers l'état de probabilité maximum. Après le mouvement brownien (Einstein, Perrin, ...) se place une rapide discussion des fluctuations qui, inappréciables dans les champs finis ordinaires, se révèlent cependant dans certains champs microscopiques.

Une troisième partie traite des *erreurs d'observation.* Tout naturellement il s'agit de la loi de Gauss d'après laquelle la probabilité, pour qu'une erreur soit comprise entre x et $x + dx$, s'exprime par une différentielle exponentielle à exposant quadratique. Il n'est pas absolument facile de la justifier de manière rigoureuse et les savantes discussions de Poincaré ont surtout montré qu'on pouvait s'en tenir à ce qui, auparavant, était la sécurité empirique. Quoiqu'il en soit, elle a un aboutissement des plus remarquables qui est la *méthode des moindres carrés.* Les auteurs ont illustré celle-ci d'exemples numériques. Si l'on ajoute que tous les chapitres du livre sont terminés par d'intéressants exercices, il est permis de dire que nous devons, à MM. Borel et Deltheil, une œuvre de portée d'autant plus grande qu'elle est partout écrite avec la plus captivante simplicité. A. Buhl (Toulouse).

E. Bortolotti. — **Lezioni di Geometria Analitica.** Volume Primo. — 1 vol. in-8° de 373 p.; 45 lires; Nicola Zanichelli, Bologne.

Ces « Lezioni » correspondent au cours de géométrie analytique que professe l'auteur à l'Université de Bologne. Elles débutent par une intéressante introduction historique comprenant une trentaine de pages et dans laquelle l'auteur fait ressortir les différentes étapes de la géométrie analytique depuis l'algèbre géométrique des anciens jusqu'aux développements modernes. M. Bortolotti insiste à juste titre sur l'importance qu'il y a à faire ressortir les idées directrices et rappelle l'opinion du savant géomètre Zeuthen qui dit que ceux qui veulent apprendre une science « ont moins besoin des résultats tout prêts et complets transmis par leurs prédécesseurs, que des pensées et des impulsions fécondes qu'ils ont reçues en même temps que les résultats ».

Dans ce premier volume, l'auteur fait l'étude du point, de la droite et du plan en géométrie à deux et à trois dimensions, puis il expose les propriétés des sections coniques. Il introduit dès le début les notions fondamentales relatives aux rapports anharmoniques, à l'homographie et à l'involution. Un Appendice est consacré aux propriétés projectives des formes fondamentales de seconde et de troisième espèce. H. F.

R. Bricard. — **Cinématique et mécanismes.** (Collection Armand Colin.) — 1 vol. in-16 de 212 pages avec 79 figures; Fr. 5.— broché; Librairie Armand Colin, Paris.

L'ouvrage de M. Bricard est une initiation, en deux cents pages, à l'étude de la Cinématique et des Mécanismes. L'exposé, d'une grande clarté et d'une simplicité remarquable, est accessible à tous ceux qui connaissent les premiers éléments de la géométrie et du calcul algébrique.

La moitié du livre est consacrée à l'étude des mécanismes : engrenages, cames, excentriques, systèmes articulés, faite à un point de vue très concret. Elle rendra les plus grands services à tous ceux qui doivent faire ensuite plus complètement de la mécanique appliquée.

Conférences faites au cinquième Congrès des Mathématiciens scandinaves tenu à Helsingfors du 4 au 7 juillet 1922. — 1 vol. gr. in-8° de 316 pages. Librairie Académique, Helsingfors, 1923.

Ceci est un magnifique volume qui ne contient guère que des Mémoires de premier ordre dont chacun mériterait une analyse. Je dois me borner, à regret, à mentionner les principaux titres parfois résumés, parfois accompagnés d'une très brève explication.

Hj. Mellin. *Asymptotische Reihen.* Rapports avec les fonctions hypergéométriques, la fonction Γ. Travaux de Cauchy, Dirichlet, Pincherle, ...

C. Juel. *Von Staudt's Geometrie der Lage.* Avec un très artistique portrait de Von Staudt.

Ivar Fredholm. *Sur une équation intégrale à noyau analytique.* Equation née du problème de Dirichlet mais cependant plus générale.

A. Wiman. *Ueber die Geometrie auf der zweiteiligen kubischen Fläche.*

Karl F. Sundman. *Ueber die Richtungslinien für fortgesetzte Untersuchungen in den Planet- und Trabanttheorien.*

Carl Störmer. *Aurores boréales.* Magnifiques planches phototypiques.

J. W. Lindeberg. *Ueber das Gauss'sche Fehlergesetz.* Perfectionnements amorcés par Tschebyscheff, Markoff, Liapounoff, ...

G. Mittag-Leffler. *Le théorème de Cauchy.* Réflexions sur la démonstration rigoureuse. Travaux E. Goursat.

Elis Strömgren. *Restricted and general Problem of three Bodies.* Nombreuses figures se rapportant à des trajectoires comparées avec des observations. Résumé très important.

Harald Bohr. *Diophantische Approximationen, Dirichlet'sche Reihen und Riemann'sche Zetafunktion.* Approximations ne visant que les chiffres décimaux des nombres à comparer.

H. A. Kramers. *Some main features of the modern theory of atomic structure.*

Richard Birkeland. *Sur la résolution des équations algébriques.* Fonctions hypergéométriques; généralisations de Thomae, Goursat; application à la résolution de $x^n = gx + \beta$.

Torsten Carleman. *Sur les fonctions quasi-analytiques.* Développements sur les travaux Borel et Denjoy.

Viggo Brun. *Das Sieb des Eratosthenes.* Curieux schème géométrique.

V. Walfrid Ekman. *On the Horizontal Circulation in the Sea.* Généralités analytiques sur les courants océaniques.

Th. Skolem. *Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der*

Mengenlehre. Discussion sur les antinomies fondamentales (Zermelo, Whitehead, etc.).

J. Malmquist. *Sur les équations différentielles à points critiques fixes.* Retour sur les travaux Painlevé, Chazy, Gambier, Garnier, Boutroux, ...

Rolf. Nevanlinna. *Poisson'sche Integral und Singularitäten analytischer Funktionen.* Relations entre les singularités et le mode de croissance. Travaux des frères Nevanlinna conduisant d'ailleurs au mémoire suivant.

Frithiof Nevanlinna. *Beziehungen zwischen dem Anwachsen einer analytischen Funktion und der Verteilung ihrer Nullstellen und Pole.*

P. J. Myrberg. *Singularitäten der automorphen Funktionen mehrerer Veränderlichen.* Travaux de Poincaré, Picard, Klein, G. Giraud. Groupes à multiplicité quadratique invariante; groupes de Cremona.

Mentionnons encore MM. Trygve Nagel, J.-F. Steffensen, Oystein Ore, Olaf M. Thalberg, Felix Iversen, E. Holmgren, Harald Cramer, auteurs d'écrits plus brefs que les précédents.

Presque partout les travaux des géomètres français sont largement mis à contribution; aussi ce nous est un plaisir particulier que de signaler ce recueil, de haute valeur, qui fait le plus grand honneur à la science scandinave et en lequel les géomètres de tous les pays trouveront les plus heureuses suggestions.

A. Buhl (Toulouse).

J. Geffroy. — **Traité pratique de géométrie descriptive.** (Collection Armand Colin). — 1 vol. in-16 de 188 pages avec 248 figures, Fr. 5.— broché; librairie Armand Colin, Paris.

L'ouvrage de M. Geffroy a été rédigé principalement en vue des applications pratiques.

Les éléments de la Géométrie descriptive sont exposés sous la forme simple et commode qui convient à tous ceux qui débutent dans son étude. Les applications pratiques sont empruntées à la taille des pierres ou stéréotomie et au trait de charpente.

Le lecteur peut donc allier l'étude théorique à celle de la pratique. Il se rend ainsi compte du but à atteindre et de l'utilité de la technique qu'il apprend.

C'est dire que ce livre s'adresse aussi bien aux débutants qui désirent s'initier aux méthodes qu'à ceux qui, connaissant déjà les premiers éléments, sont curieux ou ont besoin de savoir comment on les applique.

Les matières sont réparties comme suit : Notions préliminaires. — Le point, la droite, le plan. — Méthodes graphiques : changements de plans de projection; rabattements; rotations. — Problèmes relatifs aux distances et aux angles. — Conventions relatives à la visibilité, contour apparent d'un polyèdre. — Polyèdres, projection et intersection. — Applications pratiques. — Sujets d'épures.

Les figures et les épures, placées *dans le texte*, facilitent beaucoup la lecture de l'ouvrage.

E. W. Hobson. — **The Theory of Functions of a real Variable and the Theory of Fourier's Series.** Tome I, 2me édition. — 1 vol. gr. in-8°, XVI-671 p., relié 45 sh. The University Press, Cambridge, C. F. Clay, Londres, 1921.

Le grand traité de M. Hobson, dont la première édition a paru en 1907,

est devenu rapidement classique dans les pays de langue anglaise. Très apprécié ce ce côté du détroit, il ne tarda pas à prendre sa place au premier rang des ouvrages sur la théorie des fonctions de variables réelles. Pour beaucoup de géomètres il est le livre par excellence qu'on consulte et qui sert de guide. Je ne sais s'il en existe de plus complets et de meilleurs.

Rompant avec les traditions de Cambridge, ce qui lui valut quelques critiques, M. Hobson ne s'était pas borné à exposer ses recherches personnelles, si remarquables à tant d'égards. Il avait cherché à faire connaître, sur un sujet extrêmement vaste, les recherches faites sur le continent et à esquisser l'état actuel de la science.

Mais la production mathématique est aujourd'hui telle que l'œuvre la mieux documentée est destinée à vieillir rapidement. Depuis 1907 et sous l'influence des travaux des géomètres contemporains, la plupart des questions traitées par M. Hobson ont été reprises et des problèmes nouveaux posés et résolus. Il devenait utile de résumer et surtout de rapprocher ces recherches parfois disparates, de déterminer, dans la mesure du possible, la portée des nouvelles méthodes, tâche particulièrement difficile, car il ne s'agissait pas seulement de compléter et de remanier superficiellement; des chapitres entiers étaient à refaire.

Aussi l'auteur a-t-il cru utile de diviser la 2me édition de son traité en deux volumes. Le premier, qui vient de paraître, est consacré aux théories traitées presque exclusivement dans les cinq premiers chapitres de la 1re édition — et il en contient huit; c'est dire à quel point le champ s'est élargi dans l'édition nouvelle

Les sujets traités dans ce premier volume forment un domaine bien délimité. Les premiers chapitres sont consacrés à l'étude extrêmement intéressante des théories qui trouvent leur origine dans les travaux de Cantor et de Dedekind, cette base des mathématiques modernes. Mais des additions importantes ont été faites dans l'édition nouvelle, surtout dans le chapitre consacré aux propriétés métriques des ensembles de points, qui ont fait depuis 1907 l'objet de tant de profondes recherches. On y trouve des remarques fort intéressantes sur les antinomies cantoriennes et le fameux principe de Zermelo.

Mais c'est dans les chapitres suivants consacrés à l'étude des fonctions de variables réelles et à la notion d'intégrale que les changements introduits par M. Hobson ont été les plus considérables. L'auteur a cherché à exposer les découvertes les plus récentes, et l'on sait quels développements extraordinaires la pensée mathématique a reçus dans ce domaine, depuis les premiers travaux de M. Lebesgue.

L'étude de l'intégrale de Riemann, qui dans cette 2me édition a pris une ampleur beaucoup plus grande, a formé le sujet d'un chapitre spécial qu'on peut regarder comme une introduction à l'étude de l'intégrale de Lebesgue.

Pour avoir une idée du chemin parcouru depuis 1907, il suffit de comparer les derniers chapitres de l'édition nouvelle au chapitre V de la première (intégration). Nulle part peut être l'activité mathématique n'a été aussi féconde. A côté de l'intégrale de Lebesgue, à laquelle il n'avait consacré que quelques pages dans la première édition, M. Hobson étudie maintenant celles de Hellinger, de Harnack-Lebesgue, de Denjoy, sur lesquelles il s'étend longuement, enfin celles si remarquables de M. W. H. Young, et rien n'est plus curieux que de rapprocher entre elles ces conceptions en

apparence si diverses. M. Hobson compte du reste reprendre l'étude de ces questions, qui intéressent aujourd'hui particulièrement les mathématiciens, dans le 2me volume de son traité, qui sera consacré principalement à la théorie des suites de fonctions et à celle des séries trigonométriques.

Nous ne saurions assez recommander cette 2me édition aux lecteurs de *L'Enseignement Mathématique.* D. Mirimanoff (Genève).

Hurwitz-Courant. — **Funktionentheorie.** Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellung. Vorlesungen über *allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen*, hrsggb. u. ergänzt durch einen Abschnitt über *Geometrische Funktionentheorie.* — 1 vol. in-8° de 392 p. avec 122 fig.; broché. Fr. 15; J. Springer, Berlin.

Ecrit en caractères assez serrés, ce livre comprend trois parties. Les deux premières: la théorie générale des fonctions d'une variable complexe et les fonctions elliptiques ont été reconstituées par M. Courant d'après les manuscrits de Hurwitz.

La première, d'environ cent trente pages, est un exposé très minutieux de la partie élémentaire de la théorie des fonctions analytiques, exposé remarquable de soins et de rigueur, où semble dominer la préoccupation Weierstrassienne, de construire la théorie sur la série de puissance et en quelque sorte sur ces bases arithmétiques. Cette préoccupation est très satisfaisante au point de vue logique, bien qu'elle nous contraigne quelquefois à faire des détours.

La seconde, de cent douze pages, constitue une profonde étude des fonctions elliptiques. On y trouvera nombre de renseignements sur les fonctions theta, celles de Jacobi, les fonctions modulaires et les relations qui les relient.

M. Courant, par la publication de ce cours d'Hurwitz, rend un bel hommage à la mémoire du savant professeur de Zurich.

La troisième partie, cent cinquante pages environ, est de M. Courant. Elle est intitulée « Théorie géométrique des fonctions ». Ce titre paraîtra curieux et deux mots d'explications ne seront pas superflus. Il s'agit avant tout du problème de la représentation conforme, de l'œuvre de Riemann et de ses successeurs, de l'étude des fonctions analytiques définies par une propriété intrinsèque, étude où l'on supperpose le plan de la fonction au plan de la variable et où l'on porte son attention plutôt sur les lignes ou aires que décrivent variables et fonctions que sur le caractère de leur dépendance analytique.

Plusieurs pages sont consacrées à la surface de Riemann et à l'important problème de l'uniformisation de Poincaré.

En réunissant ainsi tout ce qui touche à cette théorie géométrique des fonctions, et ce titre n'a rien que de très naturel, M. Courant a, croyons-nous, comblé une grave lacune. Nous ne saurions faire ici le départ exact entre l'apport personnel, que nous croyons important, de l'auteur et celui de ses devanciers.

Cette dernière partie offre en plus l'intérêt de pouvoir être étudiée pour elle-même, sans qu'il soit nécessaire de se référer aux deux premières.

Ce livre est en tout point remarquable par la minutie qui va jusque dans les moindres détails de la rédaction. De nombreuses figures dans le texte en faciliteront la lecture ainsi qu'un ample index alphabétique.

Rolin Wavre (Genève).

G. Lambeck. — **Philosophische Propädeutik.** — 1 vol. in-8°, VIII-236 p., Teubner, Leipzig, 1919.

Cet ouvrage est dû à la collaboration de plusieurs auteurs et constitue, à l'usage des élèves débutants, une intéressante mise au point des principaux problèmes philosophiques. Une courte préface indique dans quel esprit il a été conçu.

L'ère des grands systèmes métaphysiques, dit-elle entre autres, semble être close; la philosophie cependant ne perd pas ses droits; elle doit, en s'inspirant de toutes les sciences, donner une vision de l'univers aussi cohérente que possible.

Quant à l'ordre des matières, le voici avec le nom des auteurs qui les ont traitées :

Mathématiques et physique: Goldbeck. — Biologie: M. Gruner. — Histoire : G. Lambeck. — Littérature allemande : P. Lorentz. — Eléments de philosophie ancienne : E. Hoffmann. — Psychologie, logique, etc. : A. Messer.

Une bibliographie sommaire mais intelligemment choisie accompagne chaque chapitre. Arnold Reymond (Neuchâtel).

W. Lietzmann. — **Methodik des mathematischen Unterrichts,** 2. durchgesehene und vermehrte Auflage, 2. Teil : *Didaktik der einzelnen Gebiete des mathematischen Unterrichts*, mit 8 Tafeln und 84 Fig. im Text. (Handbuch des naturwissenschaftlichen und mathematischen Unterrichts, VIII. Band). — 1 vol. in-8° de 367 p., Verlag von Quelle und Meyer, Leipzig.

Nous signalons cet ouvrage à l'attention des candidats à l'enseignement secondaire. Ils y trouveront des indications et des conseils fort utiles sur la méthodologie des différentes branches mathématiques, depuis l'enseignement des opérations d'arithmétique et la géométrie élémentaire jusqu'à celui des notions de dérivées d'intégrales. Dans ces différents domaines, l'auteur sait se borner à l'essentiel. Il expose avec beaucoup de compétence les objets qui lui paraissent devoir jouer un rôle fondamental dans l'enseignement secondaire.

Le volume de M. Lietzmann sera aussi consulté avec profit par tous ceux qui sont déjà dans la pratique de l'enseignement. Il les renseignera sur les tendances modernes et leur fournira des suggestions fort intéressantes, propres à réaliser des progrés au point de vue de la méthode qu'à celui des principes essentiels à mettre tout particulièrement en lumière dans un premier enseignement. L'ouvrage contient aussi de nombreux renseignements sur les moyens auxiliaires, appareils, instruments, etc, permettant d'éveiller l'attention des élèves et de rendre plus intuitive la première initiation aux différentes branches mathématiques.

On sait que M. Lietzmann a pris une part très active aux travaux de la sous-commission allemande de l'enseignement mathématique. Depuis 1919, il fait à l'Université de Gœttingue un cours de didactique mathématique combiné avec un séminaire pédagogique et une initiation pratique à l'Ecole Réale Supérieure. Son traité vient prendre place à côté des ouvrages classiques de Reidt, Simon, Höfler et les complète de la façon la plus heureuse.

H. Fehr.

H. Marais. — **Introduction géométrique à l'étude de la relativité.** — 1 vol. in-8° de 192 p. et 22 fig., Fr. 15.— ; Gauthier-Villars et Cie, Paris.

L'auteur s'est proposé de rédiger, sous une forme aussi simple et aussi claire que possible, et en se plaçant au point de vue géométrique, une sorte de grammaire du langage mathématique de la Relativité. Il étudie successivement les espaces euclidiens et les lois d'invariance pour les transformations linéaires, puis les espaces de Riemann et les lois d'invariance pour les transformations continues quelconques, en indiquant le rôle joué dans les théories relativistes par les notions géométriques ainsi expliquées.

Ce Livre, qui intéressera les mathématiciens et les physiciens rendra particulièrement service à tous ceux qui, possédant les éléments de l'analyse, désirent étudier les exposés spéciaux sur la Relativité. Il leur évitera d'être arrêtés dans cette étude par des difficultés purement formelles, en les familiarisant avec les conceptions fondamentales et les procédés de calcul des théories relativistes.

Ch. Maurain. — **Physique du globe** (Collection Armand Colin). — 1 vol. in-16 de 204 p. avec 21 fig., Fr. 5.—, broché ; Armand Colin, Paris.

Dans ce nouveau volume de la *Collection Armand Colin* M. Maurain expose d'une façon élémentaire les questions qui ont fait, ces dernières années, l'objet de son enseignement à la Sorbonne.

L'énoncé des matières traitées suffira d'ailleurs à montrer l'intérêt puissant et actuel de ce petit livre : Forme et constitution de l'écorce terrestre ; mouvements périodiques ou brusques de cette écorce ; sismologie ou étude des tremblements de terre ; magnétisme terrestre et ses relations avec les phénomènes cosmiques ; électricité atmosphérique.

Tous ces sujets se relient d'une manière attachante à d'importants problèmes de Physique, d'Astronomie, de Géologie et de Géographie physique ; c'est dire qu'ils présentent un intérêt général et de premier ordre.

F.-D. Murnaghan. — **Vector Analysis and the Theory of Relativity.** — 1 vol. in-8° de 125 p., 2 Doll. 75 : John's Hopkins Press, Baltimore, Mo.

On sait le rôle fondamental que jouent dans la théorie de la relativité le calcul tensoriel et le calcul différentiel absolu dûs aux travaux de Riemann, Christoffel, Ricci et Levi-Cività. Grâce à ces méthodes nouvelles les lois de la physique peuvent être examinées dans un système de référence absolument quelconque. Il y a donc un intérêt évident pour les physiciens à posséder ce nouvel instrument de calcul. C'est à eux que s'adresse plus particulièrement l'auteur. Son livre leur fournit une excellente initiation au calcul tensoriel, au calcul différentiel absolu et aux problèmes fondamentaux de la relativité. H. F.

S. Pincherle. — **Gli Elementi della Teoria delle Funzioni Analitiche.** (Parte Prima). — 1 vol. in-8° de 401 p. ; 45 lires ; Nicola Zanichelli, Bologne.

M. Pincherle, en publiant son cours de l'université de Bologne, a extrait de sa gangue ce joyau, la théorie des fonctions analytiques, qu'on ne se lassera de contempler avec une admiration toujours nouvelle, réunissant ainsi en quelque quatre cents pages ces chapitres classiques souvent dispersés dans de volumineux traités d'analyse.

Suivant une impression que l'auteur trahit dans sa préface, cette théorie nous incline à regarder, avec Hermite, la fonction comme une entité en soi, indépendante de l'acte d'imagination, indépendante même de l'esprit, du mathématicien qui la découvre. Cet exposé limpide met en pleine lumière « les admirables constructions dues au génie de Cauchy, de Riemann et de Weierstrass qui constituent un des chapitres les plus organiquement parfaits et les plus attrayants de l'analyse mathématique ». Le point de vue de Cauchy notamment nous paraît reprendre ici toute son envergure, bien que M. Pincherle réserve, pour la seconde partie, l'extension que M. Borel a donnée des idées de Cauchy en construisant des fonctions monogènes non analytiques. Nous sommes assez embarrassé de rendre compte des principaux chapitres de ce livre, disons simplement que les éléments de la théorie des fonctions analytiques et elliptiques y sont exposés avec une remarquable clarté didactique, que l'auteur semble avoir eu le soucis de donner toujours les démonstrations les plus simples possible; c'est ainsi qu'il tire très habilement parti du théorème de Morera, réciproque d'une des propositions fondamentales de Cauchy.

M. Pincherle poursuit par place son exposé jusqu'aux résultats plus spéciaux, tels, les théorèmes de Schottky et de Landau sur les fonctions qui admettent des valeurs exceptionnelles. Son chapitre sur la théorie des fonctions génératrices et des fonctions déterminantes nous paraît être une première allusion à l'étude des opérations linéraires appliquées aux fonctions analytiques, théorie où l'auteur fait autorité. Nous souhaitons avec lui et bien vivement que ses forces lui permettent de développer ce point de vue dans sa seconde partie. Rolin Wavre (Genève).

Poradnik dla Samoukov T. III, **Matematyka. Uzupelnienia do tome Pierwszego.** — Guide des autodidactes, T, III, Indications méthodiques sur toutes les branches des connaissances, à l'usage des autodidactes. *Mathématiques*, Suppléments du Tome I (en polonais). — 1 vol. in-8° de VIII-188 p., publié par A. Heflich et S. Michalski, subventionné par la « Caisse J. Mianowski », société d'encouragement aux travaux scientifiques, rue N. Swiat, 72, Varsovie, 923.

Les lecteurs de l'*Enseignement mathèmatique* connaissent déjà le plan général et le but du « Guide des Autodidactes » (voir tome XXI, p. 69). Nous nous bornerons donc à rendre compte brièvement du volume actuel. Il est consacré aux sciences mathématiques et constitue un supplément au tome I consacré aux mêmes sciences. Il contient, en dehors de quelques indications bibliographiques rendues nécessaires par la publication d'ouvrages nouveaux, des articles d'un caractère philosophique destinés à faciliter au lecteur l'œuvre de coordination des connaissances déjà acquises et à mettre en évidence le caractère propre ainsi que la portée des diverses branches des Sciences mathématiques. La série d'articles débute par un mémoire de M. Mazurkiewicz sur la structure générale des sciences mathématiques. Viennent ensuite deux articles de M. Sleszynshi, dont l'un traite de l'importance de la logique en mathématiques et l'autre de l'évolution historique de l'analyse infinitésimale. Ces articles sont suivis : d'un article de M. Mazurkiewicz sur les rapports entre la théorie des ensembles et les autres théories mathématiques, d'un article de M Zorawski sur les rapports mutuels de la physique et de la mathématique.

Louis Roy. — **L'Electrodynamique des milieux isotropes en repos,** d'après Helmholtz et Duhem. — 1 vol. in-8° de 94 pages (Collection *Scientia*); 10 francs; Gauthier-Villars et C[ie], Paris, 1923.

Cet ouvrage, dédié à la mémoire de Pierre Duhem, étudie profondément les théories de Helmholtz-Duhem, son but étant d'établir que celles-ci peuvent rigoureusement conduire aux équations de Maxwell, sans que l'on ait à accepter ces contradictions dont Henri Poincaré proposait « de prendre son parti » et que certains théoriciens avaient fini par trouver « suggestives ».

Il semble bien que Duhem ait eu en vue une telle conclusion et que la mort seule l'ait empêché d'y parvenir d'une manière définitive. M. Louis Roy, qui s'honore à juste titre en s'inspirant d'un tel maître, a donc repris une question dont personne ne niait l'extrême importance, mais qui effrayait bien des physiciens par la complexité de l'appareil analytique. Cet appareil a toujours été remarquablement symétrique et des théories contradictoires ont eu en commun l'esthétique des procédés mathématiques, mais M. Roy semble avoir encore perfectionné les choses et, si l'encombrement typographique n'était à craindre ici, nous reproduirions volontiers ses principales formules pour qu'on puisse juger de l'élégance qu'elles offrent au premier aspect. Le lecteur est tout de suite favorablement prévenu en faveur de développements se présentant sous une telle forme.

On est d'ailleurs en présence d'un enchaînement serré, d'où il est difficile de faire saillir des choses se prêtant à une discussion brève. L'ouvrage commence par un rappel des notions les plus fondamentales sur les aimants, les courants, les diélectriques, etc. Parmi les points les plus originaux, il semble cependant qu'il faille signaler ce qui concerne l'énergie interne d'un système isotrope électrisé et aimanté. On trouve là une généralisation du théorème de Vaschy sur la nullité de l'énergie électromagnétique. Les lois de l'aimantation donnent ensuite, en faisant simplement intervenir les dérivées de l'induction, une équation fondamentale postulée par Maxwell, mais qui était parfaitement susceptible de démonstration.

Pour la force électromotrice induite par un feuillet dans un contour, nous trouvons de même une extension logique dont Maxwell faisait une hypothèse.

La relation entre la vitesse de la lumière et les constantes des actions électrostatique et électrodynamique est rétablie sous une forme qui évite toute contradiction d'homogénéité. Enfin une autre constante fondamentale d'Helmholtz est nécessairement nulle, ce qui cadre avec la non-existence de perturbations longitudinales, tout en ne provenant que des propriétés les plus simples du potentiel électrique. Dès lors, la théorie de Maxwell perd son caractère quasi-divinatoire sans, bien entendu, perdre son importance et ce au jour des méthodes d'Helmholtz et de Duhem si ingénieusement rapprochées d'elle par M. Roy. Certes l'ère des discussions n'est probablement pas close. Il y a encore chez certains de singuliers préjugés — nous n'osons dire des erreurs — du côté de la question des unités électriques. D'autre part la théorie relativiste persiste à voir dans les équations de Maxwell l'équivalent de postulats analytico-géométriques. Mais il est incontestable que, dans le domaine si nettement délimité ici, nous possédons maintenant une clarté et une logique que beaucoup de constructions pourraient envier.

A. Buhl (Toulouse).

D. E. Smith. — **Mathematics,** Introduction by Sir Thomas Little Heath. (Our Debt to Greece and Rome, No. 39). — 1 vol. in-8° de 175 p., Marshall Jones Company, Boston.

Mettre en lumière ce que nous devons à la Grèce et à la Rome antiques dans tous les domaines de la connaissance humaine, tel est le but de la Collection « Our Debt to Greece and Rome », qui comprend actuellement 50 volumes. Dans chaque domaine, on a eu recours au spécialiste le mieux qualifié. C'est M. David Eugène Smith, professeur au Teachers College de la Columbia University (New-York) qui a été chargé du volume consacré aux mathématiques.

L'auteur jette d'abord un coup d'œil d'ensemble sur les contributions de l'Antiquité dans le domaine des mathématiques, puis il examine en détail les différentes branches. Dans une troisième partie, il montre quelle a été l'influence des géomètres et philosophes de l'Antiquité sur le développement des mathématiques modernes.

L'Ouvrage débute par une Introduction rédigée par Sir Thomas Little Heath.

H. Fehr.

A. N. Whitehead. — **The concept of Nature.** — 1 vol. in-8°, 202 p., 14 sh., Cambridge University Press, C. F. Clay, Londres, 1920.

En 1919 M. Whitehead, l'on s'en souvient, avait consacré au problème de la Relativité une étude originale et suggestive que nous avons analysée ici même et qui portait le titre suivant: « An enquiry concerning the principles of natural knowledge ». Les questions qu'il traitait alors sont reprises en partie dans l'ouvrage qu'il vient de publier; mais elles sont dépouillées de tout algorithme mathématique et leur portée philosophique est accentuée. En voici du reste l'énoncé: la nature et la pensée, la bifurcation de la nature, le temps, l'abstraction extensive, l'espace et le mouvement, la congruence, les objets, les concepts ultimes de la physique.

M. Whitehead nous déclare dans sa préface que ses vues sont restées les mêmes et il caractérise comme suit sa position vis-à-vis d'Einstein. « J'ai adopté, dit-il, la méthode tensorielle inaugurée en physique par Einstein mais en partant d'autres suppositions que lui et par mes méthodes j'obtiens tous les résultats qui ont été vérifiés par l'expérience. L'unique point de divergence réside dans le fait que je n'accepte pas les théories d'Einstein concernant un espace non-uniforme et le caractère particulièrement fondamental des signaux-lumière. Je n'entends pas par là diminuer en quoi que ce soit la valeur de son récent ouvrage sur la relativité générale. Cet ouvrage a l'immense mérite de révéler pour la première fois le chemin dans lequel la physique mathématique doit s'avancer à la lumière du principe de relativité. Mais selon moi il gêne le développement d'une brillante méthode mathématique en l'enfermant dans les limites d'une philosophie douteuse. »

Arnold Reymond (Université de Neuchâtel).

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

1. Livres nouveaux :

Tous les ouvrages adressés à la Rédaction sont signalés ici avec une brève indication de leur contenu, sans préjudice de l'analyse dont ils peuvent être ultérieurement l'objet sous la rubrique « Bibliographie ».

E. Bally. — **Principes et premiers développements de Géométrie générale synthétique moderne.** — 1 vol. in-8° de 218 pages avec figures, Fr. 20.—; Gauthier-Villars et Cie, Paris.

Après un chapitre préliminaire intitulé : Eléments d'arithmétique ordinale, l'auteur expose les notions fondamentales de la Géométrie générale synthétique moderne, puis il les applique à l'étude de l'hexangle pascalien.

W. Blaschke. — **Vorlesungen über Differentialgeometrie** und geometrische Grundlagen von Einsteins Relativitätstheorie, II. Affine Differentialgeometrie bearbeitet von Kurt Reidemeister. Erste und zweite Auflage (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen. Band VII). — 1 vol. in-4° de 259 p. et 40 fig., Fr. 10.50 broché; Julius Springer, Berlin.

Dans ce tome II de son traité de Géométrie infinitésimale l'auteur s'attache particulièrement aux propriétés des figures qui restent invariantes par rapport aux transformations affines. Les méthodes qu'il introduit dans l'étude de la Géométrie supérieure ouvrent des voies nouvelles aux recherches dans ce domaine.

N. Bohr. — **Les spectres et la structure de l'atome.** Trois conférences. Traduit sur le manuscrit de l'Auteur par A. Corvisy. — 1 vol. in-8° de 152 p. avec 6 fig., Fr. 8.—; Librairie Scientifique J. Hermann, Paris.

Ce volume contient la traduction française de trois conférences de M. Bohr, professeur à l'Université de Copenhague, ayant pour objet l'application de la théorie des quanta aux problèmes de la structure atomique et donnant l'expression de cette théorie à différents stades de son développement.

Lt-Col. Corps. — **La simultanéité générale et le temps universel.** — 1 broch. in-4° de 20 p., Fr. 2,50; Gauthier-Villars et Cie, Paris.

Cet Opuscule est le complément de l'Ouvrage précédent : *Les théories de la Relativité dépassant les données de l'expérience*, où l'auteur s'était proposé de démontrer que le principe de la Relativité et celui de la Constance

absolue de la vitesse de la lumière n'étaient pas des conséquences nécessaires des résultats de l'expérience de Michelson et Morley. Dans cette nouvelle brochure il cherche à établir que les mêmes principes, appliqués à l'étude du mouvement relatif circulaire uniforme de deux systèmes linéaires conduisent à des résultats incompatibles avec toute réalité physique.

G. Cuny. — **Un théorème de géométrie et ses applications.** — 1 vol. in-8° de 102 p. avec figures, Fr. 8.— ; Librairie Vuibert, Paris.

L'auteur rappelle d'abord dans un premier chapitre quelques propriétés des rapports anharmoniques et des transformations par polaires réciproques et par inversion. Un second chapitre est consacré à l'exposé du théorème et de quelquesunes de ses conséquences générales.

Dans un troisième chapitre, il étudie les coniques, dont le théorème général lui permet de retrouver d'une façon très simple presque toutes les propriétés. Il passe ensuite à l'application du théorème général aux cubiques et aux quartiques. Dans un dernier chapitre il donne l'extension du théorème général à l'espace et quelques applications relatives aux surfaces du second degré.

E. Czuber. — **Die philosophischen Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung** (Wissenschaft und Hypothese), Band XXIV. — 1 vol. in-8° de 343 p., Fr. 12.— ; B. G. Teubner, Leipzig.

Dans cet ouvrage l'auteur s'attache à mettre en valeur les bases philosophiques du Calcul des probabilités. Il estime que l'étude mathématique doit insister plus que par le passé sur le côté philosophique des problèmes fondamentaux et tenir compte des progrès réalisés dans ce domaine.

Eudoxe. — **Géométrie pure et géométrie descriptive.** — 1 fasc. de 32 p. in-8°, Fr. 2.— ; Librairie Scientifique Blanchard, Paris.

Etude de quelques-unes des constructions de la Géométrie descriptive que l'on peut obtenir par la Géométrie pure.

Sections planes d'une sphère. — Paraboloïde hyperbolique : génératrices, contour apparent, intersection avec une droite. — Hyperboloïde de révolution : ombre, contour apparent. — Quadrique de révolution engendrée par une conique donnée. — Tangentes en un point double de l'intersection de deux cônes.

F.-E. Fournier. — **Carènes** de formes nuisibles ou favorables à leurs grandes vitesses et résistances de l'eau à leur translation. — 1 broch. de 32 p. avec 5 fig. Fr. 3,50 ; Gauthier-Villars et C[ie], Paris.

L'auteur établit une classification générale des Carènes des navires de mer, de tous tonnages, y compris les submersibles, en deux catégories bien distinctes, selon que leurs formes usuelles, mais sous parties cylindres et à étrave droite, sont nuisibles ou favorables à leurs grandes vitesses, dépassant une valeur critique w dont il donne l'expression.

G. Fournier. — **La Relativité vraie et la Gravitation universelle.** — 1 vol. in-8° de 132 pages, Fr. 7.— ; Gauthier-Villars et C[ie], Paris.

Etude critique de la théorie relativiste accompagnée de vues personnelles de l'auteur. L'ouvrage comprend les chapitres suivants : Les principes de la

science et les mathématiques. — La force, la matière et la mécanique rationnelle. — Les théories relativistes et la relativité vraie. — Les champs d'influences et la propagation des actions. — La gravitation universelle.

« On peut comparer, écrit l'auteur, p. 102, la manière de voir des Relativistes à celle des Cubistes, qui ont parfois tenté aussi de « géométriser » la Peinture, et qui, dans leur effort de rénovation de cet art, se sont souvent laissé emporter trop loin du sens commun. »

V. Happach. — **Ausgleichungsrechnung** nach der Methode der kleinsten Quadrate. — (Teubners technische Leitfäden, Band 18). — 1 vol. in-8° de 74 pages avec 7 figures; Fr. 1,90; B.-G. Teubner, Leipzig.

Exposé élémentaire de la théorie des erreurs et de la méthode des moindres carrés, à l'usage de l'ingénieur et du physicien. Tenant compte des besoins de la pratique l'auteur a accompagné son texte de nombreux exemples numériques empruntés aux différents domaines des sciences techniques.

H. W.-E. Jung. — **Einführung in die Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen.** — 1 vol. in-8° de 246 p. avec 35 fig.; Fr. 7; Walter de Gruyter et C°, Berlin.

L'auteur examine d'une manière approfondie les notions fondamentales qui forment la base de la théorie des fonctions algébriques d'une variable.

B. Kerst. — **Ebene Geometrie.** (Mathematisch- physikalische Bibliothek, Band 10). — 1 vol. in-16 de 36 p. avec 60 fig. et 3 tables; Fr. 0,90; B.-G. Teubner, Leipzig.

Premières notions de géométrie plane comprenant, sous une forme très condensée, les propriétés élémentaires relatives au triangle, au quadrilatère, à la circonférence de cercle, la similitude et les problèmes métriques qui s'y rattachent.

P. Kichberger. — **Atom- und Quantentheorie.** I. Atomtheorie; II. Quantentheorie (Mathematisch- physikalische Bibliothek, Band 44 u. 45). — 2 vol. in-16 de 49 et 52 p. et 5 et 11 fig.; Fr. 0,90 le volume; B.-G. Teubner, Leipzig.

La collection de monographie que la maison Teubner publie sous le titre « Mathematisch-physikalische Bibliothek » vient de s'enrichir de deux petits volumes consacrés l'un à la théorie des atomes, l'autre à la théorie des quanta. Sous une forme à la fois claire et condensée l'auteur donne une première initiation à ces théories modernes et les met à la portée des élèves de l'enseignement secondaire supérieur et des étudiants de première année des universités.

H. Liebmann. — **Nichteuklidische Geometrie.** — 1 vol. in-8° de 148 p. avec 40 figures, 3me édition revue et complétée, Fr. 6. —; Walter de Gruyter et C°, Berlin.

Ces Eléments de Géométrie non-euclidienne sont suffisamment connus pour qu'il nous suffise d'annoncer ici que l'ouvrage de M. Liebmann vient de paraître en 3me édition, revue et complétée.

R. Marcolongo. — **Relatività.** Seconda edizione riveduta ed ampliata. (Biblioteca di matematiche superiori). — 1 vol. in-8° de 235 p., 30 l. G. Principato, Messine.

Deuxième édition, revue et complétée, du Traité sur la théorie de la relativité rédigé par M. Marcolongo, professeur à l'Université de Naples (Voir le compte rendu de la 1re édition dans l'*Ens. math.* t. XXII, p. 231-232).

H. Onnen sen. — **Kreisevolventen und ganze algebraische Funktionen.** (Mathematisch Physikalische Bibliothek Band 51). — 1 vol. in-16 de 49 p., 15 figures; Fr. 1,90; B.-G. Teubner, Leipzig.

L'auteur se propose de préparer l'étudiant à l'étude des fonctions entières à coefficients réels en partant de la développante de cercle. La méthode suivie offre un grand intérêt et donne lieu à des problèmes dont l'étude sera d'un grand profit pour les étudiants en mathématiques.

G. Prasad. — **Mathematische Forschung in den letzten 20 Jahren.** Discours prononcé le 31 janvier 1921 à la Société Mathématique de Bénarès (Texte anglais et texte allemand, en vente séparément). — 1 vol. in-8° de 37 p., Fr. 0,80, Walter de Gruyter et C°, Berlin.

Quatre conférences sur les récents progrès des mathématiques: 1. Equations intégrales. — 2. Les fondements de la physique mathématique. — 3. Généralisation de la notion de convergence des séries. — 4. Développement du principe de relativité.

Ricci et Levi-Civita. — **Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications.** Réimpression. (Collection de monographies scientifiques étrangères). — 1 vol. din-8° de 201 p., Fr. 9.—; Librairie Scientifique Albert Blanchard, Paris.

Le Mémoire fondamental de MM. Ricci et Levi-Civita « Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications » a paru pour la première fois, imprimé en français dans les « Mathematische Annalen », t. 54, 1900. Ce Mémoire forme la base même des développements mathématiques de la théorie d'Einstein. Il y avait un intérêt réel à le réimprimer sous forme de brochure.

H. von Sanden. — **Praktische Analysis** (Handbuch der angewandten Mathematik hersgg. von H. E. Timerding Band I) 2. Auflage. — 1 vol. in-8° de 192 p. avec 32 fig., Fr. 6.—, broché; B.-G. Teubner, Leipzig.

Deuxième édition du t. I de la Collection des Monographies de Mathématiques appliquées fondée par M. Timerding. Dans ce volume se trouvent réunies les principales méthodes pratiques utiles à l'ingénieur dans la résolution des problèmes numériques : méthodes graphiques; règle à calcul; machines à calculer; résolution des équations; interpolation; procédés mécaniques ; différentiation ; intégration numérique et intégration graphique.

L. Schrutka. — **Zahlenrechnen** (Sammlung Mathematisch-Physikalischer Lehrbücher, 20). — 1 vol. in-8° de 146 p., Fr. 4,50, broché; B.-G. Teubner, Leipzig.

Cet ouvrage donne un exposé très complet du calcul numérique et des

procédés pratiques en usage dans les mathématiques appliquées. Complément utile aux cours de mathématiques générales destinés aux physiciens et aux ingénieurs, il sera aussi étudié avec profit par les étudiants en mathématiques.

H. Schubert. — **Arithmetik nebst Gleichungen 1. und 2. Grades.** Dritte Auflage, neubearbeitet von Prof. P.-B. Fischer. (Sammlung Göschen Nro. 47). — 1 vol. in-16, 132 p., avec 5 fig., Fr. 1.25; Walter de Gruyter et C°, Berlin.

La nouvelle édition des premiers éléments d'algèbre de la Collection Gœschen comprendra deux volumes. Dans ce premier volume M. Fischer se borne à l'étude des sept opérations fondamentales, aux équations du 1er et du 2me degré, aux progressions et à l'analyse combinatoire.

L. Silberstein. — **Eléments de la Théorie Electromagnétique de la lumière,** traduit de l'anglais par G. Matisse. — 1 vol. in-8° de IV-94 pages, Fr. 6.—; Gauthier-Villars et Cie, Paris.

L'auteur présente dans ce petit volume un exposé simple et complet de la théorie de la lumière de Maxwell.

Dans l'intérêt des lecteurs français non familiarisés avec le calcul vectoriel ou qui étudient, pour la première fois, la Théorie électromagnétique de la lumière, le traducteur a ajouté quelques notes et références. Les notes contiennent le développement de certains calculs omis par l'auteur; les références renvoient le lecteur aux *Eléments d'Algèbre vectorielle et d'Analyse vectorielle* de L. Silberstein (Paris, Gauthier-Villars et Cie, édit.), où se trouvent établies les formules dont il est fait usage.

A. Speiser. — **Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung.** (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Band V). — 1 vol. in-8° de 194 p., Fr. 8.—; Julius Springer, Berlin.

Cet ouvrage vient prendre place à côté des traités classiques sur la théorie des groupes. L'auteur présente la théorie des groupes finis mise en harmonie avec les travaux les plus récents. Une large place est accordée aux applications à l'algèbre, à la théorie des nombres et à la cristallographie.

H. Strasser. — **Einsteins spezielle Relativitätstheorie** eine Komödie der Irrungen. — 1 vol. in-8° de 59 p., 2 fr., Ernst Bircher Aktiengesellschaft, Bern.

Etude critique de la théorie de la relativité. L'auteur cherche à montrer que cette théorie repose sur des erreurs.

A. W. Wassilief. — **Espace, temps, mouvement.** Introduction historique à la théorie de la relativité générale (Bibliothèque de vulgarisation scientifique), en russe. — 1 vol. in-8° de 150 p. avec 4 portraits; Argonauten-Verlag, Berlin.

Excellent aperçu historique sur l'évolution des notions d'espace, de temps et de mouvement depuis Pythagore jusqu'à Einstein. L'ouvrage est divisé en six chapitres; de Pythagore à Newton; la mécanique classique de Newton; la géométrie non-euclidienne; relativité restreinte; relativité générale; importance philosophique de la théorie de la relativité.

H. Weyl. — **Mathematische Analyse des Raumproblems**, Vorlesungen gehalten in Barcelone und Madrid. — 1 vol. in-8° de 117 p. avec 8 fig., Fr. 6.—; Julius Springer, Berlin.

Cette monographie vient compléter d'une façon heureuse l'ouvrage « Raum, Zeit, Materie » (5e Edit., Springer, Berlin, 1923) du même auteur et dont une traduction française « Espace, temps, matière » a paru chez Blanchard, à Paris. Elle reproduit, avec de nombreuses additions, les conférences sur le problème de l'espace faites par M. Weyl, au printemps 1922, à Barcelone et à Madrid.

L'auteur envisage d'abord le problème au point de vue de la géométrie infinitésimale, puis à celui de la théorie des groupes.

Fr.-A. Willers. — **Numerische Integration.** (Sammlung Göschen). — 1 vol. in-16 de 115 p. avec 2 fig. Fr. 1,25, Vereinigung wissenschaftlicher Verleger, Walter de Gruyter et C°, Berlin.

Ce nouveau volume de la collection Gœschen est consacré à l'intégration numérique; il complète celui qui a pour objet l'intégration graphique. L'auteur présente les principales méthodes qui interviennent dans la pratique de l'intégration numérique, telle qu'elle se présente aux physiciens et aux ingénieurs. Il les accompagne de nombreux exemples.

The Reorganization of Mathematics in Secondary Education. A Report by the National Committee on Mathematical Requirements under the auspices of the Mathematical Association of America. — 1 vol. in-8° de 652 p.; 1923.

Rapports sur le mouvement de réforme dans l'enseignement mathématique aux Etats-Unis publiés par une Commission sous les auspices de l'Association mathématique américiane avec l'appui financier du « General Education Board of New York City ». (Voir plus haut, p. 98-99.)

2. Publications périodiques :

Annali di mathematica pura ed applicata. Serie III, Tome XXXI. — Rosati: Nuove ricerche sulle corrispondenze algebriche fra i punti di una curva algebrica. — Bompiani: Determinazione delle ipersuperficie che ammettono rappresentazioni geodetiche. — Vergerio: Sulle equazioni integrali non lineari. — Bedarida: Sopra due teoremi di Dirichlet. — Stampinato: Intorno alle involuzioni situate sopra le superficie iperellittiche con due fasci di curve ellittiche. — Amato: I gobbo-circolanti e i divisori di zero di un particolare sistema di numeri complessi ad n unità. — Sannia: Riavvicinamento di geometrie differenziali delle superficie: metriche, affine, proiettiva. — Cech: L'intorno d'un punto d'una superficie considerato dal punto di vista projettivo. — Abramescu: Sulle serie di polinomi di una variabile complessa. Le serie di Darboux. — Cech: I fondamenti della geometria proiettivo-differenziale secondo il metodo di Fubini. — Usai: Sull'indipendenza di un integrale dai paramentri nel caso più generale.

Bulletin des Sciences mathématiques. Tome XLVI. — A. Comessati: Sur la classification des courbes algébriques. — A. Bloch: Sur les inté-

grales de Fresnel. — H. Lebesgue: A propos d'une nouvelle revue mathématique: Fundamenta mathematicae. — G. Julia: Remarques sur le théorème de Jacobi relatif aux périodes des fonctions uniformes et sur la projection des réseaux de l'espace. — Id.: Remarques sur les mouvements relatifs à la surface de la terre. — J. Villey: A propos de quelques livres sur la théorie de la relativité. — M. D'Ocagne: Vue d'ensemble sur les machines à calculer. — H. Mineur: Sur les fonctions qui admettent un théorème d'addition algébrique. — P. Fatou: Sur l'itération de certaines fonctions algébriques. — G. Koenigs: Sur un invariant cinématique et le théorème de la composition des vitesses. — G. Valiron: Sur un théorème de M. Fatou. — H. Lebesgue: L'œuvre mathématique de Georges Humbert; quelques mots sur Camille Jordan. — Et. Delassus: Stabilité de l'équilibre sur une liaison finie unilatérale. — Auric: Sur le choix du radian comme unité d'angle. — P. Montel: Sur les fonctions entières de genre fini. — G. Bertrand: La loi électrodynamique de Riemann. La périhélie de Mercure et la déviation des rayons lumineux. — H. Mineur: Sur la démonstration des lois de la mécanique, d'après la théorie d'Einstein. — Et. Delassus: Les chaînes articulées fermées et déformables à quatre membres. — C. Maltezos: La clepsydre chez les anciens. — E. Cartan: Sur les petites oscillations d'une masse fluide. — E. Goursat: Sur quelques transformations d'équations aux dérivées partielles. — E. Picard: Deux leçons sur certaines équations fonctionnelles et la géométrie non-euclidienne. — G. Valiron: Le théorème de Laguerre-Borel dans la théorie des fonctions entières.

Bulletin de la Société française de Philosophie. — 22me année, N° 3. — *La théorie de la relativité*, Séance du 6 avril 1922. Réception de M. Einstein; Discussion: MM. J. Bequerel, Bergson, Brunschvicg, Cartan, Einstein, Hadamard, Langevin, Le Roy, Xavier Léon, Paul Lévy, Meyerson, Painlevé, Perrin, Piéron.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, herausgegeben von L. Lichtenstein. — Band 46. Jahrgang, 1916-1918, Hefte 1 u. 2. — 1. Geschichte, Philosophie und Pädagogik. 2. Arithmetik. 3. Mengenlehre. 4. Analysis. 5. Geometrie.

Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. — 31. Band. — Ziele und Aufgaben des Jahresberichtes der Deutschen Mathematiker-Vereinigung im neuen Jahrgang. — L. Bieberbach: David Hilbert zum sechzigsten Geburtstag am 23. Januar 1922. — P. Bernays: Ueber Hilberts Gedanken zur Grundlegung der Arithmetik. — W. Suss: Ueber Endlichgleichheit im Raum. — C. Siegel: Additive Zahlentheorie in Zahlkörpern. — C. Runge: Vektoranalytische Behandlung der Geometrie und Mechanik. — H. Reissner: Stationärer Bewegungszustand einer schraubenförmigen Wirbelfläche. — Fr. Meyer: Ergänzungen zur Elementarmathematik. — H. Weyl: Die Relativitätstheorie aus der Naturvorscherversammlung in Bad Nauheim. — W. Blaschke und K. Reidemeister: Ueber die Entwicklung der Affingeometrie. — Auszug aus einem Briefe von A. Ostrowski an L. Bieberbach. — G. Szegö: Ueber das Maximum einer quadratischen Form von unendlich vielen Veränderlichen. — F. Severi: Alexander von Brill zum achtzigsten Geburtstag am 20. September 1922. —

A. Schoenflies: Zur Erinnerung an Georg Cantor. — G. Polya: Arithmetische Eigenschaften und analytischer Charakter. — R. Haussner: Ueber die Stäckelschen Lückenzahlen und den Goldbachschen Satz. — M. Fekete und Neumann: Ueber die Lage der Nullstellen gewisser Minimumpolynome. — R. Rothe: Bericht über die Ausbildung der Oberlehrer in Mathematik und Naturwissenschaften an den Technischen Hochschulen Preussens. — F. Bernstein und G. Doetsch: Ueber die Integralgleichung der elliptischen Thetafunktion. — P. Hertz: Ueber die Axiomensysteme kleinster Satzzahl für ein System von Sätzen und den Begriff des idealen Elementes. — K. Mack: Ueber meinen Perspektographen. — L. Berwald: Zur Geometrie einer n-dimensionalen Riemannschen Mannigfaltigkeit im $(n+1)$ dimensionalen Euklidisch-affinen Raum. — G. Schiffers: Eine die konformen Abbildungen kennzeichnende Eigenschaft. — B. N. Prasad: Remark on infinite derivates. — H. Wieleitner: Notiz zu dem Aufsatz von W. Weinreich: « Die Fadenzeichnung der Hyperbel, usw. » — H. Dingler: Berichtigung. — S. Jolles: Eugen Jahnke. — H.-E. Timerding: Theodor Reye. — H. Fuhr: Bemerkung über die Stellen der Bestimmtheit eines linearen Differentialsystems. — H. Weyl: Das Raumproblem. — G. Doetsch: Der Sinn der angewandten Mathematik. — A. Fraenkel: Der Zusammenhang zwischen dem ersten und dem dritten Gausschen Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra. — J. v. Sz. Nagy: Zur Theorie der algebraischen Gleichungen. — K. Reinhardt: Extremale Polygone gegebenen Durchmessers.

The Rice Institute Pamphlet. Houston, Texas. Vol. VII, octobre 1920, N° 4. — V. Volterra: Functions of Composition, Three lectures delivered at the Rice institute in the autumn of 1919. — G. C. Evans: Fundamental Points of Potential Theory. Stieltjes integral in connection with potential theory.

Mathematische Annalen. 85. Band. — P. Bernays: Zur mathematischen Grundlegung der kinetischen Gastheorie. — F. Bernstein: Ein Kriterium für den positiv Charakter von Fourierintegralen und die Darstellung solcher als Summe von Quadraten. — S. Bernstein: Sur le théorème limite du calcul des probabilités. — L. Bieberbach: Ueber die Verteilung der Null- und Einsstellen analytischer Funktionen. — O. Blumenthal: Ueber rationale Polynome mit einer Minimumseigenschaft. — H. Bohr: Ueber eine quasi-periodische Eigenschaft Dirichletscher Reihen mit Anwendung auf die Dirichletschen L-Funktionen. — C. Caratheodory: Ueber die kanonischen Veränderlichen in der Variationsrechnung der mehrfachen Integrale. — R. Courant: Ueber die Lösungen der Differentialgleichungen der Physik (I. Mitteilung). — M. Dehn: Ueber die Grundlagen der projektiven Geometrie und allgemeine Zahlsysteme — F. Enriques: Il principio di degenerazione e la geometria sopra le curve algebriche. — L. Fejer: Ueber die Lage der Nullstellen von Polynomen, die aus Minimumforderungen gewisser Art entspringen. — G. Fubini: Geometria proiettivo-differenziale di una superficie V nello spazio S a quattro dimensioni. — R. Fueter: Kummers Kriterium zum letzten Theorem von Fermat. — M. Fujiwara: Zahlengeometrische Untersuchungen über die extremen Formen für die indefiniten quadratischen Formen. — Ph. Furtwængler: Ueber Kriterien für irreduzible und für primitive Gleichungen

und über die Aufstellung affektfreier Gleichungen. — H. Hamburger: Ueber einige Beziehungen, die mit der Funktionalgleichung der Riemannschen Funktion äquivalent sind. — E. R. Hedrick et W. D. A. Westfall: The Existence Domain of Implicit Functions. — K. Hensel: Ueber die Normenreste und Nichtreste in den allgemeinsten relativ-Abelschen Zahlkörpern. — E. Hilb: Zur Theorie der linearen Differenzialgleichungen. — E. Kasner: The solar gravitational field completely determined by its light rays. — A. J. Kempner: Ueber die Separation komplexer Wurzeln algebraischer Gleichungen. — F. Klein: Bericht über den Stand der Herausgabe von Gauss' Werken. — T. Levi-Civita: Risoluzione dell'equazione funzionale che caratterizza le onde periodiche in un canale molto profondo. — H. Liebmann: Die Bewegungen der hyperbolischen Ebene. — H. Mohrmann: Hilbertsche und Beltramische Liniensysteme. Ein Beitrag zur Nicht-Desarguesschen Geometrie. — L. Neder: Ueber einen Lückensatz für Dirichletsche Reihen. — E. R. Neumann: Ueber die Geometrische Veranschaulichung einer Riemannschen Formel aus dem Gebiete der elliptischen Funktionen. — E. Noether: Ein algebraisches Kriterium für absolute Irreduzibilität. — C. Runge: Ueber die Gravitation ruhender Massen. — F. Schilling: Eine neue kinematische Ebenenführung. — A. Schœnflies: Bemerkung zur Axiomatik der Grössen und Mengen. — C. Siegel: Neuer Beweis für die Funktionalgleichung der Dedekindschen Zetafunktion. — J. Sommer: Ueber die Bezeichnung « Grad einer Differentialgleichung » und Bemerkungen zu der Randwertaufgabe einer gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung. — O. Szasz: Ueber die Singularitäten von Potenzreihen und Dirichletschen Reihen am Rande des Konvergenzbereiches. — W. D. A. Westfall und E. R. Hedrick : The Existence Domain of Implicit Functions. — E. J. Wilczynski: Charakteristische Eigenschaften der isothermkonjugierten Kurvennetze.

86. Band. — G. Hamel: Ueber erzwungene Schwingungen bei endlichen Amplituden — O. D. Kellogg: On the existence and closure of sets of characteristic functions. — E. Hellinger: Zur Stieltjesschen Kettenbruchtheorie. — E. H. Moore: On Power Series in General Analysis. — E. Study: Ueber S. Lies Geometrie der Kreise und Kugeln. — H. Jonas: Ueber ein die Verbiegung der Linienkongruenzen betreffendes Problem und über die Transformation der Bonnetschen Flächenpaare. — W. Scherrer: Ein Satz über Gitter und Volumen. — S. Breuer: Zyklische Gleichungen 6. Grades und Minimalbasis. — G. Szegö: Ueber den asymptotischen Ausdruck von Polynomen, die durch eine Orthogonalitätseigenschaft definiert sind. — W. Sternberg: Ueber die asymptotische Integration partieller Differentialgleichungen mit Parameter. — K. Popoff: Sur les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction $F(x)$ puisse être mise sous la forme $\int_0^x f(x)\, d(x)$ où $f(x)$ est de carré intégrable. — E. Landau: Bemerkungen zu der Arbeit des Herrn Bieberbach « Ueber die Verteilung der Null- und Einsstellen analytischer Funktionen ». — O. Hœlder: Carl Neumann zum 90. Geburtstag. — H. Behmann: Beiträge zur Algebra der Logik, insbesondere zum Entscheidungsproblem. — A. Fraenkel: Zu den Grundlagen der Cantor-Zermeloschen Mengenlehre. — St. Bergmann: Ueber die Entwicklung der harmonischen Funktionen der Ebene und des Raumes nach Orthogonalfunktionen. — C. Caratheodory: Ueber ein

Reziprozitätsgesetz der verallgemeinerten Legendreschen Transformation. C. Siegel: Bemerkungen zu einem Satz von Hamburger über die Funktionalgleichung der Riemannschen Zetafunktion. — W. Sternberg: Ueber die asymptotische Integration partieller Differentialgleichungen mit Parameter. — O. Volk: Ueber die Entwicklung von Funktionen einer komplexen Veränderlichen nach Funktionen, die einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit einem Parameter genügen. — E. Trefftz: Das statistische Gravitationsfeld zweier Massenpunkte in der Einsteinschen Theorie.

Mathematische Zeitschrift. 11. Band. — F. Carlson: Ueber ganzwertige Funktionen. — O. Szasz: Ueber Hermitesche Formen mit rekurrierender Determinante und über rationale Polynome. — J. A. Schouten: Ueber die konforme Abbildung n-dimensionaler Mannigfaltigkeiten mit quadratischer Massbestimmung auf eine Mannigfaltigkeit mit euklidischer Massbestimmung. — Th. Pœschl: Ueber eine partikuläre Lösung des biharmonischen Problems für den Ausseraum der Ellipse. — G. Weyl: Die Form des Wirkungsprinzips bei der Bewegung starrer Körper aus Invarianzforderungen abgeleitet. Ph Frank: Ein Satz über ebene Potentialströmungen. — A. Lœwy: Ueber algebraische Gleichungen mit reellen Wurzeln und den sogen. casus irreducibilis bei kubischen Gleichungen. — L. Neder: Ueber die Koeffizientensumme einer beschränkten Potenzreihe. — M. Pasch: Der Ursprung des Zahlbegriffs. — A. Walther: Maximum und Minimum einer harmonischen Funktion auf Kreisen. — G. Dœtsch: Ueber die Cesarosche Summabilität bei Reihen und eine Erweiterung des Grenzwertbegriffs bei integrablen Funktionen. — St. Jolles: Partiell inverse und partiell involutorische Kollineationen und die Inzidenzen in zwei kollokalen korrelativen Feldern. — H. Happel: Ueber das Gleichgewicht von elliptischen Platten. — H. Hamburger: Ueber die Riemannsche Funktionalgleichung der ζ-Funktion, II. — C. Siegel: Darstellung total positiver Zahlen durch Quadrate. — H. Rademacher: Ueber die asymptotische Verteilung gewisser konvergenzerzeugender Faktoren. — P. Franck: Ueber affine Geometrie XXXII. Die Asymptotenebenen eines Flächenpunktes und seine Liesche F_2. — L. Fejer und F. Riesz: Ueber einige funktionentheoretische Ungleichungen. — G. Scheffers: Ebene Berührungskurven zweier Rotationsflächen. — E. Landau: Ueber die gleichmässige Konvergenz Dirichletscher Reihen. — L. Lichtenstein: Ueber eine Eigenschaft der klassischen Greenschen Funktion.

12. Band. — H Geiringer: Ueber eine Randwertaufgabe der Theorie gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung — E. Schwartz: Ueber binäre trilineare Formen. — G. Polya: Ueber dei Nullstellen sukzessiver Derivierten. — G. Szegö: Ueber die Entwicklung einer willkürlichen Funktion nach den Polynomen eines Orthogonalsystems. — I. Schur: Zur Arithmetik der Potenzreihen mit ganzzahligen Koeffizienten. — H. Weyl: Die Einzigartikeit der Pythagoreischen Massbestimmung. — H. Cramer: Ein Mittelwertsatz in der Primzahltheorie. — H. Weyl: Zur Infinitesimalgeometrie : p dimensionale Fläche im n dimensionalen Raum. — G. H. Hardy et J. E. Littlewood: Some Problems of « Partitio Numerorum »: IV. The singular series in Waring's Problem and the Value of the number G (k). — O. Toeplitz: Ueber das Wachstum der Potenzreihen

in ihrem Konvergenzkreise. I. — L. Lichtenstein: Untersuchungen über die Gestalt der Himmelskörper. II. Eine aus zwei getrennten Massen bestehende Gleich gewichtsfigur rotierender Flüssigkeit. — E. Landau: Zum Waringschen Problem. — P. Koebe: Fundamentalabbildung und Potentialbestimmung gegebener Riemannscher Flächen. — P. Herglotz: Ueber einen Dirichletschen Satz. — W. Blaschke: Ueber affine Geometrie. XXXIII: Affinminimalflächen. — E. Hecke: Ueber die Integralgleichung der kinetischen Gastheorie. — I. Schur: Ein Beitrag zur Hilbertschen Theorie der vollstetigen quadratischen Formen. — E. Schmidt: Ueber die Darstellung der Lehre vom Inhalt in der Integralrechnung. — A. Ostrowski: Notiz über einen Satz der Galoisschen Theorie. — E. Kamke: Ueber die Zerfällung rationaler Zahlen in rationale Polynomwerte.

13 Band. — R. Nevanlinna: Kriterien für die Randwerte beschränkter Funktionen. — H. Liebmann: Zwei charakteristische Eigenscheften der Flächen konstanten Krümmungsmasses. — H. Rademacher: Ueber eine funktionale Ungleichung in der Theorie der konvexen Körper. — G. Szegö: Bemerkungen zu einem Satz von J. H. Grace über die Wurzeln algebraischer Gleichungen. — J. A. Schouten: Ueber die verschiedenen Arten der Uebertragung in einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit, die einer Differentialgeometrie zugrunde gelegt werden können.— L. Lichtenstein: Untersuchungen über die Gestalt der Himmelskörper. Dritte Abhandlung. Ringförmige Gleichgewichtsfiguren ohne Zentralkörper. — R. Bach: Neue Lösungen der Einsteinschen Gravitationsgleichungen. A. Das Feld in der Umgebung eines langsam rotirenden kugelähnlichen Körpers von beliebiger Masse in 1. und 2. Annäherung. — R. Bach: Neue Lösungen der Einsteins Gravitationsgleichungen. B. Explizite Aufstellung statischer axialsymmetrischer Felder. Mit einem Zusatz über das statische Zweikörperproblem von H. Weyl. — E. T. Bell: Arithmetical equivalents for a remarkable identity between theta functions. — A. Fraenkel: Axiomatische Begründung der transfiniten Kardinalzahlen, I. — H. W. E. Jung: Kurven auf algebraischen Flächen. — Id.: Ebene Schnitte und Berührungskegel einer algebraischen Fläche. — F. Apt: Die Tangentenlosigkeit der von Kochschen Kurve. — St. Jolles: Die windschief involutorischen Paarungen in einer linearen Strahlenkongruenz und die beiden Arten windschief involutorischer linearer Strahlenkongruenzen. — J. Horn: Zur Theorie der nichtlinearen Differentialgleichungen. — H. Hamburger: Ueber der Riemannsche Funktionalgleichung der ζ-Funktion. Die Funktionalgleichung der L-Reihen.

Monatshefte für Mathematik und Physik. — XXXII. Band. — H. Hahn: Ueber Folgen linearer Operationen. — L. Berwald: Die Grundgleichungen der Hyperflächen im Euklidischen R_{n+1} gegenüber den inhaltstreuen Affinitäten. — K. Zindler: Ueber konvexe Gebilde. — T. Rella: Lineare Operatoren in endlichen Kongruenzkörpern. — J. Lense: Ein Beitrag zur Theorie der mehrfachen Integrale. — K. Altenburger: Rollbewegung einer Kugel auf einer schiefen Ebene mit Rücksicht der Erdrotation. — E. Trilling: Ueber Funktionen endlicher Variation. — G. Pick: Extremumfragen bei analytischen Funktionen im Einheitskreis. — J. Blumenfeld und W. Mayer: Ueber die Existenz Ebenster in Riemannschen Räumen. — A. Smekal: Ueber einige Grundfragen der statischen Mechanik. — L. Vietoris: Bereiche zweiter Ordnung. — E. Muller: Gustav Kohn.

Proceedings of the London mathematical Society. — Vol. 20. — J. E. Campbell: Einsteins Theory of Gravitation as an Hypothesis in Differential Geometry. — G. H. Hardy et J. E. Littlewood: Some Problems of Diophantine Approximation: The Lattice-Points of a Right-Angled Triangle. — H. J. Priestley: On some Solutions of the Wave Equation. — H. M. Macdonald: Some Problems in Wireless Telegraphy. — G. T. Bennett: The Three-Bar Sextic Curve. — M. J. M. Hill: On the Use of a Property of Jacobians to determine the Character of any Solution of an ordinary Differential Equation of the first Order or of a linear partial Differential Equation of the first Order. — H. Hilton: On plane Curves of Degree n with a multiple Point of Order n—1 and a Conic of $2n$-Point Contact. — W. P. Milne and D. G. Taylor: Relation between Apolarity and the Pippian-Quippian Syzygetic Pencil. — H. W. Richmond: A Note on Apolarity. — W. P. Milne: Ralation between Apolarity and a certain Porism of the Cubic Curve. — H. Steinhaus: An Example of a thoroughly divergent Orthogonal Development. — R. H. Fowler and C. N. H. Lock: Approximate Solutions of linear Differential Equations. — G. I. Taylor: Tidal Oscillations in Gulfs and Rectangular Basins. — G. C. Young: On the partial Derivatives of a Function of many Variables. — G. N. Watson: The Product of two Hypergeometric Functions. — G. I. Taylor: Diffusion by continuous Movements. — L. F. Richardson: Note on a Theorem by Mr. G. I. Taylor on Curves with oscillate Irregularity. — A. S. Eddington: On Dr. Sheppard's Method of Reduction of Error by linear Compounding. — W. F. Sheppard: Extended Meaning of conjugate Sets. — L. E. Dickson: Arithmetic of Quaternions. — P. J. Heawood: The Classification of rational Approximations. — F. Bowman: The Differentiation of the Complete Third Jacobian Elliptic Integral with Regard to the Modulus, with some Applications. — E. A. Milne :and S. Pollard: On the Maximum Errors of certain Integrals and Sums involving Functions whose Values are not precisely determined. — L. J. Mordell: On the Reciprocity Formula for the Gauss's Sums in the Quadratic Field. — Ch. Jordan: Sur une série de polynomes dont chaque somme partielle représente la meilleure approximation d'un degré donné suivant la méthode des moindres carrés. — C. W. Gilham: An extension of two Theorems on Jacobians. — N. Wiener: The Group of the linear Continuum. — J. E. Jones: On the Distribution of Energy in Air surrounding a vibrating Body. — M. Kössler: On a Generalisation of Lagrange's Series. — E. G. C. Poole: On certain Classes of Mathieu Functions. — S. Timoschenko: Oh the Torsion of a Prism, one the Cross-Sections of which remains plane. — S. Timoschenko: A Membrane Analogy to Flexure. — L. J. Mordell: Note on certain modular Relations Considered by Messrs. Ramanujan, Darling, and Rogers. — B. M. Sen: On double Surfaces. — S. Beatty: The algebraic Theory of algebraic Functions of one Variable. — M. J. M. Hill: On the differential Equations of the first order derivable from an irreducible algebraic primitive. — H. W. Turnbull: The invariant Theory of three quadrics. — Part. 7. — J. Brill: On the transformation of certain Solutions of the Electromagnetic Equations. — Pandit Oudh Upadhyaya: Cyclotnic Quinque-Section for every Prime of the Form 10 n + 1 between 100 and 500.

Rendiconti del Circolo matematico di Palermo. — Tome XLV (1921). T. J. Boks: Sur les rapports entre les méthodes d'intégration de Riemann

et de Lebesgue. — D. Buchanan: Orbits asymptotic to the straight line equilibrium points on the problem of three finite bodies. — E. W. Chittenden: On the relation between the Hilbert space and the calcul fonctionnel of Fréchet. — R. König: Geometrie auf transzendenten Kurven. — E. Ragazzi: Sopra una classe di trasformazioni delle superficie isotermo-assintotiche ed il relativo teorema di permutabilita. — J. A. Schouten et D. J. Struik: Ueber das Theorem von Malus-Dupin und einige verwandte Theoreme in einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit mit beliebiger quadratischer Massbestimmung. — G. Scorza: Le algebre di ordine qualunque e le matrici di Riemann. — G. Usai: Sulle soluzioni in termini finiti di equazioni integrali col nucleo $x - y$.

3. Thèse de doctorat:

Nous signalons sous cette rubrique les thèses de doctorat dont un exemplaire imprimé aura été adressé à la Rédaction, 110 *Florissant, Genève.*

Allemagne. — *Université de Giessen.* — H. Axel. — *Die elliptischen Funktionen als automorphe Funktionen, die zu einer aus drei Drehunhungen der Euklidischen Ebene um* 180° *komponierten Gruppe gehören.* (Mitteilungen des Mathematischen Seminars der Universität Giessen, VIII. Heft). — 1 fasc. in-8° de 53 pages avec 8 figures.

A. Plessner. — *Zur Theorie der konjugierten trigonometrischen Reihen.* — (Mitteilungen des Mathematischen Seminars der Universität Giessen, X Heft). — 1 fasc. in-8° de 36 p.

Royaume des Serbes, Croates, Slovènes. — *Université de Belgrade.* — T. Peyovitch. — Nouveaux cas d'intégrabilité d'une équation différentielle importante. — 1 fasc. in-8°de 21 p.

Suisse. — *Université de Zurich.* — E. Bachmann. — Die elliptischen Funktionen, welche Umkehrungen des Quotienten zweier Integrale der hypergeometrischen Differentialgleichung sind. — 1 fasc. in-8° de 37 p. et 3 fig.

C. Bindschedler. — Die Teilungskörper der elliptischen Funktionen im Bereich der dritten Einheitswurzel. — 1 fasc. in-4° de 29 p.

F. Haas. — Ueber den vollständigen Verlauf der Lösungskurven bestimmter Differentialgleichungen. — 1 fasc. in-8° de 32 p. et 50 fig.

A. Lips. — Ueber eine einparametrige Schar geodätischer Linien auf dem verlängerten Rotationsellipsoid und ihr Enveloppensystem. — 1 fasc. in-8° de 24 p. et 10 fig.

W. Scherrer. — Ein Satz über Gitter und Volumen. — 1 fasc. in-8° de 11 p.

A. Weinstein. — Fundamentalsatz der Tensorrechnung. — 1 fasc. in-8° de 14 p.

LES MATHÉMATIQUES EN PORTUGAL [1]

PAR

Fr. Gomes Teixeira (Porto).

Les Portugais ont toujours été universellement réputés comme de hardis voyageurs. Devant eux, l'Océan avait l'attrait du mystère et du profit; les plus grands d'entre eux, par patriotisme, par loyalisme, aspiraient toujours à découvrir de nouvelles terres pour l'extension du pays et la gloire du roi. Mais les voyages en haute mer n'allant pas sans connaissances astronomico-mathématiques, nous voyons commencer l'histoire de la Mathématique portugaise au XVe siècle quand Don Henrique, le Navigateur, fonda la célèbre Station et Ecole navale de Sagres. Dans ce bourg situé à l'extrémité sud du pays, le fameux fils de Don Jean I se livrait à l'étude des anciens ouvrages, spécialement de ceux de Ptolémée, et présidait à l'organisation des expéditions navales, aidé par le cosmographe catalan Jacome de Mayorque, qui était très habile dans l'art de naviguer et particulièrement dans le tracé des cartes marines.

L'œuvre nautique heureusement commencée par Don Henrique a été continuée par Don Jean II, qui s'est entouré de cosmographes et d'astronomes dont deux, Zacuto, juif espagnol, et José Vizinho, juif portugais, ont composé le *Regimento do astrolabio*, le plus ancien ouvrage sur l'application de l'Astronomie à la Nautique qu'on ait publié; les pilotes l'emportaient et y

[1] Résumé de conférences faites en mai 1923, par M. Francisco Gomes Teixeira, recteur honoraire de l'Université de Porto, aux Facultés des Sciences de Paris et de Toulouse. Pour détails sur les céremonies ayant accompagné ces conférences, voir la Chronique du présent fascicule, p. 214 — N. d. l. R.

trouvaient les règles et les tables nécessaires à la navigation au moyen de la Polaire et du Soleil. Les applications de l'Astronomie à la navigation commencées dans cet ouvrage furent continuées par Jean de Lisbôa, dans son *Livro da Marinharia*, par Duarte Pacheo, dans son *Esmeraldo de situ orbis* et par F. Faleiro, dans son *Arte de marear.*

Ces auteurs ont exposé les doctrines du *Regimento do astrolabio* sous une forme plus scientifique et avec des développements utiles; ils ont ajouté d'autres sujets importants pour la science et l'art de la navigation.

On ne trouve pas dans ces publications des inventions que l'histoire de l'Astronomie doive enregistrer. Leurs auteurs, praticiens exercés, ont traduit avec habileté des règles et des doctrines nautiques données par les Grecs et les Arabes.

Pedro Nunes qui apparaît alors dans l'histoire de la science portugaise se trouve dans des conditions différentes. Il fut un grand théoricien, riche en génie et en connaissance profonde des œuvres des astronomes et des cosmographes grecs, juifs et arabes. Les ouvrages les plus importants de Nunes sont le Traité *De arte atque ratione navigandi*, le traité *De crepusculis* et le traité d'*Algebra.*

Dans le premier de ces traités, nous signalerons d'abord l'invention de la courbe appelée par l'auteur *ligne de rhumb* (loxodromie). Nunes donna la forme de la courbe, en indiqua quelques propriétés et fixa son rôle dans la Nautique. Il n'a rien donné d'équivalent à son équation en coordonnées sphériques, mais il a exposé une méthode pour former une table loxodromique.

On peut rattacher à la doctrine de Nunes sur la ligne de *rhumb* celle de la carte marine considérée par notre auteur dans le même ouvrage. Nunes y a posé les conditions auxquelles cette carte doit satisfaire, savoir: elle doit représenter par des droites les lignes de *rhumb* et elle doit conserver les angles que ces lignes font avec les méridiens terrestres.

On employait dans la navigation portugaise la carte dite *plane.* Nunes la défend contre les critiques des pilotes, car elle satisfait avec une certaine approximation aux conditions qu'on vient de mentionner, quand elle représente une zone de la terre

de petite hauteur. Mais cette approximation décroît rapidement, quand la hauteur de la zone augmente, et devient bientôt insuffisante. Alors la carte ne peut plus jouer le rôle d'instrument mathématique pour la détermination du rhumb à suivre d'un lieu à l'autre.

Nunes a reconnu ce défaut, mais il n'y a pas remédié, laissant l'honneur de la découverte de la vraie solution de la carte marine à Mercator, l'inventeur de la carte *plane réduite*.

Un autre chapitre très intéressant de l'ouvrage que nous analysons est celui où sont décrits quelques instruments inventés par Nunes, dont le plus remarquable est celui qu'on appelle *nonius*, dont l'invention lui a été suggérée par la lecture d'un passage de l'Almageste de Ptolémée. Nunes attribue même l'origine de cet instrument à Ptolémée et considère sa théorie comme une simple reconstitution de la méthode de l'auteur de l'Almageste pour mesurer les fractions du degré.

Pour compléter la liste des fondateurs de l'Astronomie nautique, il ne nous reste qu'à faire mention de D. Joao de Castro, élève de Nunes, qui a appliqué les doctrines de son maître, sur la détermination des latitudes et de la déviation de l'aiguille, dans les voyages qu'il a faits en Orient.

Le traité *De Crepusculis* est l'ouvrage qui fait le mieux ressortir la grandeur de l'esprit de Nunes. Il y résoud le problème qui a pour but de déterminer la durée des crépuscules pour un lieu donné de la terre et une position donnée du soleil. Comme conséquence de la solution de ce problème, notre auteur détermine le jour de crépuscule minimum.

Le traité d'Algèbre de Nunes a été inspiré par des ouvrages de Luca de Paciulo, de Cardan et de Tartaglia. De tous les livres consacrés à l'Algèbre avant Viète, le traité de Nunes est celui qui s'approche le plus des ouvrages modernes. Il est écrit dans une langue si précise et avec tant d'art qu'il suffit de remplacer partout, suivant des règles fixes, les mots techniques, pour obtenir une Algèbre moderne, pour ce qui concerne le calcul, mais rattachée à la géométrie pour ce qui concerne les démonstrations. L'auteur s'occupe des équations des premier, second et troisième degré, et il résoud de nombreux problèmes, dont plusieurs sont remarquables et avaient déjà été considérés par

Régiomontanus, Luca de Paciulo et Cardan: mais Nunes en a donné de nouvelles solutions plus simples ou plus rigoureuses.

Avec la mort de Nunes, en 1577, se termine la première période de la Mathématique portugaise, sa période d'or, et commence la seconde. la période de décadence, qui s'étend jusqu'à la fondation d'une Faculté de Mathématique à l'Université de Coïmbre dans la seconde moitié du XVIIIme siècle.

Dans la période que nous venons de considérer, la hauteur à laquelle la culture des Mathématiques s'est élevée au Portugal n'est pas inférieure à celle à laquelle elle s'est élevée dans les autres pays, et ce qui caractérise cette période, c'est la préférence donnée à l'étude de l'Astronomie sous le point de vue de l'application à la navigation. Pour ce motif, quand sous le règne de Don Jean III, la navigation portugaise commença à déchoir, on a commencé à abandonner l'étude des sciences. L'application qu'on faisait encore dans ce temps de l'Astronomie à l'Astrologie n'a pas pu les sauver, car avec l'introduction de l'Inquisition au Portugal les pronostics de l'Astrologie devinrent dangereux.

Cet abandon des mathématiques a continué pendant presque deux siècles, parce que l'enseignement public est tombé entre les mains de la Société de Jésus, qui ne s'est pas intéressée aux progrès scientifiques eux-mêmes.

Les Mathématiques ont eu encore quelques auteurs dans ce pays pendant cette période, mais les ouvrages qu'ils nous ont laissés n'ont pas contribué aux progrès de ces sciences, et il faut aller jusqu'au milieu du XVIIIe siècle pour trouver un nom portugais qui mérite de figurer dans l'histoire des sciences exactes. Je fais allusion à Joanes de Barros qui a publié des Mémoires remarquables sur le passage de Mercure devant le Soleil en 1753 et sur les satellites de Jupiter.

Ensuite notre pauvreté scientifique continue jusqu'à la fondation, par le Marquis de Pombal, de la Faculté de Mathématiques de l'Université de Coïmbre. Alors le célèbre Ministre de Don José I a trouvé, comme par miracle, deux Portugais de grand mérite, Monteiro da Rocha et Anastasio da Cunha, qui se sont chargés avec deux Italiens illustres, des quatre chaires de Mathématiques de la nouvelle Faculté.

Monteiro da Rocha est connu principalement par ses travaux astronomiques. Il a fondé et organisé d'une manière remarquable l'Ephéméride de l'Observatoire de Coïmbre et il a publié des Mémoires importants sur la détermination de l'orbite parabolique d'une comète et sur la prédiction des éclipses du Soleil et de la Lune. Il a été encore un grand pédagogue, un philosophe très distingué et un littérateur élégant.

Anastasio da Cunha a été un géomètre logicien; il a été un des précurseurs, au XVIIIe siècle, des géomètres qui, au XIXe siècle ont étudié, sous le point de vue logique, les fondements des Mathématiques, comme on le voit en lisant ses *Principius Mathematicus*, le seul ouvrage qu'il ait laissé au complet. Nous signalerons dans cet ouvrage les chapitres consacrés aux séries et à la théorie des nombres irrationnels.

Nous ne ferons pas l'histoire des Mathématiques portugaises au XIXe siècle; nous dirons seulement quelques mots à cet égard.

Le nombre des travaux publiés au Portugal pendant ce siècle est très considérable, mais quelques-uns n'ont pas d'intérêt et plusieurs autres sont purement didactiques. Le nombre des travaux scientifiques vraiment originaux est bien petit et ils sont dus à Valento do Couto, Manoel Pedro de Mello, Garçao Stockler, Daniel da Silva, etc.

Francisco de Borja Garçao Stockler fut un historien de notre science mathématique. Son *Ensaio historico*, quoique très incomplet, est très intéressant.

Valento do Couto a une production très étendue qui ne cesse qu'à sa mort survenue en 1848.

Daniel da Silva dépasse ses confrères. Il trouva sur les systèmes de forces à orientation variable, des résultats publiés plus tard par Gaston Darboux ; la priorité du géomètre portugais semble des plus nettes. Son travail sur les congruences binomes est aussi très remarquable.

Cette brève esquisse ne montre-t-elle pas le rôle des Portugais dans la science comme des plus curieux ? Les Français voient volontiers le germe des mathématiques modernes dans les productions à caractère philosophique d'un Pascal ou d'un Descartes; au Portugal, les précurseurs apparaissent sous les

traits de navigateurs ou tout au moins de spécialistes en questions nautiques. Et, comme l'aboutissement est le même dans les deux cas, on voit avec quelle force s'impose le concept purement mathématique, qu'on y soit primitivement conduit par les spéculations ou par des problèmes d'origine pratique.

D'après M. F. Gomes TEIXEIRA.
(Notes recueillies par M. A. BUHL.)

QU'EST-CE QUE LA GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE ?

PAR

Gino LORIA (Gênes).

---

1. — Les traités de géométrie analytique, à partir de l'excellent livre [1] où ce mot est employé pour la première fois pour désigner la méthode des coordonnées [2], comprennent d'ordinaire:

a) des généralités sur cette méthode;

b) quelques exemples sur la détermination des équations des lieux et quelques autres relatifs au tracé de courbes dont on connaît l'équation;

c) la détermination des formules qui servent à résoudre les questions fondamentales relatives aux points, aux droites et aux plans;

d) enfin l'étude et la classification des courbes et des surfaces du second degré.

Comme ce dernier sujet remplit la plus grande partie de chaque traité, ceux qui commencent se forment l'idée que le

---

[1] J.-B. BIOT, *Essai de géométrie analytique*. J'ai sous les yeux la V[e] éd., Paris 1813.

[2] Ce nom est évidemment inspiré par le titre de la *Mécanique analytique* de LAGRANGE; d'ailleurs ce grand géomètre suivait à son tour un exemple donné par Euler dans son traité *Mechanica, sive motus scientia analytice exposita*.

but suprême de la géométrie analytique est la recherche et la démonstration des propriétés des coniques et des quadriques et que les procédés qui mènent à ce résultat constituent les méthodes générales de la géométrie analytique. Or tout le monde sait que rien n'est plus faux qu'une telle opinion ! En effet la géométrie analytique a pour but l'investigation, à l'aide de coordonnées, de toutes les figures qu'on peut concevoir dans le plan ou dans l'espace; dans ce but, elle emploie des procédés très différents et qui, en général, n'ont aucune analogie avec ceux qui servent pour les figures du second ordre, car ceux-ci ne sont qu'une conséquence et une application des prérogatives des formes quadratiques.

2. — Ces remarques, que je fis dans mon for intérieur depuis plusieurs années et dont je fis part « timidement » à quelques amis (« timidement » eu égard à la magnifique littérature qu'a la géométrie analytique au sens de Biot), reçurent quelques approbations, mais aussi de l'opposition, particulièrement en considération du fait que le programme d'un cours de géométrie analytique conçu de la manière générale que je viens d'indiquer, paraissait ne pouvoir être développé que dans l'hypothèse de l'emploi du calcul différentiel. Bien que cette objection ne m'ait du tout convaincu, car je savais bien que la notion de limite, maniée par une main expérimentée, permet de résoudre un grand nombre de questions géométriques qu'on traite le plus souvent à l'aide de D de différentes formes, je mis la question de côté, car j'estime que les questions didactiques ne peuvent être résolues qu'à l'aide d'expériences directes et répétées et, d'ailleurs, je n'avais aucune chance d'être chargé de faire un cours, ni le temps de composer un nouveau traité sur la matière dont il s'agit.

3. — Mais les études sur l'histoire de la géométrie analytique que je poursuis depuis un quart de siècle [1], m'ont remis sous la main un célèbre traité qui me fit crier, à l'instar d'Archimède, *Eureka* ! Ecrit il y a désormais deux siècles, et bien qu'il pré-

---

[1] Comparer ma communication *Pour l'histoire de la géométrie analytique* (Verh. des III. intern. Mathem.-Kongresses, Heidelberg, 1904). [J'ai développé complètement ce sujet dans un long mémoire ayant pour titre *Da Descartes e Fermat a Monge e Lagrange, contributo alla storia della geometria analitica* et que j'ai présenté à l'Académie des Lincei dans la séance du 2 décembre 1923. *(Note ajoutée sur les épreuves.)*]

sente à nos yeux une lacune extrêmement regrettable, il *offre cependant le développement parfait des idées que je viens d'exposer.* Il s'agit du vol. II de l'*Introductio in analysin infinitorum*, d'EULER. Tout le monde sait[1] que, tandis que le tome I de cet ouvrage se rapporte complètement aux questions d'ordre numérique, le tome II s'occupe sans exception des propriétés de l'étendue figurée et, comme son titre le dit bien, il précède le traité que le grand mathématicien se proposait d'écrire sur le calcul infinitésimal; l'idée d'infini n'est appelée à y jouer aucun rôle. Cela est d'autant plus remarquable, car le but que se propose Euler est, pour ne parler que de la géométrie plane, l'étude des propriétés des courbes. Nous en avons la preuve dans le fait qu'il ne considère jamais un point isolé, car chaque point est pour lui un élément d'une série continue. En outre, et voilà la lacune signalée plus haut, il considère comme étranger à sa tâche de résoudre les problèmes se rapportant aux distances, angles, etc., problèmes que, au contraire, nous estimons aujourd'hui comme fondamentaux en géométrie analytique; pas même l'expression de la distance entre deux points n'est établie explicitement [2].

4. — Dans le volume dont je m'occupe on trouve exposées clairement les considérations qui permettent d'interpréter les signes des coordonnées cartésiennes (orthogonales ou obliques). Euler montre ensuite comment on opère la transformation des coordonnées, et il en tire deux conséquences remarquables; à savoir: *a*) que les deux coordonnées d'un point sont des grandeurs de la même espèce, ce que Descartes avait manqué de remarquer; *b*) que les droites du plan sont les images géométriques des équations linéaires et celles-ci l'équivalent géométrique de celles-là. De cette proposition fondamentale, Euler tire la signification géométrique du degré de l'équation d'une courbe représentée par un polynome égalé à zéro et l'idée de la classification des lignes algébriques d'après leur ordre. Notre géo-

---

[1] Dans le résumé qui suit, on ne trouvera pas une séparation de ce qui est original et de ce qu'EULER emprunta aux géomètres antérieurs; c'est une recherche étrangère au but de cet article et dont je me suis occupé ailleurs [voir note 1].

[2] C'est mon opinion que l'introduction dans la géométrie analytique des figures qui sont du ressort de la géométrie élémentaire est la conséquence de l'exemple donné par Lagrange dans son mémoire *Sur les pyramides triangulaires.*

mètre montre tout de suite que l'équation d'une courbe permet de découvrir quelques-unes de ses propriétés, par exemple de déterminer le nombre des points nécessaires et suffisants pour fixer la position d'une courbe algébrique.

5. — Le chapitre suivant s'ouvre par la remarque que les lignes droites étant assez connues d'après les éléments de la géométrie, c'est avec les lignes du second ordre que doit commencer l'étude des lignes particulières. En effet, le géomètre de Bâle considère les figures représentées par l'équation générale du second degré en coordonnées cartésiennes et il commence par la déduction des propriétés des coniques relatives aux diamètres et aux axes. Il va sans dire que, tout en conservant ce programme, on peut aujourd'hui arriver aux mêmes conclusions par des calculs plus élégants. La même chose peut se répéter pour ce qui concerne la classification des coniques, qui fait l'objet d'un autre chapitre de l'*Introductio*. A ce moment Euler abandonne les courbes d'un degré particulier pour montrer comment on peut déterminer les branches infinies d'une courbe et les asymptotes correspondantes, tout en n'employant que des considérations élémentaires. Ces méthodes sont immédiatement appliquées aux coniques, ce qui conduit à des conclusions assez simples. Leur importance se voit mieux dans la classification des courbes du 3me et du 4me degré, qu'Euler base sur la considération de leurs points à l'infini. Il expose le sujet sans s'arrêter aux détails les plus menus, mais d'une manière suffisante pour faire comprendre comment on traite les questions de cette espèce, et aussi pour donner une idée de la variété de forme que peuvent présenter les courbes, même si l'on se borne à celles qui sont algébriques. Pour découvrir les propriétés qui peuvent se présenter tout le long d'une ligne, Euler montre comment on peut déterminer la tangente et la normale en un point, calculer la sous-tangente et la sous-normale, trouver les points doubles ou de rebroussement, calculer la courbure et, en conséquence, établir la position des points d'inflexion: tout cela, il est bon de le répéter, sans avoir recours aux dérivées.

6. — Les courbes du second degré étant douées de diamètres, Euler (s'inspirant d'un important Mémoire de Newton) s'occupe ensuite en général des courbes algébriques qui ont la

même propriété, en justifiant, si je peux m'exprimer de la sorte, de s'être arrêté sur ce sujet en exposant plusieurs propriétés élégantes liées à la considération des diamètres. Les problèmes inverses « détermination des équations des courbes jouissant de qualités données », traités après, fournissent l'occasion au grand géomètre de donner plusieurs preuves de sa merveilleuse virtuosité dans le maniement de toutes sortes de calculs. Ses considérations sur la similitude et l'affinité de courbes prouvent qu'il a pressenti le rôle fondamental qu'allait jouer, dans le siècle suivant, le concept de « transformation » dans toute la géométrie.

Les deux chapitres de l'*Introductio* ayant pour but l'application des « intersections de courbes » à la résolution de problèmes déterminés, présentent un caractère tout à fait cartésien. A ce propos qu'il me soit permis de remarquer que c'est surprenant, voir même regrettable, que cet attrayant sujet ait disparu des traités modernes sur l'application de l'algèbre à la géométrie, bien que la substitution des tracés graphiques aux calculs arithmétiques soit un des caractères les plus marqués de la tendance moderne des mathématiques appliquées.

7. — Comme tout ce que je viens de résumer concerne exclusivement les courbes algébriques, on pourrait croire qu'Euler ait voulu exclure de ses considérations les courbes transcendentes. Ce serait une erreur. Non seulement il a montré comme par le seul emploi des coordonnées, et sans l'aide des dérivées, on peut étudier les lignes transcendentes considérées par les anciens (je note, en passant, que les spirales lui offrent l'occasion de faire connaître les coordonnées polaires), mais il aborde encore les « courbes interscendantes » inventées par Leibniz et même des figures étranges, comme celle qui est représentée par l'équation $y = (-1)^x$.

8. — Le beau volume que je viens d'analyser rapidement se clôt par un *Appendix* consacré à la géométrie de l'espace; je pense que le grand géomètre a donné le nom d'*Appendice* à cette section de son traité pour faire comprendre qu'il ne faisait qu'effleurer cette vaste et importante matière sans vouloir l'épuiser. Or, tandis que Clairaut, dans un essai célèbre, avait considéré comme analogues aux courbes planes les lignes à

double courbure, Euler remarque avec raison que, du point de vue que je dirais cartésien, la figure analogue d'une ligne plane est une surface, car c'est une surface qui donne la représentation géométrique d'une fonction à deux variables. Quoique d'après cette considération les trois coordonnées d'un point se présentent sous des aspects différents, Euler ne manque de montrer qu'il s'agit en réalité de trois grandeurs de la même nature. Il expose ensuite les formules qui servent à la transformation des coordonnées et il établit le fait fondamental que « tout plan est représenté par une équation du premier degré » et *vice-versa*. Enfin, il fait connaître les différentes espèces de surfaces représentées par une équation du second degré entre les coordonnées cartésiennes, mais rapidement, sans épuiser l'important sujet. Si donc quelque auteur moderne voulait traiter la géométrie analytique de l'espace en suivant les idées eulériennes (sans s'en tenir à l'*Appendix*), je crois qu'il ferait bien d'étendre à l'espace les raisonnements développés tout au long par le grand mathématicien suisse dans le domaine des courbes planes.

9. — Malgré les détails dans lesquels je suis entré pour mieux établir ma thèse, je crains de n'avoir pas réussi à faire partager aux lecteurs de *L'Enseignement mathématique* mon admiration pour le chef-d'œuvre que je viens d'analyser. Mais je suis certain que si, la lecture de cet article finie, ils recherchent l'*Introductio* dans quelque vieille bibliothèque, ils se convaincront que c'est bien là qu'on trouve la véritable essence de la géométrie analytique. Ils reconnaîtront en même temps que c'est le fait d'avoir donné une place prépondérante, voire même exagérée, aux lignes et aux surfaces du second degré qui a conduit au projet, déjà exécuté d'ailleurs, d'opérer la fusion de la géométrie analytique avec la géométrie projective, deux branches de la géométrie générale qui, dans leurs procédés, n'ont en réalité rien de commun.

Gênes, 1er septembre 1923.

FONCTIONS ELLIPTIQUES ET QUARTIQUES BINODALES[1]

PAR

Marcel Winants (Liége).

Sommaire: Introduction. — Etude d'une certaine équation elliptique. — Une quartique particulière. — Les deux cas suivant le signe du discriminant. — Les deux tangentiels d'un point de la courbe. — Conclusion.

Introduction. — La théorie de la cubique plane non singulière constitue l'une des plus anciennes et des plus importantes applications de la théorie des fonctions elliptiques. Elle est en même temps d'une élégance rare et d'une grande simplicité.

Il serait intéressant d'approprier cet admirable instrument de calcul qu'est l'algorithme des fonctions elliptiques à la recherche des propriétés de la quartique plane à deux points doubles. Cette courbe appartient effectivement au genre un, et son étude est certainement possible par la méthode que nous indiquons. Cette étude offrirait d'ailleurs le plus grand intérêt pour la géométrie descriptive, car on sait que la projection de l'intersection de deux quadriques sur un plan quelconque est ordinairement une quartique binodale.

Les équations paramétriques tout à fait générales se rapportant à la présente question, sont probablement très compliquées et du reste nous n'avons pu les découvrir. Il a donc fallu que nous nous contentions d'examiner un simple cas particulier; c'est celui-là même dont l'étude constitue l'objet de la Note actuelle.

Les mathématiciens pour lesquels *il n'y a de science que du*

---

[1] Ce mémoire est accompagné de 13 figures qui ont été reproduites hors texte sur 2 planches. — *Réd.*

général nous en feront évidemment un grief; notre justification nous sera fournie par feu Pierre Boutroux; dans *L'idéal scientifique des mathématiciens*, Paris, 1920, p. 259, ce savant historien nous a fait comprendre tout l'avantage qui peut résulter pour une théorie générale de l'examen préalable d'un cas très particulier.

§ 1. — *Etude de l'équation* $A + B \cdot p'u + C \cdot p''u = 0$.

1. Dans ce premier paragraphe nous envisagerons des fonctions elliptiques tout à fait quelconques : leurs invariants peuvent donc être imaginaires.

Dans l'équation proposée les coefficients A, B, C sont des constantes auxquelles on donnera n'importe quelles valeurs : leurs rapports mutuels constituent deux paramètres dont nous allons disposer dans un instant.

2. Le premier membre de notre équation admet un pôle quadruple $u = 0$. Dans un parallélogramme des périodes il y a donc quatre racines dont la somme est congrue à *zéro :*

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 \equiv 0 \,. \qquad (1)$$

Si l'on écrit que chacune de ces racines vérifie l'équation

$$A + B \cdot p'u + C \cdot p''u = 0 \,. \qquad (2)$$

puis qu'entre les relations identiques trouvées ainsi l'on élimine A, B, C, on obtient :

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ p'u_1 & p'u_2 & p'u_3 & p'u_4 \\ p''u_1 & p''u_2 & p''u_3 & p''u_4 \end{matrix} \right\| = 0 \,, \qquad (3)$$

et cela nous fournit, entre les quatre racines, deux relations indépendantes des coefficients.

Il est d'ailleurs évident qu'étant donnés quatre arguments différents, tels que deux quelconques d'entre eux ne soient pas homologues, il est à la fois nécessaire et suffisant qu'ils satisfassent aux deux conditions (3) pour qu'on puisse les considérer comme racines d'une certaine équation (2)

3. Nous allons disposer des deux paramètres signalés plus haut [1] de façon que l'équation (2) admette comme racines deux arguments u_1, u_2,-arbitrairement choisis. Et nous allons rechercher les deux autres racines v, w. Elles sont déterminées par l'équation (3) qui peut s'écrire comme il suit :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p'u_1 & p'u_2 & p'v \\ p''u_1 & p''u_2 & p''v \end{vmatrix} = 0 . \qquad (4)$$

Nous nous proposons de résoudre cette dernière équation.

On développe le déterminant (4) suivant les éléments de la troisième colonne et l'on remplace chaque fonction p'' par $6p^2 - \frac{1}{2} g_2$. On trouve:

$$\left(p_1^2 - p_2^2\right) \cdot p'v = \left(p_1' - p_2'\right) \cdot p^2 v + p_1^2 \cdot p_2' - p_2^2 \cdot p_1' \cdot \qquad (5)$$

où l'on a posé :

$$p_1 = pu_1 \ , \quad \cdots \ , \quad p_2' = p'u_2 \ .$$

On élève au carré pour faire disparaître $p'v$, puis on ordonne:

$$\left(p_1' - p'\right)^2 \cdot p^4 v - 4\left(p_1^2 - p_2^2\right)^2 \cdot p^3 v$$
$$+ 2\left(p_1' - p_2'\right)\left(p_1^2 \cdot p_2' - p_2^2 \cdot p_1'\right) \cdot p^2 v + g_2\left(p_1^2 - p_2^2\right)^2 \cdot pv$$
$$+ p_1^4 \cdot \left(4p_2^3 - g_2 \cdot p_2\right) + p_2^4 \cdot \left(4p_1^3 - g_2 \cdot p_1\right) - 2p_1^2 \cdot p_2^2\left(p_1' \cdot p_2' + g_3\right) = 0 \ .$$

Le premier membre de cette équation sera divisé par

$$(pv - p_1)(pv - p_2) = p^2 v - (p_1 + p_2) \cdot pv + p_1 \cdot p_2 \ \cdot$$

Si l'on se reporte à l'équation (4), on verra que la division doit être effectivement possible. L'ayant faite, voici le quotient que l'on obtient :

$$\left(p_1' - p_2'\right)^2 \cdot p^2 v + \left(8p_1^2 \cdot p_2^2 + p_1 \cdot p_2'^2 + p_2 \cdot p_1'^2 - g_2 \cdot p_1^2 - g_2 \cdot p_2^2\right.$$
$$\left. - g_3 \cdot p_1 - g_3 \cdot p_2 - 2p_1 \cdot p_1' \cdot p_2' - 2p_2 \cdot p_1' \cdot p_2'\right) \cdot pv$$
$$+ 4p_1^2 \cdot p_2^2 + 4p_1^2 \cdot p_2^3 - g_2 \cdot p_1^3 - g_2 \cdot p_2^3$$
$$- 2g_3 \cdot p_1 \cdot p_2 - 2p_1 \cdot p_2 \cdot p_1' \cdot p_2' = 0 \ . \qquad (6)$$

L'équation (6), du second degré par rapport à pv, admet comme racines les deux quantités.

$$pv \ , \quad pw \ ,$$

auxquelles l'équation (5) permet de faire correspondre

$$p'v \ , \quad p'w \ .$$

Le problème est ainsi résolu.

4. Ce qui précède prouve à l'évidence une proposition que nous avons avancée plus haut [2] : les deux conditions (3) sont à la fois nécessaires et suffisantes pour que l'on puisse considérer quatre arguments comme racines d'une équation de la forme envisagée (2).

5. Nous allons examiner la même équation d'un tout autre point de vue. Il existe, quels que soient les coefficients A, B, C, deux relations remarquables entre les fonctions p des quatre racines.

Mettons l'équation sous la forme suivante :

$$C \,.\, p''u + A = - B \,.\, p'u \ .$$

Elevons au carré, exprimons p'' et p'^2 en fonction de p, puis ordonnons :

$$36C^2 \,.\, p^4 - 4B^2 \,.\, p^3 + 6C(2A - C \,.\, g_2) \,.\, p^2$$

$$+ B^2 \,.\, g_2 \,.\, p + A^2 - AC \,.\, g_2 + B^2 \,.\, g_3 + \frac{1}{4} C^2 \,.\, g_2^2 = 0 \ . \qquad (7)$$

L'équation (7) fournit quatre valeurs de p à chacune desquelles on peut associer d'abord une valeur de p'', puis par l'intermédiaire de l'équation proposée une valeur de p', ce qui résout définitivement le problème.

6. Pour les racines algébriques p de l'équation (7), voici les fonctions symétriques fondamentales :

$$\left.\begin{aligned}
\Sigma p_r &= \frac{1}{9} \cdot \frac{B^2}{C^2} \ , \\
\Sigma p_r \cdot p_s &= \frac{1}{6}\left(2\frac{A}{C} - g_2\right) \ , \\
\Sigma p_r \cdot p_s \cdot p_t &= - \frac{1}{36} g_2 \cdot \frac{B^2}{C^2} \ , \\
p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4 &= \frac{1}{36}\left(\frac{A^2}{C^2} - \frac{A}{C} \cdot g_2 + \frac{B^2}{C^2}\, g_3 + \frac{1}{4} g_2^2\right)
\end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

En comparant la première et la troisième des relations (8), on obtient d'abord :

$$\Sigma p_r \cdot p_s \cdot p_t = -\frac{1}{4} g_2 \cdot \Sigma p_r ,$$

ce qui peut s'écrire :

$$p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4 \left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \frac{1}{p_4} \right) = -\frac{1}{4} g_2 \cdot (p_1 + p_2 + p_3 + p_4) . \quad (9)$$

De la première et de la deuxième des relations (8), on tire ensuite $\frac{B^2}{C^2}$ et $\frac{A}{C}$ respectivement; on substitue dans la quatrième; après quelques simplifications très faciles, on obtient :

$$\left. \begin{array}{l} 4 p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4 - g_3 (p_1 + p_2 + p_3 + p_4) \cdot \\ = (p_1 \cdot p_2 + p_1 \cdot p_3 + p_1 \cdot p_4 + p_2 \cdot p_3 + p_2 \cdot p_4 + p_3 \cdot p_4)^2 . \end{array} \right\} . \quad (10)$$

Ces équations (9, 10) ne renfermant pas la fonction impaire p' ne sont évidemment pas suffisantes pour que quatre arguments u_1, u_2, u_3, u_4, vérifient une équation de la forme proposée.

§ 2. — *Une quartique particulière.*

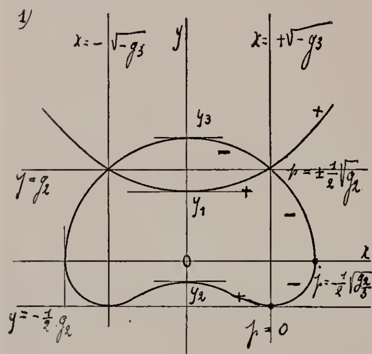
7. A partir de ce deuxième paragraphe les invariants g_2, g_3, des fonctions elliptiques employées seront supposés réels. Nous aurons bientôt à tenir compte du signe du discriminant de ces fonctions :

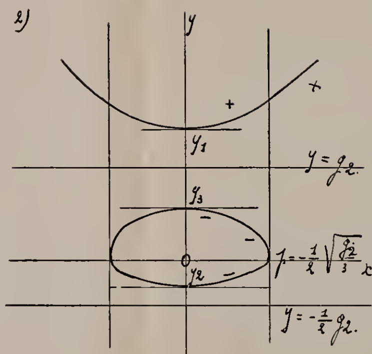
$$\Delta = g_2^3 - 27 g_3^2 . \quad (11)$$

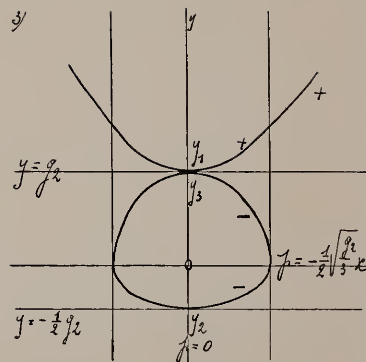
Nous allons étudier la courbe plane définie en coordonnées rectangulaires par les équations paramétriques :

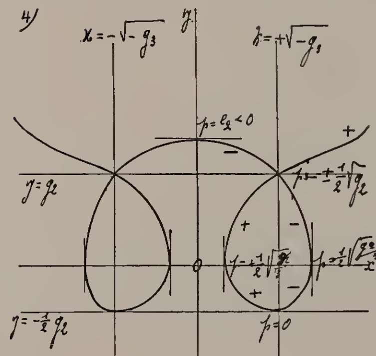
$$x = p' u , \qquad y = p'' u . \quad (12)$$

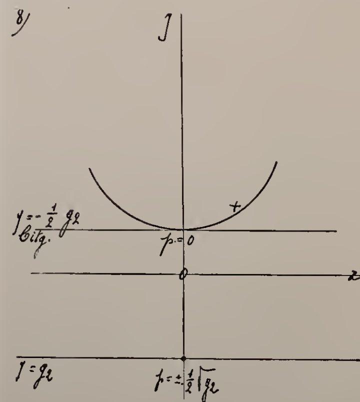
De ces deux équations, il résulte d'abord qu'une valeur de l'argument u détermine un seul point de la courbe, et que réciproquement, les points multiples éventuels étant exceptés, à tout point de la courbe ne répond qu'un seul argument (à part les valeurs homologues, bien entendu).

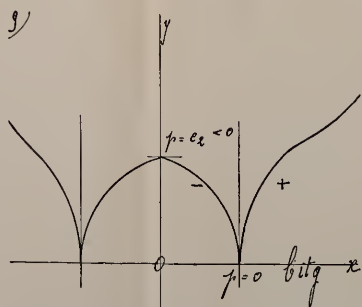

1)
$x = -\sqrt{-g_3}$
y
$x = +\sqrt{-g_3}$
y_3
$y = g_2$
$p = \pm\frac{1}{2}\sqrt{g_2}$
y_1
x
$p = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{g_2}{3}}$
y_2
$y = -\frac{1}{2}g_2$
$p = 0$

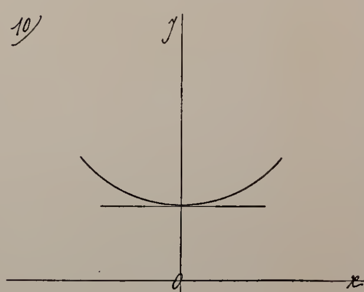

2)
y
y_1
$y = g_2$
y_3
$p = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{g_2}{3}}$
x
y_2
$y = -\frac{1}{2}g_2$

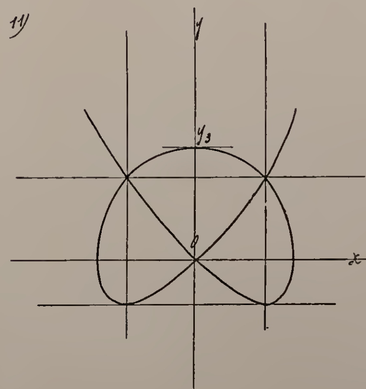

3)
y
$y = g_2$
y_1
y_3
$p = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{g_2}{3}}$
x
$y = -\frac{1}{2}g_2$
y_2
$p = 0$

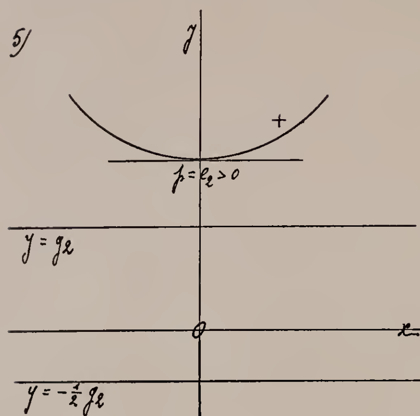

4)
$x = -\sqrt{-g_3}$
y
$x = +\sqrt{-g_3}$
$p = e_2 < 0$
$y = g_2$
$p = \pm\frac{1}{2}\sqrt{g_2}$
x
$y = -\frac{1}{2}g_2$
$p = 0$

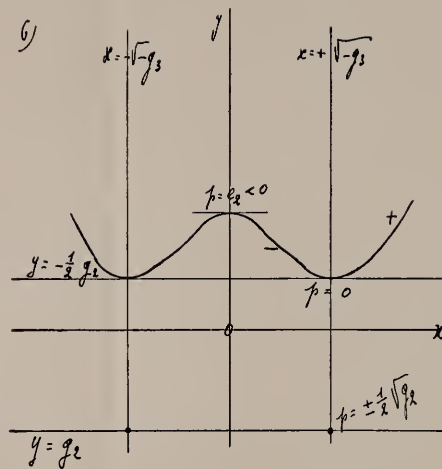

8)
y
$y = -\frac{1}{2}g_2$
bitg.
$p = 0$
x
$y = g_2$
$p = \pm\frac{1}{2}\sqrt{g_2}$

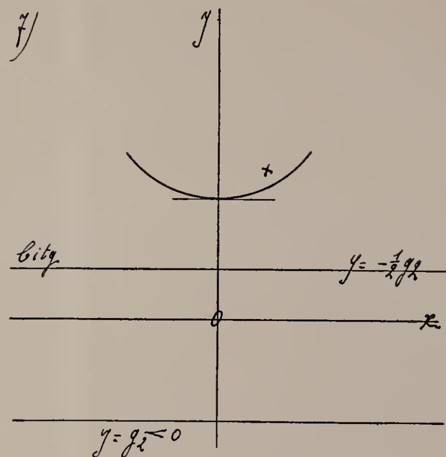

9)
y
$p = e_2 < 0$
$p = 0$
bitg
x

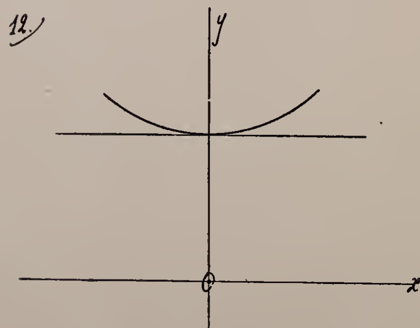

10)
y
x

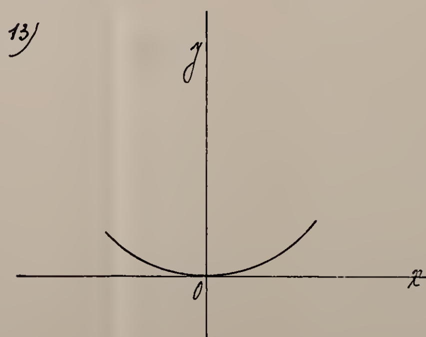

11)
y
y_3
x











$\Delta = g_2^3 - 27 g_3^2$	$\Delta > 0 \rightarrow g_2 > 0$		$g_3 < 0$	1
			$g_3 > 0$	2
			$g_3 = 0$	3
	$\Delta < 0$	$g_2 > 0 \rightarrow g_3 \neq 0$	$g_3 < 0$	4
			$g_3 > 0$	5
		$g_2 < 0$	$g_3 < 0$	6
			$g_3 > 0$	7
			$g_3 = 0$	8
		$g_2 = 0 \rightarrow g_3 \neq 0$	$g_3 < 0$	9
			$g_3 > 0$	10
	$\Delta = 0 \rightarrow g_2 \gtreqless 0$		$e_1 = e_2 > e_3$	11
			$e_1 > e_2 = e_3$	12
			$e_1 = e_2 = e_3$	13

Les équations (12) peuvent s'écrire :

$$\left.\begin{aligned} x^2 &= 4p^3 - g_2 \cdot p - g_3 , \\ y &= 6p^2 - \frac{1}{2} g_2 , \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

d'où l'on déduit directement :

$$2y \cdot p - 3x^2 = 2g_2 \cdot p + 3g_3 .$$

puis

$$pu = p = \frac{3(x^2 + g_3)}{2(y - g_2)} . \qquad (14)$$

On transporte cette valeur dans la seconde des équations (13) et l'on obtient par des calculs faciles

$$(2y + g_2) \cdot (y - g_2)^2 = 27 . (x^2 + g_3)^2 . \qquad (15)$$

8. La courbe envisagée est donc une quartique binodale, ayant les deux points doubles :

$$y = g_2 , \qquad x = \pm \sqrt{- g_3} . \qquad (16)$$

Ces deux points doubles sont imaginaires ou réels suivant que l'invariant g_3 est positif ou négatif.

Quand le discriminant (11) s'évanouit, l'équation (15) montre que l'origine des coordonnées est un troisième point double, et la courbe est alors unicursale.

9. De l'équation cartésienne (15) ou des équations paramétriques (12) résulte la symétrie de notre quartique par rapport à l'axe des y. Semblablement, on aperçoit l'existence d'une direction asymptotique quadruple parallèle au même axe des y.

De la formule (14) on déduit aisément que la fonction pu reste réelle tout le long de la courbe, sauf peut-être aux points doubles, pour lesquels pu prend une valeur indéterminée, ainsi que l'égalité (14) et les relations (16) le rendent manifeste. Si pu devient effectivement imaginaire en un point double, celui-ci doit être un point isolé; car en tout point de la courbe, infiniment voisin d'un point crunodal ou cuspidal, la quantité pu prend une valeur réelle.

De la deuxième des formules (13), il résulte alors que l'ordonnée y admet le minimum $-\frac{1}{2}g_2$ corrrespondant à l'annulation de p.

De l'équation (15), on déduit encore l'existence d'une bitangente $\left(y = -\frac{1}{2}g_2\right)$ dont les points de contact ont mêmes abcisses $(\pm\sqrt{-g_3})$ que les points doubles. Voyez les formules (16).

De tout ce que l'on vient de développer on conclut que la courbe est située tout entière au dessus de sa bitangente, sauf qu'il se pourrait qu'il y eût exception pour des points doubles isolés.

Et c'est ce qui se passe effectivement quand l'invariant g_2 est négatif, puisque alors, en vertu de (16), l'ordonnée g_2 des points doubles est inférieure au minimum $-\frac{1}{2}g_2$ de y. L'hypothèse $g_2 < 0$ conduit en conséquence à des courbes acnodales (fig. 6, 7, 8).

10. Des équations paramétriques (12) on tire cette relation

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p'''u}{p''u} = \frac{12pu \cdot p'u}{p''u}, \tag{17}$$

qui peut s'écrire :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{12pu \cdot x}{y}. \tag{18}$$

Donc en tout point où la courbe rencontre l'un des axes coordonnés, la tangente est parallèle à l'autre axe.

Aux points où la quartique touche sa bitangente

$$\left(y = -\frac{1}{2}g_2, \quad \text{donc} \quad p = 0\right),$$

la tangente, qui est précisément cette bitangente elle-même, est parallèle à l'axe des x.

11. Pour déterminer la classe de la courbe, essayons de lui mener une tangente par un point quelconque (α, β) de son plan. Les arguments afférents aux points de contact seront les racines de l'équation

$$\beta - p''u = \frac{12pu \cdot p'u}{p''u} \cdot (\alpha - p'u),$$

qui résulte des formules (12, 17) et qui peut s'écrire :

$$(\beta - p''u) \cdot p''u + 12pu \cdot p'^2u = 12\alpha \cdot pu \cdot p'u \ . \qquad (19)$$

On élève au carré, ce qui fournit visiblement une équation du huitième degré en pu. A chacune des racines de cette équation correspond, en vertu de (19), une et une seule valeur de $p'u$, puisque le premier membre de cette équation (19) est rationnel par rapport à pu.

La quartique envisagée est donc de *huitième classe*, ce qui doit être, d'ailleurs, d'après la théorie des caractéristiques plückériennes.

Et d'autre part cette propriété n'est qu'un simple cas particulier d'une proposition très générale: quand pour une certaine courbe les coordonnées ponctuelles sont exprimables en fonctions elliptiques d'un même argument, la classe de cette courbe est toujours double de son ordre. (Halphen, *Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications*, deuxième volume, p. 415.)

Une restriction s'impose pourtant. Si l'invariant g_2 s'annule, la dérivée $p''u$ devient égale à $6p^2u$, et les deux membres de l'équation (19) sont divisibles par pu. L'équation finale admettra donc la racine double: $p^2u = 0$. Les points de contact de la courbe avec sa bitangente sont alors des points de rebroussement, la quartique est bicuspidale, et sa classe tombe au nombre *six*. Et la formule (18) montre bien qu'en supposant à la fois $pu = 0$, $y = 0$, on rend indéterminé le coefficient angulaire $\frac{dy}{dx}$.

L'hypothèse $g_2 = 0$ conduit en conséquence à des courbes cuspidales (fig. 9, 10).

12. Pour en finir avec les généralités, nous allons procéder à la recherche directe des points doubles [7, 8].

Un point double étant un point par lequel la courbe passe deux fois, il faut qu'on ait

$$p'u = p'v \ , \quad p''u = p''v \ , \qquad (20)$$

sans que les arguments u, v soient homologues. La seconde équation entraîne

$$p^2u = p^2v \ ;$$

mais il est impossible qu'on ait $pu = pv$, car cette égalité combinée à la première équation (20) conduirait à $u \equiv v$, et nous venons de dire que cela ne devait pas être. Donc:

$$pu = -pv .$$

La première équation (20) devient alors:

$$4p^3u - g_2 \; pu = 4p^3v - g_2 \cdot pv = -(4p^3u - g_2 \cdot pu) = 0 .$$

ou

$$pu(4p^2u - g_2) = 0 .$$

L'hypothèse $pu = 0$ aurait pour conséquence $pu = pv$; elle est donc à rejeter. Il reste:

$$4p^2u - g_2 = 0 ,$$

c'est-à-dire:

$$pu = \pm \frac{1}{2} \sqrt{g_2} = -pv . \qquad (21)$$

Les équations (12) donnent alors:

$$x = \pm \sqrt{-g_3} , \quad y = g_2 ,$$

et, de cette manière, nous retrouvons bien les formules (16).

Si l'invariant g_2 est négatif, la quartique est biacnodale [9], et nous voyons qu'en des points doubles isolés, pu prend effectivement des valeurs imaginaires. Plus haut [9], nous avons énoncé déjà la réciproque de cette dernière proposition.

Si $g_2 = 0$, les deux valeurs (21) que pu prend en chaque point double se confondent, et ces points sont donc des rebroussements [11].

De la relation $pu = -pv$ combinée à la formule (18) résulte cette propriété qu'en chacun des points doubles les deux tangentes ont des directions symétriques par rapport aux axes coordonnés.

§ 3. — *Les deux cas suivant le signe du discriminant.*

13. Après toutes les considérations générales qui précèdent, nous allons distinguer deux cas principaux suivant que le discriminant

$$\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$$

est positif ou négatif. Toutes les notations que nous emploierons sont empruntées au premier volume du *Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications*, de HALPHEN, auquel nous renverrons quelquefois.

14. Ainsi que nous en avons fait plus haut, la remarque les deux fonctions *pu*, *p'u* sont réelles tout le long de la courbe, sauf aux points doubles isolés [9, 12].

Dans le cas du discriminant positif, *pu* devra donc satisfaire à l'une des relations:

$$\Delta > 0 : e_3 \leqq pu \leqq e_2 , \qquad \text{ou} \qquad pu \geqq e_1 ; \tag{22}$$

et, dans le cas contraire:

$$\Delta < 0 : pu \geqq e_2 . \tag{23}$$

De (22) nous conclurons que la quartique est bipartite: sur l'une des deux parties, *pu* varie entre les deux plus petites racines et conserve par conséquent une valeur toujours finie; des formules (13) il résulte que les coordonnées x, y correspondantes sont également finies: nous obtiendrons donc un ovale fermé; sur l'autre partie *pu* sera égale ou supérieure à la plus grande racine e_1 et pourra croître au-delà de toute limite: nous aurons une branche infinie sur laquelle *pu* ne pourra prendre que des valeurs positives, puisque

$$pu \geqq e_1 > 0 .$$

Comme aux points doubles (21), nous avons:

$$pu = \pm \frac{1}{2} \sqrt{g_2} ,$$

nous voyons que l'ovale passe aux points doubles.

De (23) il résulte au contraire que, dans le cas d'un discriminant négatif, la quartique étudiée est unipartite.

15. Les points de rencontre de la courbe avec l'axe des y sont déterminés par l'équation.

$$x = p'u = 0 .$$

La quartique bipartite ($\Delta > 0$) rencontre l'axe des y en trois points réels pour lesquels on a:

$$p_1 = e_1 , \quad p_2 = e_2 , \quad p_3 = e_3 ;$$

le premier de ces points se trouve sur la branche infinie ($pu \geqq e_1$); tandis que les deux autres appartiennent à l'ovale.

Si g_3 est négatif (fig. 1), les racines e_1, e_2 sont positives, tandis que e_3 est négative; on a donc:

$$|e_3| > e_1 > e_2 ;$$

les points de rencontre de la quartique avec l'axe des y ont des ordonnées (13) telles que

$$y_3 > y_1 > y_2 .$$

Si g_3 est positif (fig. 2), on trouve de la même façon:

$$y_1 > y_3 > y_2 .$$

Enfin, si g_3 est nul (fig. 3), les racines e_1, e_3 sont égales et de signes contraires; on a:

$$y_1 = y_3 > y_2 ;$$

la courbe possède un contact avec elle-même.

La quartique unipartite ($\Delta < 0$) ne rencontre l'axe des ordonnées qu'en un seul point réel pour lequel on a:

$$pu = p_2 = e_2 .$$

16. Les points où l'axe des x coupe la quartique dépendent de l'équation

$$y = p''u = 0 .$$

dont la théorie est classique (H., pp. 106–109).

Dans le cas du discriminant positif, cette équation fournit toujours un, mais un seul système de valeurs de pu, $p'u$, simultanément réelles (H., p. 107):

$$pu = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{g_2}{3}} < 0 .$$

La courbe bipartite rencontre donc l'axe des x en deux points réels situés sur l'ovale, puisque pu prend une valeur négative (fig. 1, 2, 3).

Dans le cas du discriminant négatif, un très grand nombre d'éventualités se présentent. Nous nous contenterons ici d'exa-

miner celles où l'on a: $g_3 < 0$; alors les points doubles sont réels.

Si g_2 est positif, la quartique est bicrunodale et rencontre l'axe des x en quatre points réels et distincts (fig. 4); mais si g_2 est négatif — ce qui ne peut jamais avoir lieu dans le cas d'un discriminant positif — la quartique est biacnodale (fig. 6) et ne rencontre l'axe des x en aucun point réel (H., p. 109); si g_2 est nul (fig. 9), la quartique est bicuspidale, et rencontre l'axe des x en ses deux points doubles.

17. Aux figures nous avons joint un tableau renfermant l'énumération de tous les cas possibles: il y en a treize. Les numéros de la dernière colonne correspondent aux figures.

Sur ces figures, nous avons indiqué par $+$ ou par $-$ le signe de la valeur réelle de pu. Ces différents signes peuvent se déterminer par le moyen de la formule (18).

Les trois dernières figures représentent des quartiques unicursales; elles correspondent à la dégénérescence des fonctions elliptiques.

18. Les relations (3) du début de notre article constituent les deux conditions nécessaires et suffisantes pour que quatre points de la quartique soient collinéaires. On a coupé cette courbe par la droite

$$A + Bx + Cy = 0 .$$

Ce qui complique beaucoup la théorie de la quartique binodale, et du reste la théorie de la quartique générale, relativement à celle de la cubique plane, c'est précisément ce fait qu'entre les paramètres déterminateurs de quatre points collinéaires, il doit exister deux relations différentes.

Le premier problème que nous avons résolu [3] peut s'énoncer comme il suit: on joint deux points de la courbe et l'on se propose de déterminer les deux autres points où la droite obtenue rencontre la quartique.

§ 4. — *Les deux tangentiels d'un point de la courbe.*

19. La tangente en un point u de la quartique rencontre la courbe en deux autres points (v, w) que nous-même avons

appelés les *tangentiels* du point de contact. (Marcel WINANTS, *Interséquants et tangentiels*, Bulletins de la Classe des Sciences de l'Académie royale de Belgique, 3 mars 1923, pp. 107–115). Nous nous proposons de calculer v, w, connaissant u.

Ce problème peut être envisagé comme un cas limité de celui que nous signalions tout à la fin du paragraphe précédent.

L'hypothèse $u_1 = u_2 = u$ rend l'équation (6) indéterminée, mais on pourrait lever cette indétermination par le moyen de la règle de L'Hospital.

20. Cependant nous allons employer une tout autre méthode: nous égalerons les coefficients angulaires de la tangente en u et de la droite uv:

$$\frac{p'''u}{p''u} = \frac{p''v - p''u}{p'v - p'u} \,. \tag{24}$$

Cette équation en v admet comme racines les arguments inconnus v, w. Isolons $p'v$, puis élevons au carré; exprimons p'^2v et $p''v$ en fonction de pv. Faisons disparaître aussi p'^2u et $p''u$. On obtient finalement l'équation:

$$\begin{aligned}
&\left(36p^4u - 6g_2 \cdot p^2u + \frac{1}{4}g_2^2\right) \cdot p^4v \\
&- (64p^5u - 16g_2 \cdot p^3u - 16g_3 \cdot p^2u) \cdot p^3v \\
&+ \left(24p^6u - 20g_2 \cdot p^4u - 24g_3 \cdot p^3u + \frac{3}{2}g_2^2 \cdot p^2u + 2g_2 \cdot g_3 \cdot pu\right) \cdot p^2v \\
&+ (16g_2 \cdot p^5u - 4g_2^2 \cdot p^3u - 4g_2 \cdot g_3 \cdot p^2u) \cdot pv \\
&+ 4p^8u - 6g_2 \cdot p^6u + 8g_3 \cdot p^5u + \frac{9}{4}g_2^2 \cdot p^4u + 2g_2 \cdot g_3 p^3u = 0 \,.
\end{aligned}$$

Le premier membre de cette équation doit être divisible par

$$(pv - pu)^2 \;;$$

il l'est effectivement. Voici ce que l'on trouve pour quotient:

$$\begin{aligned}
&\left(36p^4u - 6g_2 \cdot p^2u + \frac{1}{4}g_2^2\right) \cdot p^2v \\
&\qquad + \left(8p^5u + 4g_2 \cdot p^3u + 16g_3 \cdot p^2u + \frac{1}{2}g_2^2 \cdot pu\right) \cdot pv \\
&+ 4p^6u - 6g_2 \cdot p^4u + 8g_3 \cdot p^3u + \frac{9}{4}g_2^2 \cdot p^2u + 2g_2 \cdot g_3 \cdot pu = 0 \,.
\end{aligned} \tag{25}$$

Cette équation (25) est ce que deviendrait l'équation (6) si l'on y introduisait l'hypothèse $u_1 = u_2 = u$ et qu'on levât l'indétermination résultante en recourant à la règle de L'Hospital.

21. L'équation (25) fournit, pour pv, deux valeurs à chacune desquelles l'équation (24) fait correspondre une et une seule valeur de $p'v$.

Le problème de la détermination des tangentiels se trouve ainsi complètement résolu.

22. Pour qu'un certain point u soit un point d'inflexion, il faut que l'un de ses deux tangentiels coïncide avec lui. L'équation (25) en pv doit admettre la racine $pv = pu$. Remplaçons-y donc pv par pu, et nous obtenons une équation du sixième degré relativement à pu. Mais l'axe des y est un axe de symétrie. La quartique étudiée possède ainsi douze points inflexionnels, et c'est encore une fois conforme à la théorie des nombres de Plücker.

23. Soit u l'un des points de contact d'une bitangente. L'équation (25) en pv doit avoir ses deux racines égales, condition que l'on réalisera par l'annulation du discriminant de cette équation. Nous obtenons de la sorte une équation du dixième degré par rapport à pu.

Seulement les formules de Plücker *indiquent huit bitangentes et non pas dix. Ici nous nous trouvons en présence d'une difficulté que nous n'avons pas su résoudre. Nous serions particulièrement heureux si quelque lecteur de l'*Enseignement mathématique *pouvait nous apporter la clef de cette énigme.*

A titre de vérification nous ferons cependant observer que l'équation du dixième degré dont il vient d'être question, a son premier membre divisible par pu. Et nous savons bien [10] que l'égalité $pu = 0$ convient aux deux points de contact d'une certaine bitangente.

24. Une méthode absolument différente pourrait nous fournir les résultats obtenus aux deux numéros précédents. Il suffira que nous nous servions convenablement des formules (1, 9, 10). Les calculs sont malheureusement fort longs, et la discussion des résultats trouvés nous paraît très ardue. Aussi nous contenterons-nous de donner quelques indications sommaires relativement à cette nouvelle méthode.

Dans la formule (1) introduisons l'hypothèse

$$u_1 = u_2 = u\,, \qquad u_3 = u_4 = v\,;$$

il viendra:

$$2u \equiv -2v\,,$$

pour les deux contacts d'une bitangente, et par conséquent:

$$p2u = p2v\,,$$

ou (H., p. 95):

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{p^4 u + \frac{1}{2} g_2 \cdot p^2 u + 2g_3 \cdot pu + \frac{1}{16} \cdot g_2^2}{4p^3 u - g_2 \cdot pu - g_3} \\ = \dfrac{p^4 v + \frac{1}{2} g_2 \cdot p^2 v + 2g_3 \cdot pv + \frac{1}{16} \cdot g_2^2}{4p^3 v - g_2 \cdot pv - g_3} \end{array}\right\} \qquad (26)$$

La relation (9) devient de même:

$$(pu + pv)\left(pu \cdot pv + \frac{1}{4} g_2\right) = 0\,,$$

et se décompose en deux autres:

$$pv = -pu\,, \qquad \text{ou} \qquad pv = -\frac{g_2}{4pu}\,. \qquad (27)$$

On transporte chacune de ces valeurs de pv, soit dans l'équation (10) modifiée par l'hypthèse actuelle, soit dans l'équation (26). Les calculs sont extraordinairement compliqués.

La fonction pu ne prend, le long de la courbe, que des valeurs réelles [9]; d'autre part, dans le cas d'un discriminant positif, l'invariant g_2 lui-même est nécessairement positif [16]; les formules (27) montrent alors que pour toute bitangente la fonction pu est nulle ou négative en l'un des points de contact; donc [14], dans le cas de la quartique bipartite, n'importe quelle bitangente réelle touche l'ovale au moins une fois (fig. 1, 2, 3).

25. Dans notre article *Interséquants et tangentiels* (loc. cit., p. 108), nous avons démontré que *si quatre points d'une quartique sont collinéaires, leurs huit tangentiels appartiennent à une même conique*. Nous aurions voulu déduire cette propriété, pour le cas particulier des quartiques binodales, de leur représentation para-

métrique au moyen des fonctions elliptiques. Malheureusement les calculs sont si extraordinairement laborieux qu'il nous faut y renoncer, pour le moment tout au moins.

CONCLUSION. — A part les quelques difficultés que nous avons signalées dans les trois derniers numéros, nous voyons toutes les propriétés importantes de la courbe découler, presque automatiquement, de la représentation paramétrique adoptée.

Mais en dehors de son intérêt possible pour la géométrie algébrique, le présent article pourrait être envisagé comme un simple exercice d'analyse: la représentation graphique de la relation qui lie entre elles, dans le domaine réel des applications, les deux premières dérivées de la fonction elliptique fondamentale.

Enfin nous avons interprété, sur un même dessin, les zéros de la fonction pu et de ses deux premières dérivées (et même de la troisième puisque l'on a: $p''' = 12\, p \,.\, p'$).

Liége (Université), le 5 novembre 1923.

SUR L'INTÉGRATION DE QUELQUES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU SECOND ORDRE

PAR

l'Abbé LAINÉ (Angers).

---

1. Considérons l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$\frac{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma}{2} y'' + (ax + b) y' + \lambda y = 0 \,. \qquad (1)$$

Pour simplifier, nous poserons

$$\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma = 2X \,.$$

Dérivons n fois l'équation (1); nous aurons

$$X y^{(n+2)} + [(a + n\alpha) x + b + n\beta] y^{(n+1)} + \left[na + \lambda + \frac{n(n-1)}{2}\alpha \right] y^{(n)} = 0 \,.$$

Donc si l'équation du second degré en t

$$\alpha\frac{t(t-1)}{2} + at + \lambda = 0 \qquad (2)$$

a une racine entière positive, l'intégration se simplifiera. Ceci exige que les deux coefficients α et a ne soient pas nuls simultanément, condition que nous supposerons satisfaite et qui exclut en particulier les équations de Bessel.

Soit dans ce cas n la plus petite racine entière positive de l'équation (2). Nous aurons, par dérivations successives:

$$\begin{aligned} &Xy'' + (ax+b)y' - n\left(a + \frac{n-1}{2}\alpha\right)y = 0 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &Xy^{(m+2)} + [(a+m\alpha)x + b + m\beta]y^{(m+1)} - (n-m)\left(a + \frac{n+m-1}{2}\alpha\right)y^{(m)} = 0 \qquad (3) \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &Xy^{(n+1)} + \{[a+(n-1)\alpha]x + b + (n-1)\beta\}y^{(n)} - [a+(n-1)\alpha]y^{(n-1)} = 0 \\ &Xy^{(n+2)} + [(a+n\alpha)x + b + n\beta]y^{(n+1)} = 0 \end{aligned}$$

2. Considérons la relation de récurrence.

$$XU_{m+2} + [(a+m\alpha)x + b + m\beta]U_{m+1} - (n-m)\left(a + \frac{n+m-1}{2}\alpha\right)U_m = 0, \qquad (4)$$

où m prend successivement les valeurs $n-1$, $n-2\dots2, 1, 0$. Je dis que U_{n+1} et U_n étant choisis arbitrairement, $U_{n-1}\dots U_0$ sont bien déterminés. En effet, pour qu'il en fût autrement, il faudrait que le coefficient $a + \frac{n+m-1}{2}\alpha$ pût s'annuler pour une des valeurs données à m; on aurait donc, pour cette valeur:

$$a = -\frac{n+m-1}{2}\alpha, \qquad \lambda = \frac{nm}{2}\alpha.$$

Par suite, α étant nécessairement différent de 0, l'équation (2) s'écrirait

$$t^2 - (n+m)t + mn = 0,$$

et elle aurait une racine entière positive $m<n$, contrairement à l'hypothèse.

Posons en particulier $P_{n+1} = 1$, $P_n = 0$; la relation (4) définit alors une suite de polynômes P_{n+1}, P_n ..., P_1, P_0, dont le dernier est au plus de degré $n+1$.

Posons de même $Q_{n+1} = 0$, $Q_n = 1$; la relation (4) définit encore une suite de polynômes Q_{n+1}, Q_n, ... Q_1, Q_0, dont le dernier est au plus de degré n.

3. Soit maintenant v une certaine fonction de x, telle que la dernière équation (3) soit satisfaite si l'on fait $y^{(n)} = v$; posons en outre $y^{(n+1)} = \frac{dv}{dx} = u$. L'avant-dernière équation (3) donne alors

$$y^{(n-1)} = P_{n-1}u + Q_{n-1}v\ ,$$

et, d'après la définition même des polynômes P_m et Q_m, on voit aisément qu'en remontant de proche en proche la chaîne des équations (3), on aura

$$y^{(m)} = P_m u + Q_m v\ .$$

On en déduit que la fonction

$$y = P_0 u + Q_0 v$$

est une intégrale de l'équation (1).

On peut évidemment prendre $v=1$, d'où $u=0$, ce qui montre que l'équation (1) admet comme intégrale particulière un polynôme Q_0 de degré au plus égal à n, n désignant toujours la plus petite racine entière positive de l'équation (2).

En prenant pour u une intégrale non nulle de l'équation

$$X\frac{du}{dx} + [(a + n\alpha)x + b + n\beta]u = 0\ ,$$

on pourra obtenir, par le procédé ci-dessus, une intégrale particulière de l'équation (1), évidemment distincte de la première. Ainsi on aura en définitive l'intégrale générale par une seule quadrature.

4. Examinons successivement les différentes formes du polynôme $X(x) = \frac{1}{2}(\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma)$, supposé à coefficients réels.

1er *cas.* — Soit d'abord $\alpha = \beta = 0$. On peut mettre l'équation (1) sous la forme

$$y'' + axy' + \lambda y = 0\ ;$$

l'équation (2) est du premier degré, et pour que la méthode exposée s'applique, il faut et il suffit que $-\frac{\lambda}{a}$ soit un entier positif n. La dernière équation (3) s'écrit alors

$$y^{(n+2)} + axy^{(n+1)} = 0\ ;$$

on peut donc prendre

$$u = e^{-a\frac{x^2}{2}}\ , \qquad v = \int_{x_0}^{x} e^{-a\frac{x^2}{2}}\, dx\ ,$$

et l'intégrale générale s'écrit

$$y = Ae^{-a\frac{x^2}{2}} P_0(x) + \left(A\int_{x_0}^{x} e^{-a\frac{x^2}{2}}\, dx + B\right) Q_0(x)\ ,$$

P_0 et Q_0 désignant des polynômes de degrés $n - 1$ et n respectivement.

2me *cas.* — Si α est nul et β différent de 0, on peut mettre l'équation (1) sous la forme

$$xy'' + (\gamma - x)y' - \alpha y = 0\ ;$$

la méthode exposée s'applique si $-\alpha$ est un entier positif n. L'intégrale générale s'écrit alors

$$y = Ax^{-\gamma-n} e^x P_0(x) + \left(A\int_{x_0}^{x} x^{-\gamma-n} e^x\, dx + B\right) Q_0(x)\ ,$$

P_0 et Q_0 désignant des polynômes de degré n. En particulier, si γ est un entier inférieur ou égal à $-n$, on pourra faire disparaître le signe $\int$.

3me *cas.* — Supposons enfin $\alpha \neq 0$. La méthode s'applique si l'équation (2), qui est alors du second degré, a au moins une racine entière positive; nous désignerons toujours par n la plus petite racine entière positive de l'équation (2).

I. *Le polynôme* X *a ses racines égales.* L'équation (1) peut alors se mettre sous la forme

$$\frac{x^2}{2}y'' + (ax + b)y' + \lambda y = 0 ,$$

et son intégrale générale s'écrit

$$y = \mathrm{A}x^{-2(a+n)}e^{\frac{2b}{x}}\mathrm{P}_0(x) + \left[\mathrm{A}\int_{x_0}^{x} x^{-2(a+n)}e^{\frac{2b}{x}}dx + \mathrm{B}\right]\mathrm{Q}_0(x) .$$

En particulier, si $2(a+n-1)$ est un entier positif, ou si b est nul (équation d'Euler), on pourra faire disparaître le signe $\int$.

II. *Le polynôme* X *a ses racines réelles et inégales.* — L'équation (1) peut alors s'écrire

$$\frac{x^2-1}{2}y'' + (ax + b)y' + \lambda y = 0 ,$$

et son intégrale générale a la forme

$$y = \mathrm{A}(x+1)^{-a+b-n}(x-1)^{-a-b-n}\mathrm{P}_0(x)$$
$$+ \left[\mathrm{A}\int_{x_0}^{x}(x+1)^{-a+b-n}(x-1)^{-a-b-n}dx + \mathrm{B}\right]\mathrm{Q}_0(x) .$$

On pourra faire disparaître le signe $\int$ si l'un des 3 nombres $a+b$, $a-b$, $2a$, est entier; c'est ce qui a lieu en particulier pour l'équation

$$\frac{x^2-1}{2}y'' + xy' - \frac{n(n+1)}{2}y = 0 ,$$

à laquelle satisfait le polynôme X_n de Legendre.

III. *Le polynôme* X *a ses racines imaginaires.* — L'équation (1) peut alors s'écrire

$$\frac{x^2+1}{2}y'' + (ax + b)y' + \lambda y = 0 ,$$

et son intégrale générale a la forme

$$y = \mathrm{A}(1+x^2)^{-a-n}e^{-2b\,\mathrm{arc\,tg}\,x}\mathrm{P}_0(x)$$
$$+ \left[\mathrm{A}\int_{x^0}^{x}(1+x^2)^{-a-n}e^{-2b\,\mathrm{arc\,tg}\,x}dx + \mathrm{B}\right]\mathrm{Q}_0(x) .$$

On pourra faire disparaître le signe $\int$ si $2(a+n-1)$ est un entier positif.

5. La méthode qui précède est susceptible de diverses extensions. Faisons dans l'équation (1) le changement de variable $y = e^{\int u dx} z$, où u et z sont deux fonctions indéterminées. L'équation (1) s'écrira

$$Xz'' + z'(2uX + ax + b) + z[X(u' + u^2) + u(ax + b) + \lambda] = 0 . \quad (5)$$

Pour que l'équation (5) ait même forme que (1), il faut et il suffit que l'on puisse déterminer 3 constantes A, B, C, telles que l'on ait identiquement

$$uX = Ax + B \qquad X(u^2 + u') + u(ax + b) = C . \quad (6)$$

En posant pour simplifier $A - C = -2D$, on trouve que les équations (6) sont équivalentes au système

$$A(A + a - \alpha) = D\alpha , \qquad B(B + b - \beta) = D\gamma ,$$
$$A(B + b - \beta) + B(A + a - \alpha) = 2D\beta . \quad (7)$$

Pour continuer la résolution, il est plus simple d'examiner séparément les différents types signalés au N° 4.

6. 1[er] *cas.* — Si l'équation (1) a la forme

$$y'' + axy' + \lambda y = 0 , \quad (8)$$

on aura $X=1$, $\alpha = \beta = b = 0$. Le système (7) donne alors, si on écarte la solution $A = B = 0$:

$$A = -a , \quad B = 0 , \quad D = 0 , \quad C = -a ;$$

le changement de variable $y = e^{-a\frac{x^2}{2}} z$ conduit donc de l'équation (8) à l'équation

$$z'' - axz' + (\lambda - a)z = 0 :$$

la méthode s'applique à l'équation ci-dessus quand $\frac{\lambda}{a}$ est un entier positif. Donc quand $\frac{\lambda}{a}$ est un entier quelconque, l'équation (8) s'intègre au moyen de la seule quadrature $\int e^{-ax^2} dx$.

On peut observer que, quel que soit $\frac{\lambda}{a}$, les séries entières

$$H_1(a, \lambda; x) = 1 - \lambda\frac{x^2}{2!} + \lambda(\lambda + 2a)\frac{x^4}{4!} - \lambda(\lambda + 2a)(\lambda + 4a)\frac{x^6}{6!} + \dots,$$

$$H_2(a, \lambda; x) = x - (\lambda + a)\frac{x^3}{3!} + (\lambda + a)(\lambda + 3a)\frac{x^5}{5!} - \dots,$$

qui sont convergentes dans tout le plan, satisfont à l'équation (8) et font ainsi connaître son intégrale générale. Les considérations qui précèdent mettent en outre en évidence les relations fonctionnelles

$$H_1(a, \lambda; x) = e^{-a\frac{x^2}{2}} H_1(-a, \lambda - a; x),$$

$$H_2(a, \lambda; x) = e^{-a\frac{x^2}{2}} H_2(-a, \lambda - a; x);$$

enfin on a visiblement

$$H_1(0, \lambda; x) = \cos x\sqrt{\lambda}, \qquad H_2(0, \lambda; x) = \frac{\sin x\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}.$$

7. — 2me *cas*. — Si l'équation (1) a la forme

$$xy'' + (\gamma - x)y' - \alpha y = 0, \tag{9}$$

le système (7) s'écrit

$$A(A-1) = 0, \quad B(B+\gamma-1) = 0, \quad A(B+\gamma-1) + B(A-1) = 2D;$$

il admet 3 solutions:

1° $A = 0$, $B = 1 - \gamma$, $2D = \gamma - 1 = C$; le changement de variable $y = x^{1-\gamma}z$ ramène l'équation (9) à la forme

$$xz'' + (2 - \gamma - x)z' - (\alpha + 1 - \gamma)z = 0;$$

la méthode s'appliquera à cette équation si $\gamma - \alpha$ est un entier positif.

2° $A = 1$, $B = 0$, $2D = \gamma - 1$, d'où $C = \gamma$; le changement de variable $y = e^x z$ ramène l'équation (9) à la forme

$$xz'' + (x + \gamma)z' - (\alpha - \gamma)z = 0;$$

la méthode s'applique encore si $\gamma - \alpha$ est nul ou entier négatif.

3° $A = 1$, $B = 1 - \gamma$, $2D = 0$, d'où $C = 1$; le changement de variable $y = x^{1-\gamma} e^x z$ ramène l'équation (9) à la forme

$$xz'' + (2 - \gamma + x)z' - (\alpha - 1)z = 0 ;$$

la méthode s'applique donc si α est un entier positif.

En résumé, l'équation (9) s'intègre par une quadrature pourvu que l'un des deux nombres α et $\gamma - \alpha$ soit entier ou nul. On voit aisément que si ces 2 nombres sont entiers et de même signe, l'intégration s'achève sans quadrature.

On sait[1] que si γ n'est pas un nombre entier, l'intégrale générale de cette équation s'écrit

$$y = AG(\alpha, \gamma; x) + Bx^{1-\gamma} G(\alpha + 1 - \gamma, 2 - \gamma; x) ,$$

$G(\alpha, \gamma; x)$ désignant la série entière

$$1 + \frac{\alpha}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha + 1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma + 1)} x^2 + \ldots$$

convergente dans tout le plan. Au moyen des changements de variable indiqués, on met en évidence la relation fonctionnelle

$$G(\gamma - \alpha, \gamma; x) = e^x G(\alpha, \gamma; -x) ,$$

qui est évidemment valable pourvu que γ ne soit pas nul ou entier négatif ; on en déduit en particulier, en désignant par n un entier positif,

$$G(\gamma + n, \gamma; x) = e^x R_n(x) ,$$

R_n désignant un polynôme en x de degré n.

8. — 3me *cas*. — Sans entrer dans le détail du calcul, nous indiquerons que le changement de variable

$$y = e^{\int 2 \frac{(1-a)x - b}{x^2 + \gamma} dx} z$$

conduit de l'équation

$$\frac{x^2 + \gamma}{2} y'' + (ax + b)y' + \lambda y = 0 \qquad (10)$$

à l'équation

$$\frac{x^2 + \gamma}{2} z'' + [2(a - x) - b] z' + (\lambda + 1 - a) z = 0 . \qquad (11)$$

[1] Cf. GOURSAT. *Cours d'Analyse*, t. 2, p. 464 (2e édition).

Les équations en t associées aux équations (10) et (11) s'écrivent

$$t^2 + (2a - 1)t + 2\lambda = 0 , \qquad (12)$$

$$t^2 + (3 - 2a)t + 2(\lambda + 1 - a) = 0 , \qquad (13)$$

et il est clair que si l'équation (12) admet la racine $t = n$, l'équation (13) admet la racine $t = -(n+1)$. Ainsi, pourvu que l'équation (12) ait une racine entière, l'équation (10) s'intègrera par une quadrature. Si les 2 racines sont entières et de signes contraires, on aura l'intégrale générale sans quadrature.

9. — Le cas où les racines de X sont réelles présente une particularité; l'équation différentielle considérée n'est alors autre que l'équation de Gauss, et nous l'écrirons sous la forme usuelle

$$x(1 - x)y'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]y' - \alpha\beta y = 0 ;$$

l'équation associée en t s'écrit

$$(t + \alpha)(t + \beta) = 0 .$$

La méthode du N° 5 conduit aux trois changements de variable suivants:

$$y = x^{1-\gamma} z$$

qui change $\alpha, \beta, \gamma,$ en $\alpha + 1 - \gamma, \quad \beta + 1 - \gamma, \quad 2 - \gamma ;$

$$y = (1 - x)^{-\alpha-\beta+\gamma} z$$

qui change $\alpha, \beta, \gamma,$ en $\gamma - \alpha, \quad \gamma - \beta, \quad \gamma ;$

$$y = (1 - x)^{-\alpha-\beta+\gamma} x^{1-\gamma} z$$

qui change $\alpha, \beta, \gamma,$ en $1 - \alpha, \quad 1 - \beta, \quad 2 - \gamma .$

On aura donc l'intégrale générale par une quadrature pourvu que l'un des nombres α, β, $\alpha - \gamma$, $\beta - \gamma$ soit entier. Si l'un des couples (α, β), $(\alpha - \gamma, \beta - \gamma)$ comprend deux entiers de signes contraires, on aura l'intégrale générale sans quadrature.

On sait que, si γ n'est pas entier, l'intégrale générale de l'équation de Gauss est représentée, à l'intérieur du cercle de centre O et de rayon 1, par l'expression

$$y = \mathrm{AF}(\alpha, \beta, \gamma ; x) + \mathrm{B}x^{1-\gamma}\mathrm{F}(\alpha + 1 - \gamma, \beta + 1 - \gamma, 2 - \gamma ; x) ,$$

$\mathrm{F}(\alpha, \beta, \gamma ; x)$ désignant la série hypergéométrique. Les chan-

gements de variable indiqués ci-dessus mettent immédiatement en évidence la relation fonctionnelle

$$F(\alpha, \beta, \gamma; x) = (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma; x) ,$$

qui a été établie par Euler.

10. — On peut employer dans d'autres cas le changement de variable indiqué au N° 5. Considérons par exemple l'équation de Laplace

$$(a_0 x + b_0)y'' + (a_1 x + b_1)y' + (a_2 x + b_2)y = 0 \qquad (a_2 \neq 0) ,$$

et proposons-nous de faire disparaître le terme en x dans le coefficient de la fonction inconnue. Les équations analogues à (6) s'écrivent alors

$$(a_0 x + b_0)u = Ax + B , \quad (a_0 x + b_0)(u^2 + u') + u(a_1 x + b_1) = -a_2 x + C ,$$

et l'on a, pour déterminer A, B, C, les 3 équations

$$A^2 + Aa_1 + a_0 a_2 = 0 ,$$
$$2AB + Ab_1 + Ba_1 - Ca_0 + a_2 b_0 = 0 ,$$
$$B^2 + Ab_0 - a_0 B + Bb_1 - b_0 C = 0 ,$$

qui admettent en général 4 solutions. Appliquons ceci en particulier à l'équation de Bessel; on sait que [1], dans le domaine réel, cette équation se ramène à l'une des deux formes

$$xy'' + 2py' - xy = 0 , \qquad (14)$$
$$xy'' + 2py' + xy = 0 . \qquad (15)$$

Considérons d'abord l'équation (14). Les 4 changements de variable

$$y = e^x z , \qquad y = e^{-x} z , \qquad y = x^{1-2p} e^x z , \qquad y = x^{1-2p} e^{-x} z$$

conduisent respectivement aux 4 équations suivantes:

$$xz'' + 2(x+p)z' + 2pz = 0 , \quad xz'' - 2(x-p)z' - 2pz = 0 , \qquad (16)$$
$$xz'' + 2(x+1-p)z' + 2(1-p)z = 0 ,$$
$$xz'' - 2(x+1-p)z' - 2(1-p)z = 0 . \qquad (17)$$

[1] Cf. par exemple de la VALLÉE-POUSSIN. *Cours d'Analyse infinitésimale* (4e édition), t. II, p. 224.

On en conclut d'abord que l'équation (14) s'intègre sans quadrature si p est entier. Si p est entier négatif, on partira des équations (16), et l'on mettra l'intégrale générale de l'équation (14) sous la forme

$$y = Ae^{x} P_1(x) + Be^{-x} P_2(x) ,$$

P_1 et P_2 désignant des polynomes de degré $-p$. Si p est entier positif, on partira des équations (17) et l'on mettra l'intégrale générale de l'équation (14) sous la forme

$$y = Ax^{1-2p} e^{x} P_1(x) + Bx^{1-2p} e^{-x} P_2(x) ,$$

P_1 et P_2 désignant des polynômes de degré $p-1$.

Les quatre changements de variable

$$y = e^{ix} z , \quad y = e^{-ix} z , \quad y = x^{1-2p} e^{ix} z , \quad y = x^{1-2p} e^{-ix} z$$

pourraient de la même façon être utilisés pour l'équation (15); mais on peut se borner au premier et au troisième par exemple, qui conduisent de l'équation (15) aux équations

$$xz'' + 2(ix + p)z' + 2ipz = 0 . \tag{18}$$

$$xz'' + 2(ix - p + 1)z' + 2i(p-1)z = 0 , \tag{19}$$

respectivement. Si p est entier négatif, on partira de l'équation (18): en prenant l'intégrale de cette équation qui se réduit à un polynôme, la multipliant par e^{ix} et séparant les parties réelles et les parties imaginaires, on obtient deux intégrales particulières de l'équation (15).

$$y_1 = P_1 \cos x + P_2 \sin x , \quad y_2 = P_1 \sin x - P_2 \cos x ,$$

P_1 et P_2 désignant des polynômes de degré $-p$ et $-p+1$ respectivement. De même, si p est entier positif, en partant de l'équation (19), on aura pour l'équation (15), si $p > 1$, les deux intégrales particulières.

$$y_1 = x^{1-2p}(P_1 \cos x + P_2 \sin x) , \quad y_2 = x^{1-2p}(P_1 \sin x - P_2 \cos x) ,$$

P_1 et P_2 désignant des polynomes de degrés $p-1$ et $p-2$ respectivement; si $p = 1$, l'équation (19) donne immédiatement l'intégrale générale

$$y = \frac{1}{x}(a \cos x + b \sin x) .$$

SUR
LES INVARIANTS D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DU PREMIER ORDRE

PAR

M. Tadia Peyovitch (Belgrade).

---

1. — Il peut arriver qu'une équation différentielle d'une certaine forme conserve la même forme pour des changements de fonction et de variable contenant des fonctions indéterminées. Il est alors de la plus grande importance de former les fonctions des coefficients de l'équation et de leurs dérivées qui restent inaltérées dans ces changements, c'est-à-dire *les invariants de l'équation*. La théorie des invariants des équations différentielles linéaires est étudiée par Laguerre[1], Brioschi[2] et Halphen[3]. MM. Roger Liouville[4] et Appell[5] ont étudiés à différents points de vues les invariants de l'équation

$$\frac{dy}{dx} = e_0 + 3e_1 y + 3e_2 y^2 + e_3 y^3 .$$

Nous nous proposons, dans le présent travail, l'étude des invariants de l'équation

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + a_2 y^2 + 2a_1 y \frac{dy}{dx} + a_0 = 0 , \qquad (1)$$

qui conserve la même forme, comme nous avons vu dans notre thèse de doctorat[6], quand on choisit une nouvelle fonction η

---

[1] *Comptes rendus*; t. LXXXVIII, pp. 116 et 224.
[2] *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. VII, p. 105.
[3] *Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences*; t. XXVIII, n° 1.
[4] *Comples rendus*; 6 septembre 1886; 12 septembre 1887.
[5] *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, p. 361, 1889.
[6] Nouveaux cas d'intégrabilité d'une équation différentielle importante. (*Glas Srpske Kraljevske Akademie*; t. CIX. 1923, en serbe).

et une nouvelle variable indépendante ξ liées à y et x par les relations

$$y = u_{(x)}\eta \,, \qquad \frac{d\xi}{dx} = v_{(x)} \,;$$

les coefficients a_0, a_1, a_2, étant des fonctions de la variable indépendante x. Quelques-uns des résultats contenus dans ce mémoire se trouvent indiqués dans notre thèse; mais dans ce travail nous voulons approfondir la *théorie des invariants de l'équation* (1).

Pour les invariants absolus, invariants relatifs et semi-invariants nous avons adopté les définitions de Halphen (loc. cit.).

2. — Posons, dans l'équation

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + a_2 y^2 + 2a_1 y \frac{dy}{dx} + a_0 = 0 \qquad (1)$$

$$y = \lambda\eta \,, \qquad x = \lambda\xi \,,$$

où λ est une constante; l'équation (1) deviendra

$$\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2 + \alpha_2\eta^2 + 2\alpha_1\eta\frac{d\eta}{d\xi} + \alpha_0 = 0 \,,$$

où

$$\alpha_0 = a_0 \,, \qquad \alpha_1 = \lambda a_1 \,, \qquad \alpha_2 = \lambda^2 a_2 \,;$$

c'est ce qui nous conduit à attribuer au coefficient a_i *le poids* i. On a de plus

$$\frac{d\alpha_i}{d\xi} = \lambda^{i+1}\frac{da_i}{dx} \,, \qquad \frac{d^2\alpha_i}{d\xi^2} = \lambda^{i+2}\frac{d^2a_i}{dx^2} \,,$$

ce qui conduit à attribuer à la dérivée $\frac{d^k a_i}{dx^k}$ *le poids* $(i + k)$.

Il est possible, par des quadratures, de ramener l'équation (1) à une forme canonique ne contenant plus qu'un *invariant absolu*. Pour opérer cette réduction, faisons le changement de fonction

$$y = U_{(x)} Y \,,$$

et déterminons la fonction $U_{(x)}$ de façon que la nouvelle équation différentielle ne contienne pas le terme en $Y \frac{dY}{dx}$.

Nous aurons

$$U_{(x)} = e^{\int a_1 dx} ,$$

et l'équation prendra la forme

$$\left(\frac{dY}{dx}\right)^2 + (a_2 - a_1^2) Y^2 = - \frac{a_0}{U^2} .$$

Enfin, faisons un changement de variable indépendante

$$\frac{dX}{dx} = M(x)$$

et déterminons $M_{(x)}$ de façon que le coefficient de Y^2 devienne l'unité, on aura

$$M(x) = \sqrt{a_2 - a_1^2} ,$$

et l'équation prendra *la forme canonique*

$$\left(\frac{dY}{dX}\right)^2 + Y^2 = H(X) , \qquad (\alpha)$$

où

$$H = - \frac{a_0}{M^2 U^2} .$$

Les fonctions U et M sont des *invariants relatifs*, H et X des *invariants absolus* pour toutes les transformations de la forme

$$y = u_{(x)} \eta , \qquad \frac{d\xi}{dx} = v_{(x)} . \qquad (2)$$

Pour le vérifier, nous faisons dans l'équation (1) le changement (2) de fonction et de variable; l'équation prendra la forme

$$\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2 + \alpha_2 \eta^2 + 2\alpha_1 \eta \frac{d\eta}{d\xi} + \alpha_0 = 0 ,$$

où

$$\alpha_0 = \frac{a_0}{u^2 v^2} , \qquad \alpha_1 = \frac{u' + a_1 u}{uv} , \qquad \alpha_2 = \frac{u'^2 + 2a_1 uu' + a_2 u^2}{u^2 v^2} , \qquad (3)$$

u' désigne la dérivée $\frac{du}{dx}$.

Si nous appelons U_0, M_0, H_0, X_0 les fonctions composées avec les coefficients α_0, α_1, α_2 et la variable ξ, comme U, M, H, X le sont avec a_0, a_1, a_2 et la variable x, nous aurons

$$U_0 = e^{-\int \alpha_1 d\xi} . \qquad M_0 = \sqrt{\alpha_2 - \alpha_1^2} .$$

En remplaçant α_0, α_1, α_2 par les valeurs (3) et $d\xi$ par $v dx$, on vérifie que l'on a

$$U_0 = \frac{1}{u} U , \qquad M_0 = \frac{1}{v} M ; \tag{4}$$

d'où

$$\left. \begin{aligned} H_0 &= -\frac{\alpha_0}{M_0^2 U_0^2} = -\frac{a_0}{M^2 U^2} = H , \\ X_0 &= \int M_0 d\xi = \int M dx = X . \end{aligned} \right\} \tag{5}$$

Les équations (4) et (5) montrent que U et M sont des *invariants relatifs*, H et X des *invariants absolus.*

Remarque. L'introduction du facteur constant k^2 dans H donne, d'ailleurs, des équations canoniques qui se déduisent les unes des autres. Posons

$$H_1 = k^2 H ,$$

on aura

$$dX_1 = dX . \qquad \text{d'où} \qquad X_1 = X + h ,$$

h désignant une nouvelle constante. L'équation canonique correspondante

$$\left(\frac{dY_1}{dX_1}\right)^2 + Y_1^2 = H_1$$

se ramène à la forme

$$\left(\frac{dY}{dX}\right)^2 + Y^2 = H$$

par la substitution

$$Y_1 = kY , \qquad X_1 = X + h .$$

3. — Les dérivées $\frac{dH}{dY}$, $\frac{d^2H}{dX^2}$, ... sont des *invariants absolus* qui se calculent facilement, par voie récurrente, en fonctions des coefficients a_0, a_1, a_2. En effet, partons des formules

$$H = -\frac{a_0}{M^2 U^2} , \quad \frac{dX}{dx} = M_{(x)} , \quad U_{(x)} = e^{-\int a_1 dx} , \quad M_{(x)} = \sqrt{a_2 - a_1^2} ,$$

nous trouverons

$$\frac{dH}{dX} = \frac{\frac{dH}{dx}}{\frac{dX}{dx}} = -\frac{p_4}{M^4 U^2} , \qquad \frac{d^2H}{dX^2} = -\frac{p_6}{M^6 U^2} ,$$

en général

$$\frac{d^n H}{dX^n} = - \frac{p_{2n+2}}{M^{2n+2} U^2} \,. \qquad (6)$$

où p_4, p_6, ..., p_{2n+2} sont des *invariants relatifs* donnés par la formule récurrente

$$p_{2n+2} = M \frac{dp_{2n}}{dx} - 2p_{2n}\left(n \frac{dM}{dx} - a_1 M\right) \,;$$

par exemple, p_4 a la valeur (pour $n = 1$)

$$p_4 = M \frac{da_0}{dx} - 2a_0\left(\frac{dM}{dx} - a_1 M\right) \,; \qquad (p_2 = a_0) \,.$$

Les indices 4, 6, ..., $2n + 2$ désignent les *poids* des invariants.

Les invariants absolus H, $H' = \frac{dH}{dx}$ et X sont des fonctions de x que nous avons calculées; l'élimination de x fournira entre H et X ou entre H et H′ une relation caractéristique de l'équation différentielle considérée. Inversement, étant donnée une relation entre H et X, ou mieux une relation entre H et H′, que l'on peut toujours déduire par différentiation d'une relation entre H et X, on aura, comme il suit, la relation correspondante entre les coefficients a_0, a_1, a_2 et leurs dérivées par rapport à x.

Soit

$$f(H, H') = 0 \qquad (7)$$

l'équation donnée, on aura, après différentiation,

$$\frac{\partial f}{\partial H} H' + \frac{\partial f}{\partial H'} H'' = 0 \,. \qquad (8)$$

D'autre part, les expressions (6) pour H, H′, H″ donnent

$$\frac{H'}{H} = \frac{p_4}{a_0 M^2} \,, \qquad \frac{H''}{H'} = \frac{p_6}{p_4 M^2} \,. \qquad (9)$$

L'élimination de H, H′, H″ entre ces quatre équations (7), (8), (9) fournira la *condition cherchée* sous forme d'une relation entre les deux *invariants absolus* $\frac{p_4}{a_0 M^2}$ et $\frac{p_6}{p_4 M^2}$

$$\Psi\left(\frac{p_4}{a_0 M^2} \,, \; \frac{p_6}{p_4 M^2}\right) = 0 \,. \qquad (10)$$

Cette condition (10) est donc *nécessaire* pour que H et H′ soient liés par la relation (7); elle est *suffisante*. Pour le démontrer nous pouvons toujours supposer la relation (7) entre H et H′ mise sous la forme

$$H = \varphi\left(\frac{H'}{H}\right), \tag{7'}$$

d'où, en prenant les dérivées logarithmiques des deux membres par rapport à X

$$\frac{H'}{H} = \frac{\varphi'\left(\frac{H'}{H}\right)}{\varphi\left(\frac{H'}{H}\right)}\left[\frac{H''}{H} - \frac{H'^2}{H^2}\right];$$

en divisant par $\frac{H'}{H}$, nous aurons la *relation cherchée* entre les invariants $\frac{H'}{H}$, $\frac{H''}{H'}$ sous la forme

$$1 = \frac{\varphi'\left(\frac{p_4}{a_0 M^2}\right)}{\varphi\left(\frac{p_4}{a_0 M^2}\right)}\left[\frac{p_6}{p_4 M^2} - \frac{p_4}{a_0 M^2}\right]. \tag{10'}$$

après la substitution $\frac{H'}{H}$, $\frac{H''}{H'}$ par leurs valeurs de (6); cette relation (10′) remplace la condition (10).

Supposons maintenant que, pour l'équation différentielle (1), les coefficients a_0, a_1, a_2 vérifient cette condition (10′); appelons H_1 l'invariant absolu de cette équation, X_1 la variable canonique et H_1', H_1'' les dérivées de H_1 par rapport à X_1. On aura

$$\frac{p_4}{a_0 M^2} = \frac{H_1'}{H_1}; \qquad \frac{p_6}{p_4 M^2} = \frac{H_1''}{H_1'}.$$

et la condition (10′) pourra s'écrire, après qu'on aura multiplié les deux membres par $\frac{H_1'}{H_1}$,

$$\frac{H_1'}{H_1} = \frac{\varphi'\left(\frac{H_1'}{H_1}\right)}{\varphi\left(\frac{H_1'}{H_1}\right)}\left[\frac{H_1''}{H_1} - \frac{H_1'^2}{H_1^2}\right];$$

d'où, en intégrant et désignant par k^2 une constante arbitraire,

$$H_1 = k^2 \varphi\left(\frac{H_1'}{H_1}\right).$$

On pourra toujours amener cette constante k à être l'unité, de façon à amener cette dernière relation à prendre la forme (7′). En effet, en faisant dans la dernière relation

$$H_1 = k^2 H, \qquad X_1 = X + h,$$

cette relation se réduira à la relation (7′).

La condition (10) *ou* (10′) *est donc nécessaire et suffisante pour que* H et H′ *soient liés par relation* (7) *ou* (7′).

Remarquons que, si l'on voulait trouver la forme canonique correspondant à une relation donnée

$$\Psi\left(\frac{p_4}{a_0 M^2}, \frac{p_6}{p_4 M^2}\right) = 0$$

entre les deux invariants absolus $\frac{p_4}{a_0 M^2}$, $\frac{p_6}{p_4 M^2}$, on aurait à intégrer l'équation

$$\Psi\left(\frac{H'}{H}, \frac{H''}{H'}\right) = 0.$$

Si, dans cette équation, on remplace H″ par sa valeur

$$H'' = \frac{dH'}{dX} = H'\frac{dH'}{dH},$$

elle se transforme en une équation homogène en H′ et H

$$\Psi\left(\frac{H'}{H}, \frac{dH'}{dH}\right) = 0$$

intégrable par les méthodes élémentaires.

Exemples. 1° Cherchons la relation nécessaire et suffisante pour que l'équation

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + a_2 y^2 + 2a_1 y\frac{dy}{dx} + a_0 = 0$$

puisse être ramenée à la forme canonique

$$\left(\frac{dY}{dX}\right)^2 + Y^2 = X^2.$$

On devra avoir

$$H = X^2 ,$$

d'où

$$H' = 2X , \qquad H'' = 2$$

et

$$H'^2 = 4H .$$

Alors les équations

$$\frac{p_4}{a_0 M^2} = \frac{H'}{H} , \qquad \frac{p_6}{p_4 M^2} = \frac{H''}{H'}$$

donnent, en remplaçant H et H″ par leurs valeurs $\frac{H'^2}{4}$ et 2 et en éliminant H′, la condition cherchée

$$p_4^2 - 2a_0 p_6 = 0$$

nécessaire et suffisante.

Comme on a

$$\frac{d^3 H}{dX^3} = - \frac{p_8}{M^8 U^2} ,$$

la condition $p_8 = 0$ avec $p_6 \gtrless 0$ est aussi une condition nécessaire pour que l'équation (1) puisse être réduite à la forme considérée. Mais cette condition n'est pas suffisante; car, si elle est remplie, l'équation (1) pourra se ramener à l'équation

$$(\alpha) \left(\frac{dY}{dX}\right)^2 + Y^2 = H(X) ,$$

où $H(x)$ est un polynôme du second degré en X.

En général, la condition pour que H soit de la forme kX^n (k = const) est

$$(n - 1) p_4^2 - n a_0 p_6 = 0 ,$$

c'est un *invariant relatif du poids* 8.

On conclut de (6) que la *condition* $p_{2n+2} = 0$ exprime que, dans la forme canonique (α), H est un polynôme de degré (n — 1) en X; si 'lon a $p_4 = 0$ H est une constante.

2° Cherchons la relation nécessaire et suffisante pour que l'équation (1) puisse être ramenée à la forme canonique

$$\left(\frac{dY}{dX}\right)^2 + Y^2 = e^X .$$

En opérant comme dans l'exemple précédent, on obtient la condition cherchée

$$p_4^2 - a_0 p_6 = 0 ,$$

l'invariant relatif du poids 8. Mais cette condition, dans ce cas, on peut simplifier en posant

$$\mathrm{H} = e^{\mathrm{X}} , \qquad \text{d'où} \qquad \mathrm{H}' = e^{\mathrm{X}} .$$

Les équations

$$\mathrm{H} = -\frac{a_0}{\mathrm{M}^2\mathrm{U}^2} , \qquad \mathrm{H}' = -\frac{p_4}{\mathrm{M}^4\mathrm{U}^2}$$

après la substitution H et H′ par leurs valeurs e^{X}, et après l'élimination de e^{X}, donnent la condition cherchée

$$p_4 - a_0 \mathrm{M}^2 = 0$$

nécessaire et suffisante; c'est un *invariant relatif du poids* 4.

4. — Dans notre thèse *(loc. cit.)* nous avons donné les cas d'intégrabilité de l'équation

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + a_2 y^2 + 2a_1 y \frac{dy}{dx} + a_0 = 0 ; \qquad (1)$$

mais nous les répéterons ici pour compléter ce travail.

1° Le cas le plus simple est celui où les coefficients a_0, a_1, a_2 sont constants ou peuvent être rendus constants par un changement convenable de fonction et de variable indépendante.

2° Un autre *cas* d'intégrabilité s'obtient à l'aide de la transformation suivante. Si l'on pose dans l'équation (1) $a_0 = a_2$ et en la divisant par a_0, elle devient, après différentiation,

$$\mathfrak{A}_2 y'^2 + 2\mathfrak{B}_1 y'' y' + 2\mathfrak{B}_2 y'' y + 2\mathfrak{B}_3 y' y = 0 ;$$

en y posant

$$y = e^{\int \frac{dx}{u}} ,$$

on aura

$$\frac{du}{dx} = \frac{pu^2 + \mathrm{Q}u + \mathrm{R}}{\mathrm{S}u + \mathrm{T}} .$$

Cette équation est étudiée par M. Elliot [1]; il a transformé cette équation, en posant

$$u = a\mathrm{Z} + b$$

[1] *Annales de l'Ecole Norm. Sup.*, 1890, p. 101.

où

$$a = e^{\int \frac{p}{S} dx}, \qquad b = -\frac{T}{S},$$

à la forme canonique

$$\frac{dZ}{dx} + f(x) = \frac{\varphi(x)}{Z}; \tag{11}$$

les coefficients $f(x)$ et $\varphi(x)$ étant des fonctions de a_0 et a_1, c'est-à-dire de x, faciles à calculer (thèse: p. 11).

Dans l'équation (11) on peut séparer des variables si l'on a:

a) $f(x) = 0$,
b) $\varphi(x) = 0$,
c) $f(x) = \text{const.}$, $\varphi(x) = \text{const.}$ $(\varphi(x) = kf(x)$ } $k = \text{const.}$
d) $f(x) = \text{const.}$, $\varphi(x) = kx(\varphi(x) = kxf(x)$ }

A chaque cas d'intégrabilité de l'équation (11) correspond un *cas* d'intégrabilité de l'équation (1) (thèse).

3° Si l'on pose dans l'équation (1)

$$a_0 = ax + b, \qquad a_1 = c, \qquad a_2 = 0,$$

où a, b, c sont constants, elle devient, après différentiation,

$$2y'y'' + 2cy'^2 + 2cyy'' + a = 0.$$

En y posant

$$y' = p, \qquad y'' = p\frac{dp}{dy}$$

et considérant y comme fonction inconnue et p comme variable indépendante, elle devient une équation linéaire en y

$$\frac{dy}{dp} + \frac{2cp}{a + 2p^2}y + \frac{2p^2}{a + 2p^2} = 0.$$

4° Si, dans l'équation (1), on fait $a_2 = a_1^2$, elle se ramène à l'équation

$$\left(\frac{dy}{dx} + a_1 y + \sqrt{-a_0}\right)\left(\frac{dy}{dx} + a_1 y - \sqrt{-a_0}\right) = 0.$$

5.— L'équation canonique

$$(\alpha) \left(\frac{dY}{dX}\right)^2 + Y^2 = H(X)$$

est *intégrable*, comme nous l'avons montré (thèse), si H(X) a l'une des formes

$$H(X) = \mathcal{A}\ , \qquad H(X) = \mathcal{A}e^{\mathcal{B}X}\ ,$$

$$H(X) = \mathcal{A}\cos\frac{2}{3}X + \mathcal{B}\sin\frac{2}{3}X\ ,$$

$$H(X) = (\mathcal{A}X + \mathcal{B})e^{2Xi}\ ,$$

où $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont constantes arbitraires et $i = \sqrt{-1}$ (l'unité imaginaire).

En utilisant la théorie des invariants, on peut ramener l'équation (1) *à la forme canonique* (α) *intégrable.*

L'équation (α), dont la forme plus générale est (1), se présente dans plusieurs problèmes d'analyse mathématique, de Géométrie supérieure et de Mécanique rationnelle.

Par exemple, dans la Géométrie supérieure, le problème de déterminer la ligne courbe dans le plan, dont l'arc est la fonction donnée de l'angle polaire; la recherche des géodésiques des surfaces spirales, et le problème d'applicabilité de ses surfaces, l'une sur l'autre, se ramènent à l'intégration de l'équation (α).

Dans la Mécanique, le problème du mouvement d'un point matériel dans un plan, sollicité par la force, laquelle n'est qu'une fonction de l'angle polaire, et, en outre, soumis à une résistance proportionnelle à la vitesse, se ramène à l'équation différentielle (α) [1]. En général, la solution de tout problème de Mécanique dans le plan, pour lequel il existe une fonction des forces, les lignes équipotentielles étant des droites d'ailleurs quelconques, se ramène, par la méthode de Jacobi, à l'intégration de l'équation différentielle (α)[2].

MM. Mich. Petrovitch [3] et Heymann [4] ont étudié les transformations de l'équation (1).

Belgrade, Septembre 1923.

---

1 Elliot, *Annales de l'Ecole Norm. Sup.*; 1893; p. 251.
2 Darboux, *Leçons sur la Théorie des Surfaces*; t. III, p. 85.
3 *Comptes rendus*; t. CXXII, n° 22; 1896.
4 *Journal fur reine und angewandle Mathematik*; t. 119; 1898; p. 253:

DÉMONSTRATION DU PROBLÈME DU SCRUTIN PAR DES CONSIDÉRATIONS GÉOMÉTRIQUES

PAR

J. Aebly (Zurich).

Le problème est le suivant: Deux candidats, A et B, sont en présence; un électeur bien informé sait à l'avance que A aura m voix, B n voix, m étant plus grand que n. On demande la probabilité pour que A garde la majorité pendant tout le dépouillement du scrutin.

Poincaré donne, dans son Calcul des Probabilités, une solution élégante du problème dû à D. André, qui cependant est assez longue (p. 45–49). Etant arrivé par des considérations géométriques à une solution plus courte, quoique non moins rigoureuse du problème, je vais l'exposer dans ce qui suit.

Faisons correspondre à la totalité des cas possibles du dépouillement du scrutin un rectangle dont les côtés ont pour longueur $(m + 1)$ et $(n + 1)$ unités respectivement, que nous partagerons en $(m + 1)(n + 1)$ carrés par des parallèles aux côtés du rectangle. Chaque carré sera représenté par un double indice (i, k) dont le premier terme indique la ligne, le second la colonne auxquelles appartient le carré considéré, les rangs limites étant $(0,0)$ et (n, m).

Imaginons un mobile devant passer de $(0,0)$ à (n, m) par un chemin quelconque satisfaisant à la condition suivante: le passage d'un carré à l'autre ne peut se faire que de deux manières, soit au carré situé au dessous, soit au carré situé à droite, c'est-à-dire que les seules possibilités admises de changement soient de (i, k) à $(i + 1, k)$ ou à $(i, k + 1)$. Le carré (i, k) pourra alors

être regardé comme représentant l'ensemble des chemins menant de (0,0) à (i, k), c'est-à-dire l'ensemble des dépouillements ayant amené i bulletins B et k bulletins A.

Ces conventions établies, nous allons procéder à la solution du problème. L'ensemble des cas étant représenté par (n, m) est égal à $\binom{m+n}{n}$. Les cas favorables sont représentés par l'ensemble des chemins ne touchant pas les carrés dont les deux indices ont le même numéro comme (i, i). Comme (i, i) ne peut être abordé que par deux carrés en raison du principe établi, et puisque il y a symétrie complète par rapport à la diagonale passant de (0,0) à (n, n) par les carrés tel que (i,i), il s'ensuit qu'à chaque chemin venant d'un côté, il correspondra un et un seul chemin venant de l'autre côté. L'un des groupes pouvant être considéré comme partant de (1, 0), l'autre de (0, 1).

Le premier représente l'ensemble des cas où A perd la majorité au premier coup et l'autre les cas où A a d'abord la majorité mais la perd à (i,i). B devant nécessairement perdre la majorité, les chemins partant de (1,0) doivent nécessairement passer par un des carrés (i,i). Il suffit de considérer le premier passage pour les chemins émanant de (0,1). Les deux groupes comprennent donc bien la totalité des cas défavorables. Leur nombre étant $2\binom{m+n-1}{m}$, la probabilité demandée est donc

$$1 - 2\frac{\binom{m+n-1}{m}}{\binom{m+n}{m}} = 1 - \frac{2n}{m+n}, \quad \text{ou} \quad \frac{m-n}{m+n}.$$

A PROPOS DE L'INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE DU PROBLÈME DU SCRUTIN

PAR

D. MIRIMANOFF (Genève).

Il me semble qu'il ne serait pas inutile de montrer en quoi la solution que donne M. AEBLY dans la Note ci-dessus se distingue de celle de D. ANDRÉ que BERTRAND, POINCARÉ et M. CZUBER ont reproduite dans leurs traités.

On sait que le raisonnement d'André repose sur le lemme suivant: le nombre des suites défavorables commençant par *A* est égal à celui des suites commençant par *B*. M. Aebly a réussi à simplifier la démonstration de ce lemme en introduisant un mode de correspondance particulier, qui lui a été suggéré par son interprétation géométrique du problème. Au lieu de fractionner le segment pour lequel l'égalité des suffrages se produit pour la première fois et de transporter la partie enlevée à l'autre bout de la suite, M. Aebly remplace le segment par son symétrique qu'on obtient en appliquant aux lettres du segment la transposition (A, B).

Prenons, par exemple, la suite

AABABBABAA

envisagée par Poincaré.

Le segment pour lequel l'égalité des suffrages se produit pour la première fois est formé des six premières lettres AABABB.

Dans la solution d'André, ce segment est fractionné en deux: on laisse la dernière lettre à sa place et l'on transporte les cinq premières du côté droit, ce qui fournit la suite

BABAAAABAB

M. Aebly se borne à appliquer aux lettres du segment la transposition (A, B); la suite associée s'écrit

BBABAAABAA

Et réciproquement on passe d'une suite commençant par B à une suite défavorable commençant par A en appliquant aux lettres du premier segment à suffrages égaux la même transposition (A, B). On voit immédiatement que cette correspondance est biunivoque et réciproque.

Je passe à l'interprétation géométrique du problème du scrutin qui consiste à représenter les différentes suites par des chemins parcourus sur un échiquier rectangulaire. Peut-être y aurait-il quelque intérêt à rapprocher ce problème topologique d'un autre problème assez curieux qui a été mis récemment au concours par une fabrique de porte-plumes à réservoir.

Mais j'aime mieux, avant de terminer, montrer comment la considération de ces chemins peut simplifier la démonstration des propriétés fondamentales des coefficients du binôme.

Partons, avec M. Aebly, de la case (0, 0); désignons par N_{ik} le nombre des chemins qui aboutissent à la case (i, k). On voit immédiatement que $N_{ik} = N_{i-1,k} + N_{i,k-1}$, puisque tout chemin aboutissant à (i, k) passe nécessairement ou bien par la case $(i - 1, k)$ ou bien par la case $(i, k - 1)$. Il en résulte que les N_{ik} sont les nombres du triangle de Pascal, c'est-à-dire les coefficients du binôme. Et d'autre part, la formule des permutations avec répétition donne $N_{ik} = \frac{(i+k)!}{i!\,k!}$. On en tire l'expression classique des coefficients du binôme.

Mais on peut aller plus loin dans cette voie. Considérons les chemins qui aboutissent à une case déterminée (n, m). Chacun de ces chemins traverse la diagonale le long de laquelle la somme $i + k$ des indices $= s$, où s est un nombre donné inférieur à $m + n$.

Par conséquent, $N_{n,m}$ est égal à la somme des nombres des chemins passant par les différentes cases de cette diagonale. Or, le nombre des chemins passant par une case (i, k) et aboutissant à la case finale (n, m) est égal au produit de $N_{i,k}$ par le nombre des chemins partant de (i, k) et aboutissant à (n, m), c'est-à-dire

par $N_{n-i, m-k}$. Il en résulte que la somme de ces produits est égal à $N_{n, m}$. En particulier, on obtient de cette manière l'expression de la somme des carrés des coefficients du binôme. Ces formules sont connues, on les trouve, par exemple, dans un livre de P. Bachmann[1]. La démonstration que je viens de donner est-elle nouvelle ? Je ne le crois pas, mais j'ai pensé qu'il n'était pas inutile de l'indiquer.

NOTE DE GÉOMÉTRIE
TRIANGLE ET CERCLE CIRCONSCRIT

PAR

A. Amiel (Aix-en-Provence).

I. — On connaît le théorème suivant:

« Soient un triangle ABC et le cercle circonscrit à ce triangle. Les points de rencontre de chacun des trois côtés avec la tangente au sommet opposé sont en ligne droite. »

Ce théorème peut être généralisé ainsi:

« Soient un triangle ABC et le cercle circonscrit de centre O, de rayon R. Les rayons aboutissant aux sommets sont orientés de telle sorte que:

$$\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = + R .$$

Sur chacun de ces rayons prenons des points A_1, B_1, C_1, tels que

$$\overline{OA_1} = \overline{OB_1} = \overline{OC_1} = K ,$$

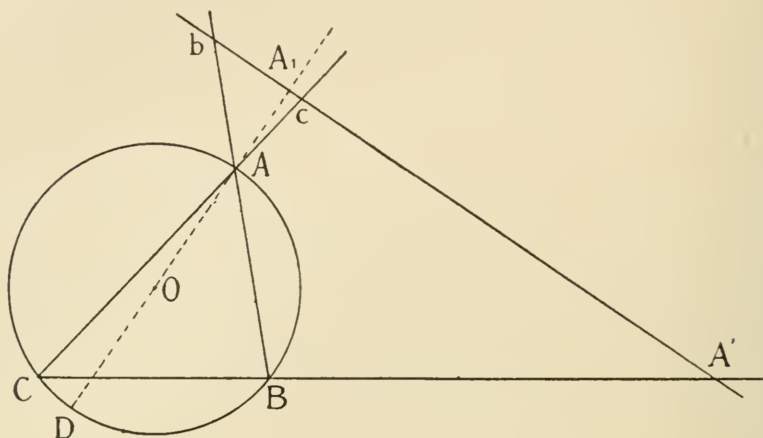
K étant un nombre algébrique quelconque.

En A_1 on mène la perpendiculaire à OA qui coupe le côté opposé au sommet A en A'; en B_1 on mène la perpendiculaire à OB qui

---

[1] P. Bachmann, *Niedere Zahlentheorie*, II, Teubner, 1910, p. 122.

coupe le côté opposé au sommet B en B'; en C_1 on mène la perpendiculaire à OC qui coupe le côté opposé au sommet C en C'. Les trois points A', B', C' sont en ligne droite. »



Soient b, c les points où la perpendiculaire en A_1 à OA coupe les côtés AB, AC du triangle. La droite bc perpendiculaire au diamètre OA du cercle circonscrit est l'inverse du cercle circonscrit avec A pour pôle et $\overline{AD} \times \overline{AA_1}$ pour puissance d'inversion, D étant le point diamétralement opposé à A. Donc:

$$\overline{AC} \times \overline{Ac} = \overline{AD} \times \overline{AA_1} , \qquad \overline{AB} \times \overline{Ab} = \overline{AD} \times \overline{AA_1} .$$

De là, on tire:

$$\overline{Ac} = \frac{\overline{AD} \times \overline{AA_1}}{\overline{AC}} \quad \overline{Ab} = \frac{\overline{AD} \times \overline{AA_1}}{\overline{AB}} . \tag{1}$$

Le théorème de Ménélaus appliqué au triangle ABC rencontré par la transversale $A'cb$ donne:

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'c}} \times \frac{\overline{cC}}{\overline{cA}} \times \frac{\overline{bA}}{\overline{bB}} = 1 .$$

D'où l'on tire:

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = \frac{\overline{cA}}{\overline{cC}} \times \frac{\overline{bB}}{\overline{bA}} \tag{2}$$

c'est-à-dire

$$\overline{cC} = \overline{cA} + \overline{Ac} = -\frac{\overline{AD} \times \overline{AA_1}}{\overline{AC}} + \overline{Ac} ,$$

$$\overline{cC} = \frac{\overline{AC}^2 - \overline{AD} \times \overline{AA_1}}{\overline{AC}} = \frac{b^2 - \overline{AD} \times \overline{AA_1}}{\overline{AC}} .$$

De même:

$$\overline{bB} = \frac{c^2 - \overline{AD} . \overline{AA_1}}{\overline{AB}} .$$

En remplaçant dans (2) $\overline{cA}$, $\overline{bB}$, $\overline{cC}$, $\overline{bA}$ par leurs valeurs:

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = \frac{c^2 - \overline{AD} . \overline{AA_1}}{b^2 - \overline{AD} . \overline{AA_1}} .$$

Mais:

$$\overline{AA_1} = \overline{OA_1} - \overline{OA} = K - R , \qquad \overline{AD} = -2R .$$

Par suite:

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = \frac{c^2 + 2R^2 - 2K.R}{b^2 + 2R^2 - 2K.R} .$$

Par permutations circulaires, on obtient:

$$\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} = \frac{a^2 + 2R^2 - 2K.R}{c^2 + 2R^2 - 2K.R} , \qquad \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = \frac{b^2 + 2R^2 - 2K.R}{a^2 + 2R^2 - 2K.R} .$$

D'où:

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'c}} \times \frac{\overline{B'c}}{\overline{B'A}} \times \frac{\overline{c'A}}{\overline{c'B}} = 1 ,$$

relation qui prouve que les trois points A', B', c' sont en ligne droite.

Remarque. — Les calculs précédents n'ont de sens que si $K \neq + R$. Si $K = + R$ on sait que:

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = \frac{c^2}{b^2} , \qquad \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} = \frac{a^2}{c^2} , \qquad \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = \frac{b^2}{a^2} .$$

Corollaire I. — Prenons $K = + R$. On trouve précisément le théorème dont la généralisation est l'objet de cette note.

Corollaire II. — Prenons $K=0$. On a le théorème:

Les projections du centre du cercle circonscrit à un triangle sur chaque côté parallèlement à la tangente au sommet opposé sont trois points en ligne droite.

Corollaire III. — Prenons $K=-R$. On a le théorème:

Soient un triangle et le cercle circonscrit à ce triangle. Les points de rencontre de chacun des trois côtés avec la tangente au point diamétralement opposé au sommet opposé sont en ligne droite.

II. — Dans le N° du 15 mars 1904 de *L'Enseignement mathématique*, t. VI, p. 130-132, M. J. Kariya (Tokio) énonce la proposition suivante:

« Inscrivons un cercle O dans un triangle donné ABC; nommons respectivement X, Y, Z les points de contact avec les trois côtés, BC, CA, AB. Si l'on prend sur les droites OX, OY, OZ des points D, E, F également distants du point O, les trois droites AD, BE, CF concourent en un même point. »

Ce théorème a donné lieu à plusieurs lettres et communications dont le résumé se trouve dans le numéro suivant (p. 236-239, mai 1904).

Sa démonstration se déduit immédiatement du théorème précédent en transformant par figures polaires réciproques; il suffit de transformer la figure par rapport au cercle circonscrit et l'on obtient pour théorème corrélatif précisément celui de M. Kariya.

TABLES DES FONCTIONS DE BESSEL

$I_0(x\sqrt{j})$; $|I_0(x\sqrt{j})|$; $\sqrt{2}\,I_1(x\sqrt{j})$; $B(x)$

PAR

E. Brasey (Fribourg).

On trouve des tables des fonctions $I_0(x\sqrt{j})$ et $\sqrt{2}\,.\,I_1(x\sqrt{j})$ pour des valeurs de x comprises entre 0.1 et 6 dans Jahnke und Emde, *Funktionentafeln* (p. 137, 138) et dans *Proc. Roy. Soc. London*, 66 p. (42-43), 1900, St Aldis.

L'intervalle de deux valeurs consécutives de x est de 0.1. La forme exponentielle de ces fonctions fait que l'interpolation rectiligne est inexacte entre des valeurs aussi écartées. Pour éviter un calcul fastidieux d'interpolation, nous avons préféré établir de nouvelles tables dans lesquelles l'intervalle est de 0.02. Ces tables ont été vérifiées 1° par comparaison avec les tables citées, puis pour les valeurs intermédiaires, par la méthode des différences successives. Il suffit pour la pratique de connaître 4 et même 3 décimales. En poussant à la limite l'utilisation de la machine à calcul dont nous disposions pour ce travail, nous sommes arrivé à connaître la septième décimale à l'unité prés environ. Les calculs ont été effectués jusqu'à $x = 4.6$. Aux deux tables indiquées: $I_0(x\sqrt{j})$ et $\sqrt{2}\,I_1(x\sqrt{j})$ sont jointes celle de la valeur absolue de $I_0(x\sqrt{j})$ et enfin celle de la fonction

$$B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^{4n+4} \frac{1}{(n+1)!^2\,(2n+1)!}$$

qui se rencontre dans l'étude des pertes par courants de Foucault. Ces tables ont été calculées à l'occasion du travail intitulé : « Recherches sur les pertes dans le fer par hystérésis et par courants de Foucault aux fréquences élevées », paru dans les *Archives des sciences physiques et naturelles*, 5e période, vol. 4, Genève, 1922 (mai-juin).

I. — Table de la fonction $I_0(x\sqrt{j})$.

x	$I_0(x\sqrt{j})$		x	$I_0(x\sqrt{j})$	
	réelle	imaginaire		réelle	imaginaire
0,00	1.	— 0	0,84	0,992 222	— 0,176 247
0,02	1.	— 0,000 1	0,86	0,991 455	— 0,184 724
0,04	1.	— 0,000 4	0,88	0,990 632	— 0,193 398
0,06	1.	— 0,000 9	0,9	0,989 751	— 0,202 269
0,08	0,999 999	— 0,001 6	0,92	0,988 810	— 0,211 337
0,1	0,999 998	— 0,002 5	0,94	0,987 805	— 0,220 601
0,12	0,999 997	— 0,003 6	0,96	0,986 734	— 0,230 060
0,14	0,999 994	— 0,004 9	0,98	0,985 594	— 0,239 716
0,16	0,999 990	— 0,006 4	1,—	0,984 382	— 0,249 566
0,18	0,999 984	— 0,008 1	1,02	0,983 095	— 0,259 611
0,2	0,999 975	— 0,010 0	1,04	0,981 730	— 0,269 851
0,22	0,999 963	— 0,012 1	1,06	0,980 285	— 0,280 284
0,24	0,999 948	— 0,014 4	1,08	0,978 755	— 0,290 911
0,26	0,999 929	— 0,016 9	1,1	0,977 138	— 0,301 731
0,28	0,999 904	— 0,019 6	1,12	0,975 430	— 0,312 743
0,3	0,999 873	— 0,022 5	1,14	0,973 629	— 0,323 948
0,32	0,999 836	— 0,025 599	1,16	0,971 731	— 0,335 343
0,34	0,999 791	— 0,028 899	1,18	0,969 732	— 0,346 929
0,36	0,999 738	— 0,032 399	1,2	0,967 629	— 0,358 704
0,38	0,999 674	— 0,036 099	1,22	0,965 419	— 0,370 669
0,4	0,999 600	— 0,039 998	1,24	0,963 097	— 0,382 823
0,42	0,999 514	— 0,044 098	1,26	0,960 661	— 0,395 164
0,44	0,999 414	— 0,048 397	1,28	0,958 106	— 0,407 692
0,46	0,999 300	— 0,052 896	1,3	0,955 429	— 0,420 406
0,48	0,999 171	— 0,057 595	1,32	0,952 626	— 0,433 305
0,50	0,999 023	— 0,062 493	1,34	0,949 693	— 0,446 388
0,52	0,998 858	—,0 067 591	1,36	0,946 626	— 0,459 655
0,54	0,998 671	— 0,072 889	1,38	0,943 421	— 0,473 104
0,56	0,998 463	— 0,078 387	1,4	0,940 075	— 0,486 734
0,58	0,998 232	— 0,084 083	1,42	0,936 583	— 0,500 544
0,6	0,997 975	— 0,089 980	1,44	0,932 941	— 0,514 533
0,62	0,997 691	— 0,096 075	1,46	0,929 144	— 0,528 699
0,64	0,997 379	— 0,102 370	1,48	0,925 190	— 0,543 042
0,66	0,997 035	— 0,108 864	1,5	0,921 072	— 0,557 560
0,68	0,996 659	— 0,115 557	1,52	0,916 788	— 0,572 252
0,7	0,996 249	— 0,122 449	1,54	0,912 332	— 0,587 116
0,72	0,995 801	— 0,129 539	1,56	0,907 700	— 0,602 150
0,74	0,995 315	— 0,136 829	1,58	0,902 888	— 0,617 354
0,76	0,994 788	— 0,144 316	1,6	0,897 891	— 0,632 726
0,78	0,994 217	— 0,152 002	1,62	0,892 705	— 0,648 263
0,8	0,993 601	— 0,159 886	1,64	0,887 324	— 0,663 965
0,82	0,992 937	— 0,167 968	1,66	0,881 745	— 0,679 829

x	$I_0(x\sqrt{j})$ réelle	$I_0(x\sqrt{j})$ imaginaire	x	$I_0(x\sqrt{j})$ réelle	$I_0(x\sqrt{j})$ imaginaire
1,68	0,875 962	— 0,695 854	2,62	0,278 758	— 1,576 745
1,7	0,869 971	— 0,712 037	2,64	0,256 958	— 1,596 573
1,72	0,863 767	— 0,728 377	2,66	0,234 687	— 1,616 353
1,74	0,857 345	— 0,744 872	2,68	0,211 938	— 1,636 079
1,76	0,850 700	— 0,761 519	2,7	0,188 706	— 1,655 742
1,78	0,843 827	— 0,778 317	2,72	0,164 986	— 1,675 336
1,8	0,836 722	— 0,795 262	2,74	0,140 772	— 1,694 852
1,82	0,829 378	— 0,812 353	2,76	0,116 059	— 1,714 281
1,84	0,821 792	— 0,829 587	2,78	0,090 840	— 1,733 617
1,86	0,813 958	— 0,846 962	2,8	0,065 112	— 1,752 850
1,88	0,805 870	— 0,864 474	2,82	0,038 868	— 1 771,973
1,9	0,797 524	— 0,882 122	2,84	0,012 103	— 1,790 976
1,92	0,788 915	— 0,899 903	2,86	— 0,015 187	— 1,809 850
1,94	0,780 036	— 0,917 813	2,88	— 0,043 009	— 1,828 586
1,96	0,770 883	— 0,935 850	2,9	— 0,071 368	— 1,847 176
1,98	0,761 451	— 0,954 010	2,92	— 0,100 268	— 1,865 610
2,—	0,751 734	— 0,972 292	2,94	— 0,129 714	— 1,883 877
2,02	0,741 727	— 0,990 690	2,96	— 0,159 711	— 1,901 969
2,04	0,731 424	— 1,009 202	2,98	— 0,190 265	— 1,919 876
2,06	0,720 819	— 1,027 825	3,–	— 0,221 380	— 1,937 587
2,08	0,709 908	— 1,046 555	3,02	— 0,253 061	— 1,955 092
2,1	0,698 685	— 1,065 388	3,04	— 0,285 312	— 1,972 380
2,12	0,687 144	— 1,084 321	3,06	— 0,318 137	— 1,989 441
2,14	0,675 280	— 1,103 350	3,08	— 0,351 543	— 2,006 265
2,16	0,663 086	— 1,122 470	3,1	— 0,385 531	— 2,022 839
2,18	0,650 558	— 1,141 678	3,12	— 0,420 108	— 2,039 153
2,2	0,637 690	— 1,160 970	3,14	— 0,455 277	— 2,055 195
2,22	0,624 477	— 1,180 341	3,16	— 0,491 042	— 2,070 954
2,24	0,610 911	— 1,199 787	3,18	— 0,527 407	— 2,086 417
2,26	0,596 989	— 1,219 303	3,2	— 0,564 376	— 2,101 573
2,28	0,582 703	— 1,238 886	3,22	— 0,601 953	— 2,116 410
2,3	0,568 049	— 1,258 529	3,24	— 0,640 141	— 2,130 915
2,32	0,553 020	— 1,278 228	3,26	— 0,678 944	— 2,145 075
2,34	0,537 612	— 1,297 979	3,28	— 0,718 365	— 2,158 878
2,36	0,521 817	— 1,317 775	3,3	— 0,758 407	— 2,172 310
2,38	0,505 631	— 1,337 613	3,32	— 0,799 073	— 2,185 359
2,4	0,489 048	— 1,357 485	3,34	— 0,840 367	— 2,198 010
2,42	0,472 061	— 1,377 388	3,36	— 0,882 291	— 2,210 251
2,44	0,454 666	— 1,397 315	3,38	— 0,924 847	— 2,222 068
2,46	0,436 856	— 1,417 260	3,4	— 0,968 039	— 2,233 446
2,48	0,418 625	— 1,437 218	3,42	— 1,011 868	— 2,244 371
2,5	0,399 968	— 1,457 182	3,44	— 1,056 336	— 2,254 828
2,52	0,380 880	— 1,477 146	3,46	— 1,101 447	— 2,264 804
2,54	0,361 354	— 1,497 105	3,48	— 1,147 200	— 2,274 283
2,56	0,341 384	— 1,517 051	3,5	— 1,193 598	— 2,283 250
2,58	0,320 965	— 1,536 977	3,52	— 1,240 643	— 2,291 690
2,6	0,300 092	— 1,556 878	3,54	— 1,288 335	— 2,299 587

x	$I_0(x\sqrt{j})$ réelle	$I_0(x\sqrt{j})$ imaginaire	x	$I_0(x\sqrt{j})$ réelle	$I_0(x\sqrt{j})$ imaginaire
3,56	— 1,336 675	— 2,306 925	4,1	— 2,884 306	— 2,230 943
3,58	— 1,385 665	— 2,313 690	4,12	— 2,950 227	— 2,215 435
3,6	— 1,435 305	— 2,319 864	4,14	— 3,016 713	— 2,198 826
3,62	— 1,485 596	— 2,325 431	4,16	— 3,083 756	— 2,181 093
3,64	— 1,536 536	— 2,330 374	4,18	— 3,151 348	— 2,162 214
3,66	— 1,588 128	— 2,334 678	4,2	— 3,219 480	— 2,142 168
3,68	— 1,640 369	— 2,338 325	4,22	— 3,288 143	— 2,120 932
3,7	— 1,693 260	— 2,341 298	4,24	— 3,357 328	— 2,098 485
3,72	— 1,746 800	— 2,343 579	4,26	— 3,427 024	— 2,074 803
3,74	— 1,800 987	— 2,345 151	4,28	— 3,497 222	— 2,049 865
3,76	— 1,855 822	— 2,345 996	4,3	— 3,567 911	— 2,023 647
3,78	— 1,911 301	— 2,346 096	4,32	— 3,639 079	— 1,996 127
3,8	— 1,967 423	— 2,345 433	4,34	— 3,710 715	— 1,967 282
3,82	— 2,024 187	— 2,343 989	4,36	— 3,782 807	— 1,937 088
3,84	— 2,081 589	— 2,341 744	4,38	— 3,855 342	— 1,905 523
3,86	— 2,139 627	— 2,338 681	4,4	— 3,928 307	— 1,872 564
3,88	— 2,198 298	— 2,334 780	4,42	— 4,001 688	— 1,838 186
3,9	— 2,257 599	— 2,330 022	4,44	— 4,075 471	— 1,802 366
3,92	— 2,317 527	— 2,324 387	4,46	— 4,149 642	— 1,765 080
3,94	— 2,378 077	— 2,317 857	4,48	— 4,224 186	— 1,726 305
3,96	— 2,439 245	— 2,310 410	4,5	— 4,299 086	— 1,686 017
3,98	— 2,501 026	— 2,302 028	4,52	— 4,374 328	— 1,644 192
4,—	— 2,563 417	— 2,292 690	4,54	— 4,449 893	— 1,600 805
4,02	— 2,626 411	— 2,282 376	4,56	— 4,525 765	— 1,555 833
4,04	— 2,690 003	— 2,271 065	4,58	— 4,601 925	— 1,509 252
4,06	— 2,754 187	— 2,258 736	4,6	— 4,678 357	— 1,461 037
4,08	— 2,818 957	— 2,245 369			

II. — Table de la fonction $|I_0(x\sqrt{j})|$.

x	$\lvert I_0(x\sqrt{j})\rvert$	x	$\lvert I_0(x\sqrt{j})\rvert$	x	$\lvert I_0(x\sqrt{j})\rvert$
0,—	1.	0,22	1,000 037	0,44	1,000 585
0,02	1.	0,24	1,000 052	0,46	1,000 699
0,04	1,	0,26	1,000 071	0,48	1,000 829
0,06	1,	0,28	1,000 096	0,5	1,000 976
0,08	1,000 001	0,3	1,000 127	0,52	1,001 142
0,1	1,000 002	0,32	1,000 164	0,54	1,001 328
0,12	1,000 003	0,34	1,000 209	0,56	1,001 536
0,14	1,000 006	0,36	1,000 262	0,58	1,001 767
0,16	1,000 010	0,38	1,000 326	0,6	1,002 023
0,18	1,000 016	0,4	1,000 400	0,62	1,002 307
0,2	1,000 025	0,42	1,000 486	0,64	1,002 619

x	$\lvert I_0(x\sqrt{j})\rvert$	x	$\lvert I_0(x\sqrt{j})\rvert$	x	$\lvert I_0(x\sqrt{j})\rvert$
0,66	1,002 961	1,62	1,103 253	2,58	1,570 133
0,68	1,003 336	1,64	1,108 239	2,6	1,585 536
0,7	1,003 746	1,66	1,113 392	2,62	1,601 197
0,72	1,004 192	1,68	1,118 715	2,64	1,617 119
0,74	1,004 676	1,7	1,124 209	2,66	1,633 302
0,76	1,005 202	1,72	1,129 879	2,68	1,649 749
0,78	1,005 770	1,74	1,135 727	2,7	1,666 461
0,8	1,006 383	1,76	1,141 754	2,72	1,683 440
0,82	1,007 044	1,78	1,147 964	2,74	1,700 688
0,84	1,007 754	1,8	1,154 359	2,76	1,718 206
0,86	1,008 517	1,82	1,160 942	2,78	1,735 996
0,88	1,009 334	1,84	1,167 714	2,8	1,754 059
0,9	1,010 208	1,86	1,174 679	2,82	1,772 399
0,92	1,011 142	1,88	1,181 839	2,84	1,791 016
0,94	1,012 138	1,9	1,189 195	2,86	1,809 913
0,96	1,013 199	1,92	1,196 750	2,88	1,829 092
0,98	1,014 327	1,94	1,204 507	2,9	1,848 554
1,—	1,015 525	1 96	1,212 467	2,92	1,868 302
1,02	1,016 796	1,98	1,220 633	2,94	1,888 338
1,04	1,018 142	2,—	1,229 006	2,96	1,908 663
1,06	1,019 567	2,02	1,237 588	2.98	1,929 281
1,08	1,021 073	2,04	1,246 383	3,—	1,950 193
1,1	1,022 663	2,06	1,255 390	3,02	1,971 401
1,12	1,024 340	2,08	1,264 613	3,04	1,992 909
1,14	1,026 107	2,1	1,274 054	3,06	2,014 718
1,16	1,027 967	2,12	1,283 713	3,08	2,036 831
1,18	1,029 922	2,14	1,293 593	3,1	2,059 250
1,2	1,031 976	2,16	1,303 696	3,12	2,081 979
1,22	1,034 132	2,18	1,314 023	3,14	2,105 019
1,24	1,036 392	2,2	1,324 575	3,16	2,128 373
1,26	1,038 761	2,22	1,335 356	3,18	2,152 044
1,28	1,041 239	2,24	1,346 366	3,2	2,176 036
1,3	1,043 832	2,26	1,357 607	3,22	2,200 350
1,32	1,046 541	2,28	1,369 080	3,24	2,224 989
1,34	1,049 371	2,3	1,380 788	3,26	2,249 958
1,36	1,052 323	2,32	1,392 731	3,28	2,275 258
1,38	1,055 401	2,34	1,404 911	3,3	2,300 894
1,4	1,058 608	2,36	1,417 330	3,32	2,326 867
1,42	1,061 947	2,38	1,429 990	3,34	2,353 182
1,44	1,065 421	2,4	1,442 891	3,36	2,379 842
1,46	1,069 033	2,42	1,456 036	3,38	2,406 850
1,48	1,072 786	2,44	1,469 425	3,4	2,434 210
1,5	1,076 683	2,46	1,483 061	3,42	2,461 925
1,52	1,080 727	2,48	1,496 944	3,44	2,490 000
1,54	1,084 921	2,5	1,511 077	3,46	2,518 436
1,56	1,089 268	2,52	1,525 461	3,48	2,547 240
1,58	1,093 770	2,54	1,540 097	3,5	2,576 413
1,6	1,098 431	2,56	1,554 987	3,52	2,605 962

x	$\lvert I_0(x\sqrt{j})\rvert$	x	$\lvert I_0(x\sqrt{j})\rvert$	x	$\lvert I_0(x\sqrt{j})\rvert$
3,54	2,635 888	3,9	3,244 342	4,26	4,006 158
3,56	2,666 197	3,92	3,282 333	4,28	4,053 703
3,58	2,696 892	3,94	3,320 799	4,3	4,101 845
3,6	2,727 979	3,96	3,359 749	4,32	4,150 593
3,62	2,759 460	3,98	3,399 186	4,34	4,199 953
3,64	2,791 342	4,—	3,439 118	4,36	4,249 934
3,66	2,823 627	4,02	3,479 550	4,38	4,300 544
3,68	2,856 322	4,04	3,520 490	4,4	4,351 791
3,7	2,889 430	4,06	3,561 942	4,42	4,403 684
3,72	2,922 956	4,08	3,603 914	4,44	4,456 230
3,74	2,956 905	4,1	3,646 413	4,46	4,509 439
3,76	2,991 282	4,12	3,689 443	4,48	4,563 319
3,78	3,026 093	4,14	3,733 014	4,5	4,617 878
3,8	3,061 341	4 16	3,777 131	4,52	4,673 126
3,82	3,097 033	4,18	3,821 801	4,54	4,729 072
3,84	3,133 174	4,2	3,867 032	4,56	4,785 725
3,86	3,169 768	4,22	3,912 830	4,58	4,843 094
3,88	3,206 823	4,24	3,959 203	4,6	4,901 189

III. — Table de la fonction $\sqrt{2}\, I_1(x\sqrt{j})$.

x	$\sqrt{2}\,.\,I_1(x\sqrt{j})$		x	$\sqrt{2}\,.\,I_1(x\sqrt{j})$	
	reelle	imaginaire		réelle	imaginaire
0,00	0,00	0,	0,44	0,225 281	0,214 633
0,02	0,010 000	0,009 999	0,46	0,236 030	0,223 863
0,04	0,020 004	0,019 996	0,48	0,246 845	0,233 022
0,06	0,030 013	0,029 986	0,5	0,257 731	0,242 107
0,08	0,040 032	0,039 968	0,52	0,268 688	0,251 114
0,1	0,050 062	0,049 937	0,54	0,279 721	0,260 040
0,12	0,060 108	0,059 892	0,56	0,290 832	0,268 882
0,14	0,070 171	0,069 828	0,58	0,302 022	0,277 636
0,16	0,080 256	0,079 744	0,6	0,313 296	0,286 299
0,18	0,090 364	0,089 635	0,62	0,324 655	0,294 868
0,2	0,100 499	0,099 499	0,64	0,336 102	0,303 339
0,22	0,110 664	0,109 333	0,66	0,347 639	0,311 708
0,24	0,120 862	0,119 134	0,68	0,359 270	0,319 973
0,26	0,131 095	0,128 898	0,7	0,370 995	0,328 129
0,28	0,141 368	0,138 624	0,72	0,382 819	0,336 174
0,3	0,151 681	0,148 306	0,74	0,394 742	0,344 102
0,32	0,162 039	0,157 943	0,76	0,406 768	0,351 912
0,34	0,172 445	0,167 532	0,78	0,418 898	0,359 598
0,36	0,182 900	0,177 068	0,8	0,431 135	0,367 158
0,38	0,193 409	0,186 550	0,82	0,443 482	0,374 588
0,4	0,203 973	0,195 973	0,84	0,455 939	0,381 883
0,42	0,214 596	0,205 336	0,86	0,468 510	0,389 040

x	$\sqrt{2}\,.\,I_1(x\sqrt{j})$		x	$\sqrt{2}\,.\,I_1(x\sqrt{j})$	
	réelle	imaginaire		réelle	imaginaire
0,88	0,481 196	0,396 056	1,82	1,231 347	0,484 945
0,9	0,493 999	0,402 926	1,84	1,250 715	0,479 766
0,92	0,506 922	0,409 646	1,86	1,270 212	0,474 201
0,94	0,519 965	0,416 213	1,88	1,289 835	0,468 246
0,96	0,533 132	0,422 622	1,9	1,309 581	0,461 892
0,98	0,546 424	0,428 869	1,92	1,329 450	0,455 136
1,—	0,559 842	0,434 951	1,94	1,349 436	0,447 969
1,02	0,573 389	0,440 862	1,96	1,369 539	0,440 386
1,04	0,587 065	0,446 600	1,98	1,389 755	0,432 381
1,06	0,600 873	0,452 159	2,—	1,410 081	0,423 946
1,08	0,614 814	0,457 536	2,02	1,430 513	0,415 077
1,1	0,628 889	0,462 726	2,04	1,451 049	0,405 766
1,12	0,643 101	0,467 724	2,06	1,471 685	0,396 008
1,14	0,657 449	0,472 527	2,08	1,492 417	0,385 795
1,16	0,671 936	0,477 130	2,1	1,513 242	0,375 121
1,18	0,686 562	0,481 529	2,12	1,534 155	0,363 979
1,2	0,701 329	0,485 718	2,14	1,555 153	0,352 364
1,22	0,716 238	0,489 693	2,16	1,576 231	0,340 268
1,24	0,731 290	0,493 451	2,18	1,597 384	0,327 685
1,26	0,746 485	0,496 985	2,2	1,618 609	0,314 608
1,28	0,761 825	0,500 292	2,22	1,639 900	0,301 031
1,3	0,777 310	0,503 366	2,24	1,661 252	0,286 948
1,32	0,792 941	0,506 203	2,26	1,682 661	0,272 350
1,34	0,808 719	0,508 798	2,28	1,704 120	0,257 232
1,36	0,824 644	0,511 145	2,3	1,725 626	0,241 588
1,38	0,840 716	0,513 241	2,32	1,747 171	0,225 409
1,4	0,856 937	0,515 080	2,34	1,768 750	0,208 691
1,42	0,873 305	0,516 657	2,36	1,790 357	0,191 425
1,44	0,889 821	0,517 966	2,38	1,811 987	0,173 606
1,46	0,906 487	0,519 003	2,4	1,833 631	0,155 226
1,48	0,923 300	0,519 763	2,42	1,855 285	0,136 279
1,5	0,940 262	0,520 240	2,44	1,876 941	0,116 758
1,52	0,957 372	0,520 428	2,46	1,898 592	0,096 657
1,54	0,974 629	0,520 324	2,48	1,920 232	0,075 968
1,56	0,992 034	0,519 920	2,5	1,941 852	0,054 685
1,58	1,009 586	0,519 213	2,52	1,963 446	0,032 802
1,6	1,027 285	0,518 195	2,54	1,985 005	0,010 312
1,62	1,045 129	0,516 863	2,56	2,006 522	— 0,012 792
1,64	1,063 117	0,515 209	2,58	2,027 988	— 0,036 517
1,66	1,081 250	0,513 229	2,6	2,049 395	— 0,060 869
1,68	1,099 526	0,510 917	2,62	2,070 734	— 0,085 854
1,7	1,117 943	0,508 267	2,64	2,091 998	— 0,111 480
1,72	1,136 501	0,505 273	2,66	2,113 176	— 0,137 752
1,74	1,155 198	0,501 930	2,68	2,134 259	— 0,164 677
1,76	1,174 033	0,498 231	2,7	2,155 239	— 0,192 262
1,78	1,193 004	0,494 172	2,72	2,176 104	— 0,220 512
1,8	1,212 109	0,489 745	2,74	2,196 847	— 0,249 435

x	$\sqrt{2} \cdot I_1(x\sqrt{j})$ réelle	imaginaire	x	$\sqrt{2} \cdot I_1(x\sqrt{j})$ réelle	imaginaire
2,76	2,217 455	—0,279 036	3,7	2,792 266	—2,529 292
2,78	2,237 920	—0,309 322	3,72	2,789 670	—2,596 725
2,8	2,258 230	—0,340 299	3,74	2,786 133	—2,664 985
2,82	2,278 374	—0,371 972	3,76	2,781 631	—2,734 067
2,84	2,298 342	—0,404 349	3,78	3,776 140	—2,803 970
2,86	2,318 122	—0,437 434	3,8	2,769 637	—2,874 690
2,88	2,337 703	—0,471 234	3,82	2,762 098	—2,946 224
2,9	2,357 073	—0,505 755	3,84	2,753 499	—3,018 566
2,92	2,376 220	—0,541 002	3,86	2,743 814	—3,091 712
2,94	2,395 132	—0,576 981	3,88	2,733 019	—3,165 658
2,96	2,413 796	—0,613 697	3,9	2,721 089	—3,240 398
2,98	2,432 199	—0,651 157	3,92	2,707 999	—3,315 926
3,—	2,450 329	—0,689 364	3,94	2,693 723	—3,392 236
3,02	2,468 172	—0,728 325	3,96	2,678 234	—3,469 322
3,04	2,485 715	—0,768 045	3,98	2,661 508	—3,547 176
3,06	2,502 943	—0,808 529	4,—	2,643 517	—3,625 791
3,08	2,519 844	—0,849 781	4,02	2,624 234	—3,705 160
3,1	2,536 402	—0,891 807	4,04	2,603 634	—3,785 273
3,12	2,552 604	—0,934 610	4,06	2,581 689	—3,866 121
3,14	2,568 433	—0,978 197	4,08	2,558 372	—3,947 697
3,16	2,583 876	—1,022 570	4,1	2,533 655	—4,029 988
3,18	2,598 917	—1,067 734	4,12	2,507 509	—4,112 986
3,2	2,613 541	—1,113 693	4,14	2,479 909	—4,196 679
3,22	2,627 731	—1,160 452	4,16	2,450 824	—4,281 056
3,24	2,641 471	—1,208 013	4,18	2,420 227	—4,366 105
3,26	2,654 745	—1,256 382	4,2	2,388 089	—4,451 813
3,28	2,667 537	—1,305 560	4,22	2,354 381	—4,538 168
3,3	2,679 829	—1,355 551	4,24	2,319 075	—4,625 156
3,32	2,691 605	—1,406 358	4,26	2,282 140	—4,712 762
3,34	2,702 846	—1,457 985	4,28	2,243 547	—4,800 973
3,36	2,713 535	—1,510 433	4,3	2,203 268	—4,889 772
3,38	2,723 654	—1,563 706	4,32	2,161 271	—4,979 143
3,4	2,733 185	—1,617 805	4,34	2,117 528	—5,069 071
3,42	2,742 109	—1,672 733	4,36	2,072 007	—5,159 538
3,44	2,750 407	—1,728 491	4,38	2,024 680	—5,250 526
3,46	2,758 061	—1,785 082	4,4	1,975 514	—5,342 016
3,48	2,765 050	—1,842 505	4,42	1,924 481	—5,433 990
3,5	2,771 355	—1,900 763	4,44	1,871 548	—5,526 428
3,52	2,776 957	—1,959 856	4,46	1,816 685	—5,619 309
3,54	2,781 834	—2,019 785	4,48	1,759 862	—5,712 612
3,56	2,785 967	—2,080 551	4,5	1,701 047	—5,806 316
3,58	2,789 334	—2,142 152	4,52	1,640 208	—5,900 397
3,6	2,791 915	—2,204 590	4,54	1,577 316	—5,994 833
3,62	2,793 688	—2,267 863	4,56	1,512 337	—6,089 599
3,64	2,794 632	—2,331 972	4,58	1,445 242	—6,184 671
3,66	2,794 724	—2,396 913	4,6	1,375 998	—6,280 023
3,68	2,793 943	—2,462 688			

IV. — Table de la fonction B(x).

x	B(x)	x	B(x)	x	B(x)
0	0	0,88	0,037 539	1,76	0,614 730
0,02	0	0,9	0,041 076	1,78	0,643 882
0,04	0	0,92	0,044 858	1,8	0,674 102
0,06	0,000 001	0,94	0,048 896	1,82	0,705 418
0,08	0,000 003	0,96	0,053 202	1,84	0,737 862
0,1	0,000 006	0,98	0,057 786	1,86	0,771 465
0,12	0,000 013	1,—	0,062 663	1,88	0,806 258
0,14	0,000 024	1,02	0,067 843	1,9	0,842 274
0,16	0,000 041	1,04	0,073 339	1,92	0,879 546
0,18	0,000 066	1,06	0,079 164	1,94	0,918 110
0,2	0,000 100	1,08	0,085 332	1,96	0,957 998
0,22	0,000 146	1,1	0,091 855	1,98	0,999 249
0,24	0,000 207	1,12	0,098 748	2,—	1,041 898
0,26	0,000 286	1,14	0,106 025	2,02	1,085 984
0,28	0,000 384	1,16	0,113 699	2,04	1,131 545
0,3	0,000 506	1,18	0,121 786	2,06	1,178 621
0,32	0,000 655	1,2	0,130 300	2,08	1,227 253
0,34	0,000 835	1,22	0,139 258	2,1	1,277 483
0,36	0,001 050	1,24	0,148 674	2,12	1,329 354
0,38	0,001 303	1,26	0,158 564	2,14	1,382 909
0,4	0,001 600	1,28	0,168 946	2,16	1,438 195
0,42	0,001 945	1,3	0,179 835	2,18	1,495 257
0,44	0,002 343	1,32	0,191 249	2,2	1,554 144
0,46	0,002 799	1,34	0,203 205	2,22	1,614 904
0,48	0,003 318	1,36	0,215 721	2,24	1,677 588
0,5	0,003 907	1,38	0,228 815	2,26	1,742 248
0,52	0,004 571	1,4	0,242 505	2,28	1,808 936
0,54	0,005 316	1,42	0,256 811	2,3	1,877 707
0,56	0,006 148	1,44	0,271 752	2,32	1,948 618
0,58	0,007 075	1,46	0,287 348	2,34	2,021 725
0,6	0,008 103	1,48	0,303 619	2,36	2,097 089
0,62	0,009 239	1,5	0,320 585	2,38	2,174 769
0,64	0,010 490	1,52	0,338 268	2,4	2,254 829
0,66	0,011 865	1,54	0,356 689	2,42	2,337 333
0,68	0,013 371	1,56	0,375 871	2,44	2,422 347
0,7	0,015 016	1,58	0,395 836	2,46	2,509 939
0,72	0,016 808	1,6	0,416 606	2,48	2,600 180
0,74	0,018 756	1,62	0,438 207	2,5	2,693 140
0,76	0,020 869	1,64	0,460 660	2,52	2,788 894
0,78	0,023 157	1,66	0,483 992	2,54	2,887 518
0,8	0,025 627	1,68	0,508 228	2,56	2,989 090
0,82	0,028 291	1,7	0,533 393	2,58	3,093 691
0,84	0,031 157	1,72	0,559 513	2,6	3,201 404
0,86	0,034 237	1,74	0,586 617	2,62	3,312 313

x	$B(x)$	x	$B(x)$	x	$B(x)$
2,64	3,426 508	3,3	9,796 386	3,96	26,071 958
2,66	3,544 077	3,32	10,098 274	3,98	26,843 601
2,68	3,665 114	3,34	10,408 847	4,—	27,637 592
2,7	3,789 714	3,36	10,728 356	4,02	28,454 585
2,72	3,917 976	3,38	11,057 057	4,04	29,295 250
2,74	4,050 001	3,4	11,395 216	4,06	30,160 281
2,76	4,185 893	3,42	11,743 106	4,08	31,050 387
2,78	4,325 760	3,44	12,101 007	4,1	31,966 302
2,8	4,469 711	3,46	12,469 210	4,12	32,908 779
2,82	4,617 861	3,48	12,848 013	4,14	33,878 595
2,84	4,770 326	3,5	13,237 721	4,16	34,876 548
2,86	4,927 227	3,52	13,638 651	4,18	35,903 460
2,88	5,088 688	3,54	14,051 129	4,2	36,960 177
2,9	5,254 837	3,56	14,475 488	4,22	38.047 570
2,92	5,425 804	3,58	14,912 075	4,24	39.166 535
2,94	5,601 726	3,6	15,361 243	4,26	40,317 993
2,96	5,782 742	3,62	15,823 359	4,28	41,502 894
2,98	5,968 995	9,64	16,298 798	4,3	42,722 214
3,—	6,160 632	3,66	16,787 949	4,32	43,976 960
3,02	6,357 806	3,68	17,291 209	4,34	45,268 164
3,04	6,560 674	3,7	17,808 989	4,36	46,596 893
3,06	6,769 396	3,72	18,341 712	4,38	47,964 240
3,08	6,984 139	3,74	18,889 814	4,4	49,371 334
3,1	7,205 073	3,76	19,453 742	4,42	50,819 334
3,12	7,432 375	3,78	20,033 957	4,44	52,309 435
3,14	7,666 225	3,8	20,630 935	4,46	53,842 866
3,16	7,906 811	3,82	21,245 163	4,48	55,420 890
3,18	8,154 325	3,84	21,877 145	4,5	57,044 808
3,2	8,408 964	3,86	22,527 398	4,52	58,715 961
3,22	8,670 932	3,88	23,196 457	4,54	60,435 724
3,24	8,940 439	3,9	23,884 868	4,56	62,205 516
3,26	9,217 701	3,92	24,593 199	4,58	64,026 796
3,28	9,502 940	3,94	25,322 029	4,6	65,901 065

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE SUISSE

Conférences et communications

Réunions de Berthoud et de Zermatt, 1923.

---

1. Réunion de Berthoud, 6 mai 1923.

La Société mathématique suisse et la Société suisse des professeurs de mathématiques ont tenu une réunion commune à Berthoud le 6 mai 1923. Les séances, présidées successivement par MM. les prof. G. Dumas (Lausanne) et H. Schuepp (Zurich), ont été consacrées aux conférences et communications de MM. Fueter, Mohrmann, Chuard et Hierholtz.

1. Prof. R. Fueter (Zurich). — *La multiplication complexe des fonctions elliptiques.* — 1) *Notions de théorie des nombres.* Considérons le corps quadratique $k(\sqrt{m})$ où m est négatif et ne contient pas de facteurs carrés. D'après Dedekind, on appelle *module* $[\omega_1, \omega_2]$ l'ensemble de tous les nombres qu'on peut obtenir à partir de ω_1 et ω_2 par addition ou soustraction. Le module $[\omega_1, \omega_2]$ est un *idéal* (ω_1, ω_2), lorsque ω_1 et ω_2 sont des nombres entiers du corps et si chaque multiple entier $\nu(x_1\,\omega_1 + x_2\,\omega_2)$ appartient encore au module, x_1 et x_2 étant des nombres entiers rationnels et ν un entier du corps. ω_1 et ω_2 forment ce qu'on appelle une *base* de l'idéal. Nous choisissons ω_1 et ω_2 de telle manière que

$$\left[\text{partie imaginaire de } \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)\right] > 0 \ .$$

Deux nombres $\overline{\omega_1}$ et $\overline{\omega_2}$ ne forment une autre base du même idéal que s'il existe une substitution unimodulaire $S = \begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$, $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, à coefficients rationnels entiers α, β, γ, δ telle que l'on ait

$$\overline{\omega_2} = \alpha\omega_2 + \beta\omega_1 \ , \qquad \overline{\omega_1} = \gamma\omega_2 + \delta\omega_1 \ ,$$

ce qui entraîne

$$\frac{\overline{\omega_2}}{\overline{\omega_1}} = S\frac{\omega_2}{\omega} \ .$$

Deux idéaux $w = (\omega_1, \omega_2)$ et $\overline{w} = (\overline{\omega_1}, \overline{\omega_2})$ sont dits *équivalents* s'il existe deux entiers ν et $\overline{\nu}$ tels que

$$(\nu)\, w = (\overline{\nu})\, \overline{w} \ ,$$

où l'on a:

$$(\nu)\, w = (\nu\omega_1 \, , \, \nu\omega_2) \ , \qquad (\overline{\nu})\, \overline{w} = (\overline{\nu}\,\overline{\omega_1} \, , \, \overline{\nu}\,\overline{\omega_2}) \ .$$

$\nu\omega_1$, $\nu\omega_2$ et $\overline{\nu}\,\overline{\omega_1}$, $\overline{\nu}\,\overline{\omega_2}$ étant des bases de ces idéaux. Il s'ensuit que w et $\overline{w}$ ne sont équivalents que s'il existe une substitution unimodulaire S ayant les propriétés rappelées plus haut, telle que

$$\frac{\overline{\omega_2}}{\overline{\omega_1}} = S \frac{\omega_2}{\omega_1} \ .$$

On dit que deux idéaux équivalents font partie de la *même classe.* Le nombre h des classes différentes est fini.

2) *La fonction elliptique.* Soit $\wp(z; \omega_1, \omega_2)$ la fonction elliptique de Weierstrass aux périodes ω_1 et ω_2. Pour les recherches ultérieures, il est préférable d'introduire la fonction:

$$T(z \, ; \, \omega_1 \, , \, \omega_2) = \frac{\wp\left(\frac{\omega_3}{4}\right) - \wp\left(\frac{\omega_3}{2}\right)}{\wp(z) - \wp\left(\frac{\omega_3}{2}\right)} \ , \qquad (\omega_3 = \omega_1 + \omega_2)$$

qui a les propriétés suivantes:

a) $T(z\,; \omega_1, \omega_2)$ est une fonction elliptique *paire*;

b) $T(z; \omega_1, \omega_2)$ est homogène de degré zéro en z, ω_1, ω_2;
$T(tz;\, t\omega_1,\, t\omega_2) = T(z;\, \omega_1,\, \omega_2)$;

c) $T(z;\, \omega_1,\, \omega_2)$ ne change pas lorsqu'on soumet le couple des périodes ω_1 et ω_2 à une substitution unimodulaire $S = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ telle que:

$$\alpha \equiv \delta \equiv \pm 1 \ , \qquad \beta \equiv \gamma \equiv 0 \qquad (\text{mod } 4)$$

d) $T(z; \omega_1, \omega_2)$ est d'ordre deux, c'est-à-dire qu'elle prend dans un parallélogramme des périodes deux fois la même valeur. Elle a pour $z = 0$, un zéro d'ordre deux et pour $z = \frac{\omega_3}{2}$ un pôle double.

e) $T(z; \omega_1, \omega_2)$ admet les développements:

$$T(z) = h^2 + \sum_{k=2}^{\infty} A_k(t)\, h^{2k} \ , \qquad h = 2\sqrt{\frac{3e_3}{t}} \ ,$$

$$T(z) = \frac{1}{h_1^2} + \sum_{k=0}^{\infty} B_k(t)\, h_1^{2k} \ , \qquad h_1 = 2\sqrt{\frac{3e_3}{t}} \left(z - \frac{\omega_3}{2}\right) \ ,$$

où

$$t = \frac{4 \cdot 3\,\wp\left(\frac{\omega_3}{2}\right)}{\wp\left(\frac{\omega_3}{4}\right) - \wp\left(\frac{\omega_3}{2}\right)}$$

est une fonction modulaire qui reste invariable pour toutes les substitutions unimodulaires telles que celles qui sont considérées sous *c*) et où les A(t) et B(t) sont des fonctions rationnelles entières de t à coefficients rationnels.

f) Posons:

$$\frac{d\,T(t)}{dh} = T_1(z)$$

on a:

$$T_1^2(z) = T(z)\left[4\,T^2(z) + t\,T(z) + 4\right] .$$

Pour les applications algébriques et arithmétiques, il convient encore de rappeler les trois théorèmes suivants ressortissant à la théorie des fonctions.

Toute fonction elliptique prend dans le parallélogramme des périodes toute valeur le même nombre de fois.

Toute fonction elliptique paire aux périodes ω_1 *et* ω_2 *est une fonction rationnelle de* $T(z;\ \omega_1, \omega_2)$.

Cette fonction rationnelle a pour coefficients des fonctions rationnelles de t *à coefficients rationnels, si elle est développable en série de puissances de* h *comme* T(z) elle-même.

3) *Modules singuliers.* La fonction modulaire $t = t(\omega_1, \omega_2)$ est liée à l'invariant complet $j\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)$ des fonctions modulaires par l'équation:

$$j\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right) = \frac{(t^2 - 3 \cdot 2^4)^3}{t^2 - 2^6} .$$

Si l'on prend par conséquent pour ω_1 et ω_2 les nombres qui forment la base d'un idéal $\mathfrak{w} = (\omega_1, \omega_2)$ de $k(\sqrt{m})$, on voit, en vertu des théorèmes de 1) et de l'égalité:

$$j\left(S\frac{\omega_2}{\omega_1}\right) = j\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)$$

que t peut admettre pour chaque choix de la base dans $\mathfrak{w}$, au plus 6 valeurs distinctes. On obtient les mêmes valeurs, même si, au lieu de $\mathfrak{w}$, on prend un autre idéal de $k(\sqrt{m})$ appartenant à la même classe que $\mathfrak{w}$. Ainsi sous certaines hypothèses, $t\,(\omega_1, \omega_2)$ ne dépend pas de $\mathfrak{w}$,

mais ne dépend que de la classe d'anneaux k_r de conducteur 4, dans laquelle l'idéal d'anneau correspondant à w est contenu. On écrit:

$$t(\omega_1, \omega_2) = t(k_r) .$$

Ces valeurs du module s'appellent des *modules singuliers.*

La théorie des équations de transformation montre immédiatement que t est un nombre algébrique. Le corps qui est formé à partir de $k(\sqrt{m})$ et de t est relativement abélien par rapport à $k(\sqrt{m})$; son degré relatif est égal au nombre de classes h_r de l'anneau dans $k(\sqrt{m})$, de conducteur 4.

4) *La multiplication complexe.* Si l'on choisit pour les périodes d'une fonction elliptique la base qu'on vient de définir pour un idéal $w = (\omega_1, \omega_2)$, on dit que la fonction est une *fonction elliptique singulière.* Si ν est un entier du corps $k(\sqrt{m})$, les nombres $\nu\omega_1$ et $\nu\omega_2$ sont encore des nombres de l'idéal; c'est dire que l'on peut trouver des nombres rationnels entiers x_1, x_2, x_3 et x_4 tels que :

$$\nu\omega_1 = x_1\omega_1 + x_2\omega_2 ,$$

$$\nu\omega_2 = x_3\omega_1 + x_4\omega_2 ;$$

mais cela signifie que $T(\nu z)$ possède de nouveau les périodes ω_1 et ω_2. D'après les théorèmes énoncés sous 2) *(in fine)*, on a par suite:

$$T(\nu z) = R_\nu[T(z)] ,$$

où R_ν est une fonction rationnelle dont les coefficients sont des fonctions rationnelles des modules singuliers t, à coefficients numériques appartenant à $k(\sqrt{m})$ (parce que ν entre dans les coefficients du développement). Les coefficients de R_ν sont par conséquent des nombres algébriques.

Les racines $T\left(\frac{x_1\omega_1 + x_2\omega_2}{\nu}\right)$ du numérateur sont alors des nombres algébriques. Par suite de la périodicité de $T(z)$, ces racines ne dépendent que de la classe de restes de $x_1\omega_1 + x_2\omega_2$ (mod ν) et l'on trouve toutes les racines à partir de l'une d'elles en donnant à ξ dans $T\left(\xi\frac{x_1\omega_1 + x_2\omega_2}{\nu}\right)$ toutes les valeurs appartenant à un système complet de restes (mod ν). Si $x_1\omega_1 + x_2\omega_2$ est premier à 4ν, le degré de l'équation à laquelle $T\left(\frac{x_1\omega_1 + x_2\omega_2}{4\nu}\right)$ satisfait et dont les coefficients sont dans le corps des modules singuliers est $\varphi(\nu)$, lorsque (ν) et (2) sont premiers entre eux et que $x_1 \equiv x_2 \equiv \pm 1$ (mod. 4). On trouve toutes les racines de cette équation en remplaçant dans $T\left(\xi\frac{x_1\omega_1 + x_2\omega_2}{4\nu}\right)$ ξ par les nombres premiers à 4ν, d'un système

de restes (mod 4ν). Mais d'après les théorèmes rappelés plus haut, on a:

$$T(\xi z) = R_\xi[T(z)] ,$$

où R_ξ a de nouveau les propriétés indiquées plus haut et ne dépend que de ξ. Par conséquent toute racine de l'équation s'exprime rationnellement en fonction de chaque autre dans le corps des modules singuliers.

Les racines $T\left(\frac{x_1\omega_1 + x_2\omega_2}{4\nu}\right)$ ne dépendent que de $w = (\omega_1, \omega_2)$, de la classe d'anneaux k_r qui correspond au module singulier $t = t\,(k_r)$ et de la classe de restes ξ (mod $4\,\nu$).

Considérons deux classes d'anneaux différentes, on peut les représenter par deux idéaux $w = (\omega_1, \omega_2)$ et $\overline{w} = (n\omega_1, \omega_2)$ où n est entier rationnel. Alors en vertu des mêmes considérations, on a:

$$T(z\,;\,\omega_1,\,\omega_2) = R_n[T(z\,;\,n\omega_1,\,\omega_2)] ,$$

où R_n a les mêmes propriétés que celles que nous avons énumérées plus haut. On peut donc aussi exprimer deux valeurs de $T\left(\frac{x_1\omega_1 + x_2\omega_2}{4\nu}\right)$ appartenant à deux classes différentes, rationnellement l'une en fonction de l'autre, et avec les modules singuliers. Le corps des valeurs $T\left(\frac{x_1\omega_1 + x_2\omega_2}{4\nu}\right)$ est par suite relativement galoisien par rapport à $k(\sqrt{m})$, et il est à remarquer que la théorie des fonctions fournit la représentation de toutes les racines au moyen d'une seule.

Mais le groupe est même abélien, puisque les représentations ne dépendent que de n ou de ξ et jamais de la racine considérée. Par suite le corps formé par $T\left(\frac{x_1\omega_1 + x_2\omega_2}{4\nu}\right)$, t, $\sqrt{m}$ est relativement abélien à $k(\sqrt{m})$. Le degré relatif est $\varphi(\nu)h_r$.

Si l'on fait dans $k(\sqrt{m})$ la décomposition plus poussée des classes, en considérant w et $\overline{w}$ comme équivalents, lorsque en plus de

$$(\mu)w = (\overline{\mu})\overline{w} ,$$

on a encore:

$$\frac{\overline{\mu}}{\mu} \equiv \pm 1 \qquad (\text{mod } 4\nu) ,$$

alors les idéaux équivalents forment une classe de rayons (mod $4\,\nu$). Le nombre de ces classes h_s est fini et pour ν impair, il est égal à $\varphi(\nu)\,h_r$. On peut faire correspondre inversement, d'une manière uni-

voque, à chaque $T\left(\frac{x_1\omega_1 + x_2\omega_2}{4\nu}\right)$ de l'équation relative par rapport à $k(\sqrt{m})$, une classe de rayons k_s (mod 4ν), et on écrit:

$$T\left(\frac{x_1\omega_1 + x_2\omega_2}{4\nu}\right) = T(k_s) .$$

Si $\overline{k_s}$ et k_s sont deux classes de rayons (mod 4ν) quelconques et si $\overline{k_s} = \overline{\overline{k_s}}\, k_s$, on tire des relations obtenues plus haut:

$$T(\overline{k_s}) = \mathrm{R}_{\overline{\overline{k_s}}}[T(k_s)]$$

et $\mathrm{R}_{\overline{\overline{k_s}}}$ est une fonction rationnelle qui ne dépend que de $\overline{\overline{k_s}}$ et dont les coefficients sont des nombres de $k(\sqrt{m})$. On reconnaît ainsi que le groupe relativement abélien doit être holoédriquement isomorphe avec le groupe des classes de rayons (mod 4ν).

En résumé la théorie des fonctions ne fournit pas seulement des nombres algébriques, mais elle donne aussi leur groupe de Galois. Une analyse plus serrée des fonctions R permet d'obtenir d'autres conséquences purement arithmétiques; par exemple, on peut obtenir la décomposition des idéaux premiers de $k(\sqrt{m})$ dans le corps supérieur des valeurs $T(k_s)$.

Zurich, le 21 juin 1923.

2. Prof. H. MOHRMANN (Bâle). — *Sur les courbes algébriques admettant un groupe automorphe et continu de collineations.* — En sa « spira mirabilis » Jacob BERNOULLI a donné un premier exemple intéressant d'une courbe qui se reproduit par une série infinie de transformations homographiques.

MM. F. KLEIN et S. LIE, dans un travail en collaboration, ont déterminé plus tard toutes les courbes *planes* admettant un groupe automorphe de collinéations (courbes V). Pour les espaces de 3 et de plus de 3 dimensions, le problème est encore à résoudre.

Il s'agirait ici de réduire les types de collinéations à certaines formes normales ou de déterminer les types de transformations projectives infinitésimales, ce qui n'a point encore été effectué.

Par contre il n'est point nécessaire d'avoir résolu l'un ou l'autre des 2 problèmes ci-dessus pour pouvoir déterminer les courbes V *algébriques* d'un espace de dimensions quelconques.

Les collinéations du groupe ont dans ce cas nécessairement $r + 1$ points fixes séparés ou réunis en un seul. Ceci est une conséquence du fait que la somme S de tous les éléments stationnaires d'une courbe

irréductible à $r-1$ courbures, de $n^{\text{ième}}$ ordre, de $m^{\text{ième}}$ classe et de genre p est donnée par la formule

$$S = \sum \sum_{k=0}^{r-1} (a_k - 1) = n + m + 2r(p-1) .$$

On en déduit sans grandes difficultés que toute courbe V algébrique est rationnelle et que les coordonnées (cartésiennes) de ses points sont des puissances entières d'un paramètre:

$$x_k = \lambda^{n_k} .$$

(La démonstration détaillée a paru entre temps dans les *Math. Annalen*, V. 89, pp. 260-271.)

3. Dr J. Chuard (Lausanne). — *Sur un théorème relatif à certains réseaux cubiques tracés sur une sphère.* — M. Errera a introduit, à propos du théorème des quatre couleurs, la notion de *carte normale* [1]. Les réseaux cubiques dont il est question ici, comme d'ailleurs ceux que j'avais en vue dans une communication précédente [2], caractérisent précisément des cartes normales sur la sphère. Mon but est alors de justifier le théorème suivant:

Dans tout réseau cubique ainsi considéré, il existe un réseau quadratique connexe.

Un tel réseau quadratique est représenté par un contour fermé unique qui passe par chacun des sommets du réseau cubique.

Désignons sous le nom de *bifurcation* un sommet de degré 3. Puis classons en familles les arbres linéaires qui empruntent tous les sommets du réseau envisagé, d'après le nombre de leurs bifurcations. Parmi les familles ainsi obtenues, l'une d'elles mérite une place à part: c'est celle qui ne présente aucune bifurcation. Les arbres linéaires qu'elle renferme sont de deux types différents. L'un d'eux, que je dénommerai contour V, a ses extrémités contiguës à une même arête. L'autre, qui ne remplit pas ces conditions, est un contour Z.

On a alors les propositions:

I. *Il est possible de diminuer le nombre des bifurcations d'un arbre linéaire donné.*

II. *Ce nombre peut être réduit à zéro.*

III. *D'un contour Z on peut déduire un contour V.*

IV. *L'existence d'un contour V assure celle du réseau quadratique considéré.*

---

[1] A. Errera, Du coloriage des cartes..., p. 33. Gauthier-Villars, Paris; Falk fils, Bruxelles. 1923.

[2] Berne: Le problème des quatre couleurs, 26 août 1922. Voir *L'Ens. Math.*, 22e année, p. 373.

4. M. R. Hierholtz (Montreux). — *Guerre et science.* — *a*) *Service météorologique.* Ce service s'est considérablement développé pendant la guerre; une de ses tâches les plus importantes fut la détermination de la direction et de la force du vent à diverses hauteurs.

L'expérience montre que pour une force ascensionnelle donnée, la vitesse verticale d'un ballon est *pratiquement* uniforme et la même dans tous les cas. Il est donc facile, avec un seul théodolite, de déterminer la position du ballon à un instant quelconque; on en déduit le vent moyen dans une couche déterminée. Pour l'artillerie, ce résultat est insuffisant: il faut remplacer cette série de vents moyens superposés par une résultante unique. Si t_k est la durée du passage (aller et retour) de l'obus dans une couche d'ordre k, le rapport

$$\frac{t_k}{T} \quad .$$

T étant la durée totale du trajet, ne dépend que de la flèche, et non de la portée; il est donc facile à calculer au moyen de la formule

$$e = \frac{1}{2} g t^2$$

cas d'une portée nulle.

Si v_0, v_1 ... sont les Vents moyens dans les différentes couches (d'égale épaisseur), numérotées à partir du sol, il faut calculer les vecteurs :

$$R_1 = a_0 v_0 + a_1 v_1 \ ,$$

pour 2 couches,

$$R_2 = b_0 v_0 + b_1 v_1 + b_2 v_2 \ ,$$

pour 3 couches ..... ; les a, b, ... étant les coefficients déterminés ci-dessus.

De nombreux moyens plus ou moins ingénieux ont été donnés pour faire ce calcul. Indiquons-en simplement un.

Pour simplifier, j'appelle encore v_0, v_1, ... les *projections* des vents moyens sur un axe. Prenons à gauche de la feuille, comme premier axe, une droite portant des divisions égales; à droite de la feuille, et à une distance d de l'axe précédent un 2me axe parallèle au premier et portant une échelle identique à celle du premier; on peut trouver un 3me axe parallèle aux précédents, à une distance x du premier, portant encore une échelle identique et tel que la droite $v_1 v_0$ (v_1 étant pris sur l'axe de gauche, v_0 sur celui de droite) coupe ce 3me axe en un point

$$R_1 = a_1 v_1 + a_0 v_0 \ ,$$

on a: $x = a_0 d$.

Prenant v_2 sur l'axe de gauche, v_1 sur celui de droite, la droite $v_2 v_1$ coupe l'axe x en un point

$$A_1 = a_1 v_2 + a_0 v_1 \, .$$

Nous pouvons maintenant calculer la position d'un nouvel axe parallèle à une distance y de l'axe x et tel qu'un nouvel alignement: A_1 (sur l'axe x) et v_0 (sur l'axe de droite) donne

$$R_2 = b_2 v_2 + b_1 v_1 + b_0 v_0$$

sur cet axe y.

Nous pourrons ainsi continuer pour R_3, R_4 ... les seules conditions de possibilité sont:

$$a_0 + a_1 = 1 \, ,$$

$$b_0 + b_1 + b_2 = 1 \, , \qquad \text{etc.}$$

conditions remplies par définition.

Tous les calculs sont donc faits par un simple déplacement de ficelle.

Ces corrections de vent ont une importance plus grande qu'on ne le pense au premier abord: pour des pièces de gros calibre on a pu observer en une seule journée des variations de plus d'un kilomètre, sur une portée d'une vingtaine de km.

b) *Repérage par le son.* Supposons une explosion se produisant en un point M; en A et B sont 2 observateurs, A entend l'explosion t secondes avant B on a donc

$$MB - MA = vt \, ,$$

v étant la vitesse du son dans l'air dans les conditions de l'expérience. Les points A et B étant donnés, M se trouve sur une hyperbole.

La comparaison entre le temps noté par un 3me observateur C, et un des observateurs précédents donnera une 2me hyperbole coupant la première en M et M'; on saura en général immédiatement duquel de ces 2 points il s'agit.

Tel est le principe du repérage par le son. Au début les observateurs enregistraient eux-mêmes le moment où ils percevaient le son, mais même en tenant compte autant que possible de l'équation personnelle, les résultats furent absolument déconcertants. En analysant de plus près les phénomènes qui se produisent lors du tir du canon, on s'aperçut (voir en particulier les travaux de M. Esclangon) que l'on avait à faire à 2 phénomènes: 1° le coup de canon lui-même (onde de bouche) qui produit une dénivellation manométrique relativement forte, mais à oscillation lente et 2° l'onde de choc produite par le sillage des obus *plus rapides que le son*, onde à oscillations très rapides et influençant très fortement l'oreille humaine.

On remplaça alors l'oreille par des microphones montés sur un résonnateur de grand volume, sensibles surtout à l'onde de bouche. Le problème se trouva résolu. Un quatrième poste permet une vérification.

Un procédé analogue fut employé pour des sondages aériens par temps couvert. Des ballons porteurs d'explosifs étaient lâchés, les explosions se produisaient à diverses hauteurs évaluées grossièrement par la longueur de la mèche. Des microphones, au nombre de 7 et placés sur 2 lignes perpendiculaires, enregistraient les détonations et permettaient de calculer exactement la position des ballons au moment de l'explosion.

II. Réunion de Zermatt, 31 août 1923.

La Société mathématique suisse a tenu son assemblée annuelle à Zermatt, le 31 août 1923, sous la présidence de M. le Prof. G. Dumas, à l'occasion de la 104me Réunion annuelle de la Société helvétique des sciences naturelles. Dans sa séance administrative, la société a constitué comme suit son comité pour 1924 et 1925: M. le Prof. A. Speiser (Zurich), président; M. le Prof. Chr. Moser (Berne), vice-président; M. le Prof. S. Bays (Fribourg), secrétaire. Deux réunions sont prévues pour 1924: une séance extraordinaire aura lieu à *Lugano*, pendant les vacances de Pâques, tandis que l'assemblée annuelle se tiendra à *Lucerne*, au début du mois d'octobre.

Le programme de la *partie scientifique* comprenait sept communications, dont les trois suivantes ont été effectivement présentées à la séance:

1. Mme G.-C. Young, La Conversion (Vaud). — *Le Nombre Nuptial de Platon.* — Après avoir résumé la manière dont le nombre nuptial entre dans la *République de Platon* [1], Mme Young cite Adam, qui prétend que c'est le passage le plus difficile dans les œuvres de Platon, puis Cousin, dont l'excellente traduction montre une lacune sur ce point, et qui se déclare incapable de ne rien y comprendre. Depuis ce temps les recherches des philologues ont complètement éclairci plusieurs passages, mais une traduction satisfaisante manquait encore. La conférencière donne une version qui vise à maintenir la façon criptique employée par Socrate, et ensuite elle éclaircit d'une façon originale la partie mathématique, qu'elle croit fondée sur la solution en nombres entiers, sans facteur commun, des équations simultanées

$$x^2 + y^2 = z^2 , \qquad x^3 + y^3 + z^3 = t^3 .$$

[1] VII, 546 B.

Elle démontre que la seule solution consiste en

$$(x, y) = (3, 4), \qquad z = 5, \qquad t = 6,$$

une solution qu'une vieille tradition grecque veut que Platon ait connue et qu'il peut très bien avoir trouvée. Pour les détails on pourra consulter un mémoire qui paraîtra prochainement dans les *Proceedings* de la Société mathématique de Londres.

2. Prof. A. Speiser (Zurich). — *Sur une figure géométrique se rapportant à la théorie des nombres.* — L'on construit l'ensemble des cercles qui ont leurs centres (en coordonnées rectangulaires) aux points $x = \frac{p}{q}$, $y = \frac{1}{2q^2}$ et les rayons $r = \frac{1}{2q^2}$, où $\frac{p}{q}$ signifie l'ensemble des fractions rationelles réduites. Ces cercles touchent l'axe des x aux points à abscisses rationelles $\frac{p}{q}$ et l'on trouve qu'ils *ne se coupent pas* et que les parties lacunaires sont des triangles formés d'arcs de cercles qui *se touchent.* Il s'ensuit que l'ordonnée issue d'un point irrationnel ω de l'axe des x rencontre une infinité de cercles, c'est-à-dire que l'équation $\left|\omega - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{2q^2}$ admet une infinité de solutions. C'est là le théorème fondamental des fractions continues

Changeons maintenant les rayons des cercles, de sorte que le centre soit au point $x = \frac{p}{q}$, $y = \frac{1}{\alpha q^2}$ et le rayon $r = \frac{1}{\alpha q^2}$. En faisant décroître α à partir de 2, les lacunes diminuent, et pour $\alpha = \sqrt{3}$, elles se réduisent toutes à des points. Ceci est équivalent au théorème sur le maximinimum des formes quadratiques binaires positives.

3. Prof. R. Wavre (Genève). — *Sur la réduction des domaines de l'espace à* 2n *dimensions par une substitution analytique à* n *variables complexes.* — Soit $Z_p = \psi_p(z_1, \dots z_n)$ une substitution régulière sur la frontière d'un domaine D_0 d'un seule tenant et simplement connexe de l'espace à $2n$ dimensions x_p, y_p, $z_p = x_p + iy_p$, $p = 1, 2, \dots, n$.

Si l'image, par la substitution de la frontière du domaine D_0 est intérieure à ce domaine, les domaines conséquents de D_0 par la substitution et toutes ses itérées convergent uniformément vers le seul point double de la substitution, qui soit intérieur à D_0.

Dans le cas d'une seule variable, M. Julia a établi cette propriété au moyen de la représentation conforme. Il résulte des études de Poincaré et de M. Reinhardt, que cet artifice ne réussirait pas dans le cas de plusieurs variables, pour un domaine D_0 de forme quelconque, tel que celui que j'ai envisagé. J'ai eu recours à la théorie des suites normales des fonctions analytiques à plusieurs variables.

Je me suis aperçu que dans ma note précédente, j'ai commis une

erreur, qui permet de suspecter jusqu'à plus ample démonstration que le domaine de Weierstrass d'une solution de l'équation de Schröder à plusieurs variables ne déborde pas le domaine immédiat. Tout ce que je puis démontrer est ceci:

Un point de la frontière du domaine immédiat est point de la frontière du domaine de Weierstrass de toutes les solutions fondamentales de l'équation de Schröder sauf, peut-être, d'une seule d'entre elles.

CHRONIQUE

L'amitié franco-portugaise.

Le présent fascicule de l'*Enseignement mathématique* commence par un résumé de conférences sur « Les Mathématiques en Portugal » qui ont été faites en les Facultés des Sciences de Paris et Toulouse, au mois de mai 1923, par M. Francisco Gomes Teixeira, l'éminent et bien connu géomètre portugais qui, d'ailleurs, dès les débuts de *L'Enseignement mathématique* honora grandement notre *Revue* en acceptant de faire partie du Comité de Patronage.

A Paris, un amphithéâtre de la Sorbonne réunissait sous la présidence de M. le doyen Molliard, une assistance choisie, dans laquelle on remarquait MM. Brillouin, Drach, Hadamard, Serge Bernstein et différentes personnalités, parmi lesquelles M. le Ministre de Portugal.

M. le Recteur P. Appell, dans un banquet qui suivit, dit ce que la Science devait à M. G. Teixeira, à la fois brillant créateur et interprète en Portugal de la science mathématique mondiale, plus particulièrement de la science française, d'où, au total, des « Œuvres » en sept magnifiques volumes. Et M. Appell ayant porté un toast aux Universités portugaises, M. Teixeira répondit en levant son verre en l'honneur des Universités françaises.

* * *

A Toulouse, on tenait beaucoup à ne point montrer moins de chaleur qu'à Paris. On sait qu'en France aucune Université provinciale n'a le renom de celle de la capitale; raison de plus pour montrer que la compréhension des œuvres des savants universels n'est pas plus imparfaite dans le Languedoc que dans l'Ile de France. Le signataire

de ces lignes, ayant eu l'honneur de dialoguer publiquement avec M. Teixeira, peut même donner des détails particulièrement circonstanciés.

Après avoir écouté la conférence sur les géomètres portugais des siècles passés, mon premier devoir était de dire de quelle façon brillante leur œuvre avait été continuée par mon savant interlocuteur.

Pour n'offenser en rien la continuité on pourrait reprendre les choses à Daniel da Silva, maître dont M. Teixeira a pieusement conservé le souvenir et dont il aime à se dire le disciple. Sans doute l'avenir unira définitivement les deux noms.

Mais n'hésitons pas à rendre spécialement hommage à M. Gomes Teixeira.

L'éminent géomètre est né le 28 janvier 1851.

Il fit de brillantes études à Coïmbre et commença à professer, à l'Université de cette ville, en 1876. Il devint ensuite membre de l'Académie des Sciences de Lisbonne et d'académies ou sociétés scientifiques disséminées dans le monde entier.

L'Institut de France l'a couronné du Prix Binoux qui se rapporte généralement à la Philosophie et à l'Histoire des Sciences

Puisqu'il s'agit surtout, dans ce qui suit, d'un doctorat *honoris causa*, n'oublions pas de mentionner que, le 20 mai 1922, un semblable titre était décerné à M. Gomes Teixeira par l'Université de Madrid. Il faut lire la Notice[1] publiée à cette occasion pour se représenter ce qu'est une telle cérémonie dans une Espagne si sentimentalement traditionnaliste, dans la chaude lumière qui donne toute la majesté possible aux costumes et au décor universitaires. Les cérémonies de France n'ont pas ou n'ont plus cette magie, mais nous croyons cependant qu'un savant étranger peut, même dans une mise en scène réduite, percevoir un hommage encore vibrant et éclatant: celui qui lui vient des intelligences et des cœurs. Sans doute M. G. Teixeira a perçu cet hommage; mais revenons à l'œuvre du savant portugais.

Cette œuvre est, heureusement, très facile à consulter puisqu'elle a été rassemblée par ordre du gouvernement portugais, en les sept forts volumes in-quarto dont il était question plus haut.

Dans le premier volume, il faut surtout remarquer une profonde étude de la série de Taylor, sujet extrêmement épineux au fond. Ladite série a des propriétés déconcertantes et doit cependant être acceptée comme l'instrument le plus naturel quant à la représentation des fonctions analytiques.

On sait que c'est un domaine qui, en France, a été cultivé par une pléiade de géomètres au premier rang desquels il faut citer MM. Jacques Hadamard et Emile Borel.

---

[1] Doutoramento do Prof. Fr. Gomes Teixeira na Universidade de Madrid. Noticia por Bento Carqueja. Coimbra. Imprensa da Universidade. 1923.

Dans le tome second, il faut distinguer des mémoires sur les équations de Monge-Ampère. Les surfaces minima ou les lames extra-minces formées par les liquides visqueux dépendent d'une équation de Monge-Ampère particulière. Il en est de même pour les surfaces à courbure totale constante, surfaces sur lesquelles on peut s'initier, avec le maximum de simplicité, aux généralisations de la géométrie euclidienne. Et les développements immenses que l'on atteint ainsi ne concernent cependant que deux équations rentrant très particulièrement dans le type indiqué. Il y a donc là un sujet, cultivé en France par M. Edouard Goursat, dont le caractère imposant va de pair avec celui de la série de Taylor.

Le tome troisième des œuvres de M. Gomes Teixeira est un traité de Calcul différentiel conçu avec un rare éclectisme.

Vient, de même, un volume de Calcul intégral avec la théorie des fonctions analytiques et particulièrement celle des fonctions elliptiques.

L'un des derniers tomes contient une étude étendue *Sur les problèmes célèbres de la géométrie élémentaire non résolubles avec la règle et le compas*. On sait que c'est là un sujet millénaire dont la véritable nature n'est apparue qu'aux géomètres du dix-neuvième siècle; il relève à la fois de la Science et de l'histoire de celle-ci.

Çà et là, dans le cours de ces volumes, des perles d'un vif éclat apparaissent sous forme de mémoires courts consacrés le plus souvent à des courbes à définition géométrique particulière. Ce sont ces perles qui, rassemblées et unies à d'autres, ont fini par former trois nouveaux livres constituant le *Traité des courbes spéciales remarquables planes et gauches*, ouvrage couronné et publié par l'Académie des Sciences de Madrid, puis traduit de l'espagnol en français. C'est d'ailleurs ici l'occasion d'ajouter aussi que bien d'autres travaux de M. Teixeira ont été rédigés dans notre langue et que, malgré tout notre désir de lui rendre hommage, nous n'arriverons sans doute jamais à reconnaître matériellement tout ce qu'il a si naturellement fait pour la France.

Après cette brève analyse, faut-il exprimer tout le réconfort qu'une telle œuvre doit nous inspirer. De misérables sophismes ont été dirigés contre les mathématiques et les mathématiciens.

La science des nombres a été comparée à une machine qui ne pouvait que transformer des hypothèses et des faits extérieurs à elle mais qui, par elle-même, ne pouvait avoir aucune valeur créatrice.

En réalité, les mathématiques constituent une forme épurée de la pensée ordinaire, si bien que l'assertion précédente revient à déclarer que la pensée ne saurait avoir de rôle créateur ! Or, elle est la créatrice par excellence et l'on se sent presque honteux d'avoir à combattre ce qui n'est qu'une forme particulièrement outrée d'un matérialisme des plus bas et des plus grossiers. Certes celui-ci ne mérite pas d'être

discuté, mais on doit peut-être aller jusqu'à dire pourquoi il ne le mérite pas.

Eh bien, mon cher Collègue, ai-je dit en m'adressant tout particulièrement à M. Teixeira, l'une des raisons les plus fortes prévalant contre le sophisme, c'est précisément qu'il existe des savants tels que vous !

Ceux-ci, après une longue et brillante carrière, n'ont jamais découvert le fameux substratum extra-mathématique sans lequel, au dire de certains, la science que nous aimons n'aurait point d'existence propre !

* * *

La cérémonie n'avait plus alors qu'à se terminer par la remise à M. Teixeira du diplôme de docteur *honoris causa* de l'Université de Toulouse. De chaleureuses allocutions furent prononcées par M. le Recteur Dresch et par M. le Doyen P. Sabatier devant la quasi-unanimité des professeurs de la Faculté et une nombreuse assistance d'élèves.

Il y fut parlé de la confraternité d'armes de la France et du Portugal, de l'étroite union des nations latines, du caractère unanime des votes conférant le nouveau doctorat à l'illustre Portugais et c'est au milieu de longs applaudissements que M. le Recteur lui fixa sur l'épaule la bande de soie rouge triplement barrée d'hermine.

Très ému, M. Teixeira reprit la parole. Il dit tout ce qu'il croyait devoir à la culture française, évoquant ses études mathématiques avec Lagrange, Lacroix, Bertrand, Hermite, celles concernant la Physique théorique faites dans Lamé et d'autres, relatives à la Mécanique céleste, pour lesquelles il se laissa guider par de Pontécoulant. Il passa en revue les gloires de la science française, de Descartes à Henri Poincaré. Il rappela combien M. Sabatier était apprécié, en Portugal, comme chimiste, eut un dernier mot pour le centenaire de Pasteur et nous laissa ainsi sous le charme de son extrême amabilité, de sa vaste érudition et de son incomparable modestie.

A. Buhl.

Congrès pour le progrès des sciences en Espagne et en Portugal.

Le voyage de M. Gomes Teixeira en France nous donne l'occasion de parler de Congrès espagnols et portugais en lesquels le savant géomètre a développé à nouveau ses conceptions sur la formation de la science mathématique dans toute la péninsule ibérique. Tout d'abord la *Associação Portuguesa para o Progresso das Sciências* a tenu, à Porto, conjointement avec le huitième Congrès de la *Associação Espanhola*, du 26 juin au 1er juillet 1921, un Premier Congrès dont le Discours Inaugural fut prononcé par M. G. Teixeira. Le sujet en

était la Collaboration des Espagnols et des Portugais aux grandes expéditions nautiques des XVe et XVIe siècles. Comme nous l'avons déjà remarqué, ceci touche d'extrêmement près à l'histoire des Mathématiques et dans le fascicule contenant les discours et travaux de l'assemblée (Coimbra, Imprensa da Universidade, 1922), on trouvera une reproduction de ce discours, où M. Teixeira joint aux vues récemment émises par lui en France, des détails plus complets sur le rôle d'illustres cosmographes ou navigateurs tels que Jacomo de Malhorca, Vasco de Gama, Fernào de Magalhàes (Magellan) et quelques autres qui firent la gloire du Portugal.

Rappelons aussi que c'est en ce Congrès que M. A. Chervin, délégué du gouvernement français, remit à M. Gomes Teixeira une médaille commémorative destinée à la fois à perpétuer le souvenir de la réunion de Porto et à honorer le savant portugais qui la reçût.

* * *

Deux ans après ces faits, nous voici en Espagne, à Salamanque, où il s'agit, à fin juin 1923, du Congrès qui suit naturellement le précédent.

Nous y retrouvons, toujours infatigable, M. Teixeira, qui prononce encore de fort belles paroles. Il compare deux villes fameuses d'Espagne : Compostela, lieu de pélerinage pour les apôtres de la foi religieuse, Salamanca, lieu de pélerinage pour les apôtres de la foi scientifique. Le mysticisme et l'esprit scientifique ont tour à tour visité les auteurs de grandes découvertes et notamment les navigateurs illustres. A Salamanque professa le juif Abrahào Zacuto et le grand Pedro Nunes vînt y chercher des inspirations. Toutes les pierres de la cité semblent parler à l'esprit humain et il n'y a probablement pas d'autre ville espagnole ou l'on pourrait mettre aussi facilement en relief la gloire commune à l'Espagne et au Portugal.

Le discours a soulevé de longues et chaleureuses ovations.

Une nouvelle édition des œuvres de N.-J. Lobatcheffsky.

La première édition des œuvres du génial géomètre russe a été publiée à Kasan dans les années 1883–1886. La célébration solennelle du centenaire de la naissance de Lobatcheffsky, en 1893, l'érection de son monument devant l'Université de Kasan, la fondation des prix internationaux du nom de Lobatcheffsky [1] ont attiré l'attention des mathématiciens de tous les pays sur cette édition et elle a été

[1] Ces prix ont été décernés par la Société physico-mathématique de Kasan, en 1897 à Sophus Lie, en 1900 à Killing, en 1903 à Hilbert. Les rapports écrits à ce sujet par Klein, Engel et Poincaré ont été couronnés par une médaille d'or à l'effigie de Lobatscheffsky.

bientôt épuisée. La Société physico-mathématique de Kasan nourrissait déjà depuis longtemps le projet de publier une édition plus complète. Mais les années révolutionnaires (1905–1917), qui ont abouti à la transformation de la monarchie absolutiste dans la République des Soviets, ont jusqu'ici empêché la réalisation de ce désir des savants russes qui, certes, a été aussi le désir de tous les savants auxquels la mémoire de Lobatcheffsky est chère. Maintenant on peut espérer que ce vœu se réalisera. L'Institut mathématique de Moscou a pris l'initiative et la direction générale de cette édition et le Bureau d'éditions scientifiques de l'Etat russe *(Gosisdat)* a promis de fournir les fonds nécessaires. Pour la direction immédiate, l'Institut de Moscou a nommé une commission spéciale de cinq membres: le professeur D. Egoroff (directeur de l'Institut et président de la commission), les professeurs A. Vassilieff, B. Kagan, A. Kotelnikoff et N. Glagoleff. Cette commission a décidé qu'une œuvre d'une pareille importance au point de vue scientifique ne pourrait être accomplie dignement qu'avec le concours des savants éminents qui ont travaillé dans la direction tracée par Lobatcheffsky et elle a organisé un comité international de patronage.

La commission a reçu déjà un grand nombre d'adhésions. MM. Appell, Hadamard, Painlevé, Klein, Hilbert, Engel, Bianchi, Peano, Ricci, Levi-Civita, Russell, Whitehead, E. H. Moore ont bien voulu faire partie du comité. Le doyen des mathématiciens de l'Europe, l'organisateur de la Bibliothèque internationale de mathématiques, M. Mittag-Leffler, a exprimé, dans une lettre adressée à la commission, l'intérêt chaleureux qu'il porte à cette entreprise. La nouvelle édition sera la première édition *complète* des œuvres de Lobatcheffsky. Elle comprendra non seulement ses œuvres géométriques, comme celles de Kasan, mais aussi tout ce qui a été publié par Lobatcheffsky et les extraits de son *Nachlass*. En effet, l'esprit critique de Lobatcheffsky s'est manifesté non seulement dans la question des principes de la géométrie. J'ai indiqué, déjà en 1893 [1], que c'est Lobatcheffsky, qui le premier a compris l'insuffisance de la démonstration que Ampère a cru avoir trouvé pour l'assertion que toute fonction continue est en même temps différentiable. C'est dans le mémoire de 1834 sur l'évanouissement des séries trigonométriques que Lobatcheffsky a pour la première fois insisté sur la nécessité de distinguer les fonctions continues des fonctions différentiables. De même son Algèbre est très intéressante par la richesse de sa matière et par la rigueur de l'exposition des principes de la science. Ses œuvres posthumes (Nachlass) ne contiennent pas les travaux relatifs à la géométrie, mais il s'y trouve quelques mémoires analytiques qui sont tout à fait dignes de leur auteur.

---

[1] Voir le discours prononcé le 22 octobre 1923 à l'occasion du centenaire de la naissance de Lobatcheffsky. Ce discours a été traduit en français, en allemand (par Engel) et en anglais (par Halsted).

La nouvelle édition sera publiée non seulement en langue russe, mais elle contiendra aussi la traduction, en une des langues plus les répandues, des mémoires de Lobatcheffsky et des articles d'introduction; elle comprendra cinq volumes. Le premier volume contiendra la biographie de Lobatcheffsky, écrite par Vassilieff et des articles concernant la valeur de la géométrie non-euclidienne et son rôle dans la science contemporaine. Nous comptons sur la collaboration de MM. Klein, Hilbert, Einstein, Painlevé, Borel, Appell, Dehn, Engel, Enriques, Levi-Civita, Schur, Liebmann, Weyl, Wellstein, Schouten, Struik. Nous espérons que le premier volume pourra être publié avant le 25 février 1926. L'année 1826 est une année mémorable dans l'histoire de la géométrie non-euclidienne. C'est l'année de la naissance de Riemann; le 12/23 février 1826 Lobatcheffsky a lu à la Faculté physico-mathématique de l'Université de Kasan son « Exposition succincte des principes de la géométrie ». C'est de ce jour-là qu'on peut dater la nouvelle ère que la Géométrie a commencée sous l'impulsion des travaux de Lobatcheffsky.

A. Vassilieff.

Société italienne de Sciences physiques et mathématiques « Mathésis ».

Congrès de Livourne, septembre 1923.

Ce Congrès a eu lieu à Livourne les 25 et 26 septembre 1923. Le principal objet à l'ordre du jour était *l'enseignement des sciences dans les écoles secondaires italiennes*; il y eut en outre plusieurs conférences sur des sujets scientifiques. Les séances furent suivies non seulement par un bon nombre de professeurs de l'enseignement secondaire, mais aussi par MM. les professeurs Bertini, Bianchi, Bortolotti, Enriques, Levi (Beppo), Loria, Peano, Puccianti, Rosati et Vivanti, appartenant à l'enseignement supérieur.

25 *septembre, Séance du matin.* — M. G. Lazzeri, professeur à l'Académie navale de Livourne, en sa qualité de président du Comité d'organisation, souhaite une cordiale bienvenue à ses collègues présents et remercie les autorités qui ont bien voulu donner leur consentement à l'organisation de ce Congrès. Puis il expose brièvement l'histoire de la « Mathésis », dont l'importance est devenue très grande actuellement en Italie.

M. F. Enriques, de l'Université de Rome et président actuel de « Mathésis », prononça ensuite un discours sur *La signification humanistique de la science et sa valeur dans la formation de l'âme nationale.* Cette magnifique conférence devant être publiée intégralement dans le *Periodico di matematiche* (n° de janvier 1924), nous croyons qu'il n'est pas nécessaire d'en donner ici un résumé.

Séance de l'après-midi. — M. E. Persico, docteur en physique et professeur adjoint de l'Université de Rome, parle de *L'Unité cosmique des éléments.* Voici le résumé de son exposé: De tous temps, l'esprit humain s'est occupé d'un problème plein d'attrait, celui d'ordonner dans un tableau simple et organique l'énorme variété de corps que nous offre la nature et qu'elle charrie inlassablement sous nos yeux. Les anciens philosophes, poussés par la tendance si naturelle à l'homme de penser que la nature est gouvernée par des lois simples, interprétèrent la transformation continuelle d'une substance dans une autre, comme si tous les corps n'étaient que des combinaisons d'un nombre limité ou même des transformations d'un seul élément. La conception aristotélique des quatre éléments eut cours jusqu'à Lavoisier; à ce moment il y eut un fécond renouvellement de la science chimique, à la suite duquel on découvrit les 92 éléments actuels qui sont des substances qu'on ne peut pas décomposer par des moyens chimiques et qu'on ne peut pas transformer les uns dans les autres; à ces éléments correspond un même nombre d'atomes différents. Un pas ultérieur vers la simplification fut accompli vers la moitié du siècle dernier quand, entre les différents éléments, on découvrit des analogies qui permirent une classification rationnelle (tableau de Mendeleieff). Tout récemment ces analogies ont été expliquées par des hypothèses très ingénieuses sur la structure des atomes, qui permettent d'interprêter d'une manière merveilleuse un grand nombre de propriétés physiques et chimiques des éléments. D'après ces vues récentes les atomes sont formés par des parties bien plus petites, de deux espèces seulement (électrons et protons), qui se groupant de diverses manières suivant des lois mécaniques qu'on est en train de découvrir et donnant lieu aux différents espèces d'atomes. En conséquence ces derniers quoique chimiquement indécomposables. peuvent se décomposer encore par des procédés physqiues; il en résulte qu'il n'y a que deux substances vraiment simples, l'électricité positive et la négative. Une des conséquences principales de ce fait c'est l'existance des « isotropes »; une autre, la loi suivant laquelle tous les poids atomiques sont des nombres entiers, loi qui, vérifiée par l'expérience d'Aston, constitue une des plus remarquables et des plus élégantes lois naturelles. Pour le physicien moderne la matière cache donc un mécanisme d'apparence compliquée, mais qui est régi par des lois simples. L'unité et l'harmonie cherchées par les anciens ont été désormais découvertes, mais elles étaient ensevelies bien plus profondément qu'ils ne l'auraient sans doute imaginé.

Puis M. Rosati donne lecture du Rapport, qu'il a rédigé, avec la collaboration de M. Cassute, sur l'*enseignement des sciences dans les écoles secondaires.* Dans ce rapport sont exposées les vues générales de la « Mathésis » sur les réformes mises à l'étude par le Ministère de l'instruction publique. On y examine particulièrement la question de la réunion dans une même chaire des mathématiques et de la

physique, ensuite celle des examens. Il s'ensuit une importante discussion qui sera reprise dans une séance ultérieure.

26 *septembre, Séance du matin.* — M. ENRIQUES, président, rappelle, au commencement de la séance, que cette année coïncide avec le premier centenaire de la naissance du grand mathématicien E. BETTI; il ajoute que Pistoja, sa ville natale, se prépare à lui décerner à cette occasion les honneurs dont il est bien digne. La Société « Mathésis » ne manquera pas de s'associer à cette cérémonie.

Ensuite M. G. LORIA, de l'Université de Gênes, président de la Section ligurienne de la « Mathésis », donne une conférence intitulée: *Una massima di Abel.*

L'orateur rappelle avec émotion le souvenir des mathématiciens récemment morts et qui participèrent aux Congrès précédents. Ayant en vue les réformes qui sont en train de se faire dans les écoles secondaires italiennes, il émet le vœu que l'Italie ne perde pas la place éminente qu'elle occupe dans la science. Le but de la conférence est d'illustrer la maxime que le grand mathématicien norvégien exprimait de la manière suivante: « Il faut énoncer un problème de telle sorte qu'il soit toujours possible de le résoudre. » M. Loria rappelle un grand nombre d'exemples offerts par l'histoire des mathématiques pour prouver la justesse de ce principe: le postulat d'Euclide, le problème de la résolubilité des équations algébriques, les problèmes classiques de la géométrie élémentaire (trisection de l'angle, duplication du cube, rectification de la circonférence), le dernier théorème de Fermat. Par rapport à ce dernier l'orateur remarque que l'équation (I) $x^n + y^n = z^n$ est une, mais non la seule généralisation de la célèbre équation de Pythagore. En effet, l'équation $x^3 + y^3 + z^3 = u^3$ et même la plus générale $x_1^n + x_2^n + \dots + x_m^n = x^n$, peuvent bien jouer le même rôle; et si on réussissait à prouver que, lorsque n est plus grand que 2, la même chose arrive par rapport à m, le théorème serait prouvé. Un autre moyen pour énoncer la question soulevée par l'énoncé de Fermat de manière à pouvoir la résoudre serait de déterminer les valeurs entières du nombre μ qui rendent possible la résolution de l'équation $x^n + y^n = \mu z^n$; si parmi ces valeurs on ne trouve pas la valeur 1, le théorème de Fermat sera prouvé. A ce propos, nous croyons bon de rapporter une remarque de M. Loria à laquelle nous donnons notre entière adhésion: le théorème énoncé par Fermat est-il exact ? N'est-il pas possible que dans l'immense milieu arithmétique on ne trouve quatre entiers qui satisfassent à l'équation (I) ?

Après des considérations sur d'autres applications de la maxime d'Abel, l'orateur termine sa conférence en rendant hommage d'une manière élevée à la recherche scientifique.

Enfin, M. SANSONE, de l'Institut technique de Florence, présente un rapport sur la transformation que vont subir les instituts techni-

ques [1] à la suite de la réforme générale des écoles secondaires italiennes.

Séance de l'après-midi. — La discussion concernant les rapports présentés par MM. Rosati, Cassuto et Sansone est reprise; elle se termine par l'adhésion unanime à un ordre du jour (il sera publié intégralement dans le Compte-rendu du Congrès) qui résume lès point de vue de la Société « Mathésis » sur le problème de l'enseignement scientifique dans les écoles secondaires.

Avant sa clôture, le Congrès décide que la « Mathésis » prendrait sous son patronage la rédaction d'une « Enciclopedia delle matematiche elementari » dont le premier volume (arithmétique, algèbre, analyse) est complètement rédigé. Une commission composée de MM. Berzolari, Loria et Vivanti, est chargée de la direction de cette importante publication.

Gênes, Université, octobre 1923.

A. M. Bedarida.

Société suisse des Professeurs de Mathématiques.

Réunion de Berne, 7 *octobre* 1923.

La Société suisse des professeurs de mathématiques a tenu une séance à Berne le 7 octobre 1923, à l'occasion de la réunion annuelle de la Société suisse des professeurs de gymnases. En ouvrant la séance, le président, le Dr H. Schuepp (Zurich), a rappelé la mémoire du regretté professeur Bützberger, puis il donna un aperçu de l'état actuel des pourparlers concernant la réforme de la maturité fédérale. Après la partie administrative, la séance a été consacrée aux conférences de M. Joss, sur les *cadrans solaires*, et de M. F. R. Scherrer, sur la *conservation des angles en projection cylindrique, comme exemple de l'étude d'une intégrale dans l'enseignement moyen.* Cette dernière conférence devant être reproduite dans la *Schweiz. Pädagog. Zeitschrift*, nous pouvons nous borner ici à en mentionner le titre.

Les cadrans solaires. Exemple de géométrie descriptive appliquée, par M. le Dr J. Joss (Berne). — On peut avoir recours aux différentes disciplines de l'enseignement mathématique pour résoudre la question de la construction d'un cadran solaire [2]. Le problème se pose en géo-

[1] En Italie l'Institut technique correspond à la section scientifique de Lycées ou Gymnases (Oberrealschule). — *Réd.*

[2] Consulter, par exemple : G. Bigourdan, *Gnomonique ou Traité théorique et pratique de la construction des cadrans solaires.* Paris, 1922.

On trouvera des indications concernant les constructions dans l'ouvrage de H. Stohler, *Mathematische Geographie und sphärische Trigonometrie*, Bâle. 1916: de Schoy, *Beiträge zur konstruktiven Lösung sphärisch-astronomischer Aufgaben*,

graphie mathématique et les conditions en sont données par les lois naturelles qui régissent le mouvement apparent du soleil dans sa marche diurne et annuelle.

La trigonométrie sphérique permet de résoudre le problème numériquement et les méthodes de la géométrie descriptive par des constructions graphiques. Le problème sera complètement défini lorsque on aura réuni dans une table les données fondamentales qui s'y rapportent.

Il s'agit ordinairement de construire simplement un cadran horizontal ou vertical. Considérons le cas d'un cadran horizontal. Le style sera fixé par son pied dans le plan horizontal et orienté parallèlement à l'axe du monde. Il sera par conséquent situé dans le plan méridien du lieu.

Rabattons sur le plan du cadran, en le faisant tourner autour de sa trace, un plan perpendiculaire au style passant par son extrémité. Ce plan perpendiculaire peut être considéré comme un cadran équatorial dont les lignes horaires sont disposées régulièrement de 15° en 15°. Si l'on joint le pied du style aux intersections des lignes horaires, contenues dans le plan équatorial, avec la trace de ce plan sur le plan horizontal considéré, on obtient les lignes horaires du cadran horizontal. Elles seront numérotées en partant de la ligne Nord-Sud qui est la ligne de midi vrai; le cadran sera ainsi terminé. La construction d'un cadran solaire vertical est tout aussi simple lorsque son plan est orienté exactement de l'Ouest à l'Est. La construction est plus compliquée quand le plan du cadran vertical a une orientation quelconque. On pourrait utiliser un cadran auxiliaire horizontal et l'appuyer contre le mur en l'orientant exactement. Il suffirait alors pour obtenir les lignes horaires du cadran vertical de prolonger les lignes horaires du cadran horizontal et de joindre leur intersection avec le plan du mur au centre du cadran vertical. On peut aussi procéder par rabattement en se servant d'un cadran auxiliaire équatorial.

Une seconde manière d'envisager le problème est de le considérer comme une application de la théorie des sections coniques. Au cours d'une journée un rayon solaire passant par l'extrémité du style décrit une portion de cône; il en résulte que l'ombre décrite par l'extrémité du style au cours de cette journée est une section de ce cône par le plan du cadran, donc une section conique. Au moyen de ces courbes on peut construire tous les points qui se trouvent sur une

---

Teubner, 1910, et de Hans METTLER, *Graphische Berechnungsmethoden im Dienste der Naturwissenschaft und Technik*, Zurich, 1910.

Au point de vue historique l'ouvrage suivant est intéressant : SCHOY, *Die Gnomonik der Araber*, Verein Wissensch. Verleger, Berlin, 1923. Une bibliographie ancienne et très riche est donnée dans l'ouvrage de R. WOLF, *Handbuch der Astronomie*, Bd. I, Art. 195, page 429-433. — *J. J.*

Parmi les ouvrages de Géométrie descriptive qui s'occupent du problème des cadrans solaires, signalons le *Traité de Géométrie descriptive* de J. PILLET, Paris, 1887. — *H. F.*

ligne horaire déterminée, ce qui peut se faire au moyen d'un rabattement. Ces constructions sont simples si l'on fait usage des propriétés de la collinéation. Au moyen d'un cadran où l'on a dessiné le réseau des lignes horaires et des arcs diurnes on peut déterminer par une simple construction, aux différentes époques de l'année, à quelle heure le soleil possède un azimut déterminé et par conséquent commence à éclairer la façade d'une maison orientée suivant cet azimut. On peut trouver aussi à quel moment le soleil a une hauteur déterminée ou bien, pour un moment et une date déterminée, trouver son azimut et sa hauteur. — Enfin on peut encore, au moyen d'un cadran solaire attirer l'attention sur l'écart qui existe entre le temps moyen de l'Europe centrale et le temps local. En construisant la courbe de midi, temps légal, on peut voir chaque jour de combien l'heure indiquée par le cadran solaire retarde ou avance sur le temps moyen de l'Europe centrale.

Cet intéressant exposé a été suivi d'une discussion à laquelle prirent part MM. Teucher (Bienne), Mauderli (Berne) et Grand (Bâle).

Colloque mathématique des Universités de la Suisse romande.

Les mathématiciens romands pour avoir l'occasion d'échanger plus souvent leurs idées et pour se tenir au courant des progrès des mathématiques se réunissent une fois par semestre avec l'un ou l'autre des séminaires ou petit groupe de mathématiciens que compte chacune des villes de Genève, Lausanne, Fribourg, Neuchâtel et Berne. Cette dernière ville compte en effet un grand nombre de Romands et l'activité de ceux-ci n'est pas la moins intense à ces colloques. Trois réunions ont déjà eu lieu.

Le 17 *février* 1923, sous la présidence de M. le Prof. H. Fehr, à *Genève*, M. Gonseth a exposé les applications de quelques transformations géométriques et leurs relations avec la théorie des nombres complexes. M. G. Dumas a traité de l'intégrale indéfinie suivant quelques remarques de M. Lebesgue. M. Chuard a parlé de deux réseaux cubiques particuliers. La conférence principale fut donnée par M. Van der Corput, actuellement professeur à Groningue, sur ce sujet: Méthodes d'approximation pour le calcul du nombre des points à coordonnées entières (*cf.* l'*E. M.*, Tome XXIII, 1er fasc.).

Le 30 *juin* 1923, à *Lausanne*, sous la présidence de M. le Prof. Paschoud, MM. Bays, Mirimanoff et Wavre ont parlé respectivement du problème des triples de Steiner, de la réduction à une forme canonique des fonctions rationnelles entières de plusieurs variables, et de la théorie des suites normales de fonctions analytiques.

La troisième réunion, le 1er *décembre* 1923, eut lieu à *Fribourg*, sous la présidence de M. le Prof. Bays. MM. Marchand, Vaney et Juvet y traitèrent des propriétés métriques du quadrilatère et du quadrangle

complets, de quelques polynomes de la classe de M. Appell, et du déplacement parallèle selon M. Levi-Civita et de ses généralisations.

La réussite de ces colloques prouve qu'ils répondaient à une nécessité: celle de grouper les mathématiciens romands trop peu nombreux dans chaque ville pour y créer une société locale.

G. JUVET (Neuchâtel).

Congrès de Toronto.

Août 1924.

Un *Congrès international de mathématiques* aura lieu à Toronto (Canada), du lundi 11 au samedi 16 août 1924, sous les auspices de l'Université de Toronto et de l'Institut Royal Canadien.

Le Congrès sera organisé conformément aux dispositions prévues par les statuts du Conseil international de recherches.

Le Programme prévoit six sections:

Section I: Algebra, Theory of Numbers, Analysis.
» II: Geometry.
» III: (*a*) Mechanics, Mathematical Physics. — (*b*) Astronomy, Geophysics.
IV: (*a*) Electrical, Mechanical, Civil and Mining Engineering. — (*b*) Aeronautics, Naval Architecture, Ballistics, Radiotelegraphy.
V: Statistics, Actuarial Science, Economics.
VI: History, Philosophy, Didactics.

On constate avec satisfaction qu'une grande place est accordée aux mathématiques appliquées.

Le *Comité d'organisation* est composé comme suit:

Président: M. le Prof. J.C. FIELDS, F.R.S., Président de l'Institut Royal Canadien; Sir Robert FALCONER, K.C.M.G., Président de l'Université de Toronto; Professor A. T. DE LURY, M.A.; Professor J.C. MC LENNAN, F.R.S.; Professor, C.A. CHANT, Ph. D., Mr. T.H. HOGG, C.E.; Secrétaire: Professor J.L. SYNGE, M.A.

Il sera secondé dans ses travaux par une série de Commissions présidées par Sir Robert FALCONER, K.C.M.G. (Hospitality); Mr. W.G. MILLER, L.L.D. (Excursions); Mr. R. J. HAMILTON, B.A. (Printing); Professor H. WASTENEYS, Ph. D. (Publicity); Professor J. R. COCKBURN (Meeting Rooms); Professor E. A. ALLCUT, M. Sc. (Signs and Messengers); Mr. D. B. HANNA (Finance and Transportation).

Le siège du Congrès est à l'Institut Royal Canadien, 198 College Street, Toronto, Canada. — Cable Address: Conmat, Toronto.

L'Association britannique pour l'avancement des Sciences tiendra son Congrès annuel à *Toronto* (Canada), du 6 au 13 août 1924, sous la

présidence du major-général Sir David Bruce. La section des sciences mathématiques et physiques sera présidée par Sir William Bragg.

Le Congrès sera suivi d'une série d'excursions scientifiques, notamment d'un voyage à Vancouver.

Nouvelles diverses. — Nominations et distinctions.

Autriche. — *Académie des Sciences.* — Sur l'initiative de la Société des Amis de la philosophie, de Halle, la classe des Sciences mathématiques et naturelles décernera un prix au meilleur travail traitant des *fictions en mathématiques.* Les mémoires doivent être déposés à l'Académie avant le 31 décembre 1925. Les conditions du concours peuvent être obtenues à la Chancellerie de l'Académie des Sciences, 2, place de l'Université, Vienne I.

Belgique. — *Académie royale, Classe des Sciences.* — Le programme du *concours annuel pour* 1925 comprend les questions suivantes pour les sciences mathématiques:

I. On demande une contribution importante à la géométrie infinitésimale.

II. On demande une contribution au problème des *n* corps, dans la théorie d'Einstein.

Pour chacune de ces questions, le prix peut être de 1500 fr.; délai 1er août 1925.

Université de Gand. — MM. C. de Jans et A. Lembrechts ont été chargés de faire des cours de mathématiques.

France. — *Académie des sciences de Paris;* prix décernés. — *Prix Poncelet* (2000 fr.): Auguste Boulanger, professeur au Conservatoire national des arts et métiers. — *Prix Lalande* (540 fr.): M. Galissot, aide-astronome à l'Observatoire de Lyon. — *Prix Benjamin-Valz* (460 fr.): M. W. S. Adams, directeur adjoint de l'Observatoire du Mont Wilson Pasadena (Californie). — *Prix Bordin* (3000 fr.-: M. Emile Gau, doyen de la Faculté des sciences de Grenoble. — *Prix Francœur* (1000 fr.): L'abbé Gaston Bertrand, docteur ès sciences. — *Prix Petit-D'Ormoy* (10.000 fr.): M. Elie Cartan, professeur à la Faculté des sciences de Paris. — *Prix Estrade-Delcros* (8000 fr.): M. René Baire, professeur à la Faculté des sciences de Dijon, correspondant de l'Institut. — *Prix Gustave-Roux* (1000 fr.) : M. Georges Giraud, professeur à la Faculté des sciences de Clermont-Ferrand. — *Prix Binoux* (2000 fr.) : M. Robert Bouvier, docteur en philosophie, pour son ouvrage « La pensée d'Ernst Mach, essai de biographie intellectuelle et de critique. »

Collège de France. — Un cours annexe de mathématiques portant sur les principes fondamentaux de l'analyse en vue des applications à la théorie de la connaissance a été ouvert le 24 novembre 1923 par M. Edouard Le Roy, membre de l'Institut.

Italie. — M. M. Picone, de l'Université de Catane, a été appelé à la chaire d'analyse supérieure à l'Université de Pise.

M. E. Bompiani, de l'Institut technique supérieur de Milan, a été appelé à l'Université de Bologne pour la géométrie projective et descriptive.

M. O. Chisini a été nommé professeur de géométrie projective et descriptive à l'Université de Cagliari.

M. N. Spampinato a été admis à l'Université de Catane en qualité de privat-docent pour la géométrie analytique.

Nécrologie.

A. Boulanger (1866–1923). — Nous apprenons avec regret la mort de M. Auguste Boulanger, professeur de mécanique au Conservatoire des arts et métiers, et directeur des études à l'Ecole polytechnique de Paris depuis 1921. Ancien élève de l'Ecole polytechnique, agrégé et docteur ès sciences mathématiques, Boulanger a fait toute sa carrière dans l'enseignement. Il laisse de nombreux ouvrages et mémoires dans le domaine de l'Analyse et de la Mécanique. Collaborateur à l'*Intermédiaire des mathématiciens*, il fut directeur depuis 1911. Il présida la Société mathématique de France pendant l'année 1921.

Martin Disteli (1860–1923). — Les mathématiciens suisses viennent de perdre l'un de leurs plus distingués représentants, M. Martin Disteli, professeur de mathématiques appliquées à l'Université de Zurich. Après avoir suivi la section normale de l'Ecole polytechnique fédérale, Disteli complèta ses études aux universités de Zurich et de Genève. Elève, puis assistant de W. Fiedler, il se sentit tout particulièrement attiré vers la géométrie. On lui doit dans ce domaine des mémoires fort remarquables dont quelques-uns se rattachent aux travaux de Steiner et à la théorie des courbes et des surfaces roulantes.

Très apprécié comme professeur, Disteli enseigna la géométrie descriptive successivement à l'Université de Strasbourg, aux Ecoles techniques supérieures de Dresde et de Carlsruhe. Les privations qu'il eut à subir pendant la guerre l'éprouvèrent beaucoup: il revint en Suisse en 1917 pour rétablir sa santé. A la fin de l'année 1920, il accepta un appel à l'Université de Zurich. Une mort prématurée l'enleva à l'affection de sa famille, de ses amis et de ses élèves dans la nuit du 25 au 26 octobre 1923. H. F.

G. Eneström. — On annonce la mort du savant suédois, M. Gustave Eneström, bien connu pour ses travaux de critique historique et de bibliographie dans le domaines des sciences mathématiques. Il fonda, en 1884, et dirigea la revue *Bibliotheca Mathematica*, dont la troisième série parut chez Teubner (14 volumes, de 1900 à 1915).

MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

Sommes de deux carrés égales à un carré.

A propos d'une Note de M. E. Barbette (Liége).

La formule donnée par M. Barbette dans le T. XXI de l'*Enseignement mathématique* (p. 58) n'est pas nouvelle. Elle coïncide avec la solution classique donnée par Euclide. En effet, il suffit de poser

$$\lambda = A \ , \qquad \mu = A + 2B \ ,$$

pour avoir

$$a = k\lambda\mu \ , \qquad b = \frac{k}{2}(\mu^2 - \lambda^2) \ , \qquad a + q = \frac{k}{2}(\mu^2 + \lambda^2)$$

(formule d'Euclide).

28 janvier 1924.

Gr. C. Young (Lausanne).

BIBLIOGRAPHIE

Max von Arx. (Dr méd.). — **Körperbau und Menschwerdung.** Konstruktionspläne nach der Ballontheorie und dem Prinzip der statischen Gleichgewichtslage, enthüllt durch eine Kausalanalyse der menschlichen Beckenform. — Mit 110 Lehr- und Beweissätzen, 130 Abbildungen im Text und 21 farbigen Tafeln. — Verlag Ernst Bircher, Bern.

Le manque d'instruction mathématique à l'Ecole de médecine est la cause non seulement de l'inexactitude et de la longueur des explications données aux étudiants, mais aussi de l'état embryonnaire de certaines théories. C'est en particulier le cas de l'anatomie. L'auteur du présent volume aborde une branche particulière, mais très importante, de ce domaine en partant d'une solide base mathématique. Le livre, dont les résultats de longue portée indiqués dans le titre ne peuvent être discutés en quelques lignes, présente, même au premier coup d'œil, certains caractères qui permettent de le signaler aux professeurs de mathématiques.

L'introduction dans l'enseignement de plusieurs des idées de l'auteur rendrait les leçons plus intéressantes et, pour ceux qui veulent entrer dans la carrière médicale, servirait de base à cette propédeutique mathématique si ardemment désirée. Grace Chisholm Young (Lausanne).

Emile Borel. — **Eléments de la Théorie des probabilités** (Cours de la Faculté des Sciences), 3° édition revue et augmentée. — 1 vol. grand in-8° de VI-246 p. ; 18 fr.; Librairie scientifique J. Hermann, Paris.

La *Théorie des Probabilités* est utilisée de plus en plus dans de nombreuses questions de physique, de biologie, de sciences économiques. Ceux qui s'intéressent à ces applications n'ont pas toujours le loisir d'étudier à fond les théories mathématiques qui se rattachent aux probabilités. Ce qui leur importe c'est, avec la connaissance des résultats essentiels, celle des méthodes par lesquelles ces résultats sont obtenus.

C'est à ce point de vue qu'ont été écrit ces *Eléments* ; on n'a pas craint d'insister sur les problèmes simples, dans lesquels le mécanisme du calcul ne dissimule pas la méthode suivie. Les développements mathématiques occupent peu de place et ne sont jamais indispensables ; celui-ci peut être lu d'un bout à l'autre par un lecteur connaissant simplement la définition de l'intégrale définie. Il a été ainsi possible d'exposer les principes essentiels de la théorie dans un ouvrage peu étendu.

Le Livre I est consacré aux *probabilités discontinues* et à la loi *des grands nombres*. Le Livre II *aux probabilités continues* auxquelles se rattachent les plus importantes théorie de la physique moderne, en particulier la *théorie cinétique des gaz*, et le *principe d'irréversibilité* de la thermodynamique. Enfin, le Livre III traite de la *probabilité des causes*, à propos de laquelle on donne quelques indications sur la *théorie des erreurs d'observation*, la théorie des *probabilités statistiques*, les études *biométriques*.

La troisième édition a été complétée par quatre notes qui concernent respectivement des applications de la théorie des probabilités à la physique (radioactivité), à la statistique, et aux jeux où le hasard se combine avec l'habileté des joueurs.

Cet ouvrage n'est pas un livre de vulgarisation, mais un traité scientifique où l'on a été aussi complet qu'il *était possible* en restant élémentaire. C'est une introduction nécessaire à toute étude approfondie des probabilités et c'est en même temps un ouvrage suffisant pour la plupart de ceux qui ont surtout en vue les applications.

A. Fraenkel. — **Einleitung in die Mengenlehre,** eine elementare Einführung in das Reich des Unendlichgrossen. Zweite erweiterte Auflage. — 1 vol. in-8° de 25 pages et 18 figures; dollar 2,60; Julius Springer, Berlin.

La première édition de cette Introduction à la théorie des ensembles (voir l'*Ens. math.*, tome XXI, p. 352) a été rapidement épuisée; en voici la seconde, quatre ans après. Le livre, augmenté de la moitié, n'a pas sensiblement changé dans les matières qui intéressent le débutant, mais pour celui qui a déjà des connaissances dans la théorie des ensembles, l'apport nouveau rendra la lecture beaucoup plus attrayante. Pour celui-là l'ouvrage fournit une vulgarisation très lisible de la théorie de l'infini

absolu et des nombres transfinis; pour celui-ci, il offre une analyse intelligente de récents travaux écrits en allemand par divers écrivains, pour la plupart compatriotes de l'auteur.

G. Chisholm Young (Lausanne).

J. Haag. — **Cours complet de mathématiques spéciales.** — Tome IV. *Géométrie descriptive et trigonométrie.* — 1 vol. in-8° de 152 p. avec 62 fig.; Fr. 13.—; **Exercices du cours de mathématiques spéciales.** — Tome IV. *Géométrie et Trigonométrie.* — 1 vol. in-8° de 151 p. avec 27 fig. Fr. 15.; Gauthier-Villars & Cie, Paris.

C'est par ces deux volumes consacrés à la Géométrie descriptive et à la Trigonométrie, que se terminent le Cours et les Exercices de mathématiques spéciales de M. Haag, professeur à la Faculté des Sciences de Clermont-Ferrand.

Pour la Géométrie descriptive, l'auteur a suivi sensiblement le programme de l'Ecole polytechnique ; en outre il a complété, dans le chapitre de la perspective, les notions théoriques du programme par quelques notions pratiques sur la mise en perspective d'une figure quelconque de l'espace.

Tous les principes généraux concernant la représentation des lignes et des surfaces et la recherche de leur intersection, ont été rassemblés dans un premier chapitre.

Dans tout le cours de l'Ouvrage, l'auteur a fait un fréquent usage des résultats obtenus dans le Tome II (géométrie) en faisant largement appel aux notions si fécondes des points à l'infini ou d'éléments imaginaires.

Les exercices comportent surtout des épures complètes analogues à celles des concours d'admission aux grandes écoles. A ces épures, l'auteur a ajouté quelques questions du genre de celles que l'on pose aux examens oraux mais en les réservant presque toujours aux exercices proposés.

Dans le chapitre des surfaces topographiques, l'auteur a surtout envisagé des exercices d'un caractère pratique exécutés sur le plan directeur du front de Champagne en 1917.

La Trigonométrie ne comprend que deux chapitres, l'un relatif aux propriétés générales des lignes trigonométriques, l'autre relatif à la résolution des triangles.

Comme dans les précédents volumes, le Tome IV du « Cours de Mathématiques spéciales » est remarquable par la clarté de son exposé bien que la rédaction de cet ouvrage ait été condensée au maximum.

H.W. E. Jung. — **Einführung in die Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen.** — 1 vol. in-8°, vi-246 pages, 35 figures. W. de Gruyter, Berlin et Leipzig, 1923.

La théorie des fonctions algébriques est une des parties de la théorie générale des fonctions analytiques les plus attrayantes parce qu'elle utilise une foule de notions empruntées à un grand nombre de disciplines de la mathématique: analysis situs et géométrie algébrique, arithmétique, analyse classique, théorie des corps algébriques, etc., et qu'elle rend ensuite à ces disciplines sous forme de théorèmes variés, plus qu'elle ne leur a pris.

Malgré cet attrait, le débutant a souvent quelques difficultés à s'initier rapidement à cette théorie. Il faut remercier M. Jung, professeur à Halle-Wittemberg, d'avoir écrit cette introduction très claire, dont le principal mérite provient certainement du grand nombre d'exemples simples qui illustrent chaque paragraphe.

Ce livre compte 13 chapitres qui embrassent les résultats essentiels relatifs aux fonctions algébriques et à leurs intégrales. Un tel ouvrage ne saurait faire double emploi avec le livre classique de MM. Appell et Goursat qui reste toujours l'ouvrage fondamental sur la théorie des fonctions algébriques. Le livre de M. Jung réalise bien son but qui est d'être une introduction à cette branche des mathématiques.

G. Juvet (Neuchâtel).

T. Lemoyne. — **Les lieux géométriques en mathématiques spéciales,** avec application du principe de correspondance et de la théorie des caractéristiques à 1.400 problèmes de lieux et d'enveloppes. — Un vol. in-8° de 150 pages et une planche de figures. Prix: 10 francs. Vuibert, Paris, et chez M. A. Gérardin, 32, quai Claude-le-Lorrain, Nancy. 1923.

M. Lemoyne, collaborant avec le regretté H. Brocard, nous avait déjà donné un premier volume de « Courbes géométriques » (*voir Ens. math.*, t. XXI, 1920, p. 64), en lequel la notion de caractéristique, illustrée par Chasles et Halphen, jouait un fort beau rôle. Voici maintenant un ouvrage, d'un caractère plus systématique, où la même notion descend avec une facilité des plus remarquables jusqu'aux problèmes des classes de mathématiques spéciales, remonte ensuite à d'autres plus élevés, mais en donnant toujours l'impression d'aboutir, sans calculs, à des conclusions que la méthode analytique ne dégagerait jamais du fatras des éliminations. C'est d'ailleurs ce que disait Chasles, mais M. Lemoyne a dû modifier bien des aperçus de Chasles pour traiter nombres de cas que celui-ci n'avait pas eu en vue. Il détermine les caractéristiques de beaucoup de systèmes de coniques et constate que, si l'une d'elles est égale à l'unité, on revient aux principales propriétés descriptives de ces courbes. Il donne 1400 applications mais, en appliquant 80 théorèmes généraux à 170 systèmes, aux systèmes de paraboles qu'on peut en déduire ainsi qu'à 40 systèmes de cercles étudiés préliminairement, on obtiendrait encore d'innombrables applications supplémentaires dont il laisse l'étude à la sagacité du lecteur.

De plus, Chasles avait surtout en vue l'ordre des lieux et la classe des enveloppes. Ici l'auteur étudie nombre de points et de tangentes et en conclut de ces fameux cas d'exception dont l'étude porta si haut le mérite d'Halphen, mais non sans faire tort à la théorie des caractéristiques pour nombre d'esprits qui en vinrent à penser surtout à l'exceptionnel.

Bien des problèmes traités par M. Lemoyne semblent ne l'avoir jamais été; tels sont les lieux relatifs aux systèmes de coniques normales à deux droites ou tangentes à deux coniques données. Chasles n'a pas non plus traité le cas de paraboles assujetties à trois conditions, sauf peut-être, en ce qui concerne les lieux focaux; ici ces paraboles sont reprises de manière absolument générale.

M. Lemoyne nous donne aussi un théorème fondamental dont on peut partir pour établir les caractéristiques des systèmes de coniques tangentes à une courbe algébrique quelconque.

L'ouvrage commence par un rappel de notions élémentaires; il contient une foule de références bibliographiques concernant Salmon et les meilleurs ouvrages ou recueils de problèmes de géométrie analytique. Que de fois l'on est surpris de voir qu'un résultat, énoncé en deux lignes et faisant d'ailleurs partie d'un long ensemble de résultats analogues, corresponde à un problème laborieusement développé en quelque livre cependant excellent. J'imagine que les candidats à l'Agrégation pourraient apprendre ici l'art d'apercevoir, tout d'abord, la solution du problème de géométrie analytique à eux proposé, en n'en développant l'analyse qu'après coup. Mais, au-delà de cette préoccupation pédagogique, il y aurait encore toute une belle science: celle de Chasles, d'Halphen, laquelle présentement ne semble disputée par personne à M. Lemoyne.

A. Buhl (Toulouse).

P. Painleve, E. Borel et Ch. Maurain. — **L'Aviation.** Nouvelle édition revue et augmentée (Nouvelle Collection Scientifique, dirigée par E. Borel) — 1 vol. in-16 de 304 p. avec 48 fig. dans le texte ; Fr. 10.— ; Librairie Félix Alcan, Paris.

Nous avons rendu compte de la 6me édition de cet ouvrage en 1913 (*Ens. math.*, XVe année, p. 444). Un long intervalle de temps s'est écoulé depuis l'épuisement de l'édition précédente de l'*Aviation*, jusqu'à l'apparition de celle-ci. L'évolution prodigieusement rapide de la locomotion aérienne rendait impossible une réimpression pure et simple ; des remaniements importants font de cette nouvelle édition un ouvrage en grande partie nouveau.

Les auteurs cependant ont tenu à conserver un certain nombre de pages sur les débuts de l'aviation et aussi sur les idées théoriques qui ont guidé ces débuts. Ces pages n'ont pas seulement un intérêt historique ; en permettant au lecteur d'envisager d'un coup d'œil la marche si rapide de l'industrie nouvelle, elles lui permettent, en même temps, de se rendre compte du fait que cette rapidité est due en grande partie, en même temps qu'à l'activité des praticiens, à celle des théoriciens et des expérimentateurs ; c'est là un très bel exemple des relations entre ce que l'on appelle souvent la science appliquée, et que l'on devrait appeler, suivant la suggestion heureuse de Pasteur: la science et les applications de la science.

G. Peano. — **Giochi di aritmetica e problemi interessanti.** — (Biblioteca di scienze fisiche matematiche e naturali). — 1 vol. p. in-8° de 63 p. ; L. 3.75 ; G. B. Paravia & Co., Turin.

« Attachez-vous à intéresser, à amuser l'enfant, ne lui faites rien apprendre par cœur », écrit C. A. Laisant, dans son *Initiation mathématique*. M. Peano tient à rappeler ce passage aux maîtres de l'enseignement élémentaire. Son volume leur fournit de nombreux problèmes et d'intéressantes remarques qui sont de nature à captiver l'attention des élèves dans le domaine de l'arithmétique. Ils y trouveront notamment des récréations arithmétiques fort bien choisies, des problèmes à la fois curieux et instructifs se rattachant aux opérations élémentaires et des questions d'une résolution facile empruntées au calendrier.

H. F.

E. Peet. — **The Rhind Mathematical Papyrus,** British Museum 10057 and 10058. Introduction, Transcription, Translation and Commentary. — 1 vol. gr. in-folio de 136 pages avec 24 planches, Livres 3/3/0; University Press of Liverpool, Messrs. Hodder & Stoughton, Ltd., Warwick Square, London, E.C.

L'un des plus anciens ouvrages mathématiques que l'on possède se trouve à Londres, au British Museum, sous la forme d'un papyrus égyptien que l'on attribue à Ahmes, mais que l'on désigne généralement sous le nom de Papyrus Rhind, du nom du célèbre égyptologue anglais Rhind. Ce n'est pas un traité, au sens moderne, mais un guide pratique concernant le calcul numérique, les opérations sur les fractions, la résolution arithmétique d'équations du premier degré, la mesure des aires et des volumes, des exemples de progressions, et de nombreux problèmes d'arithmétique.

Rapporté d'Egypte vers le milieu du XIXe siècle, le papyrus a été traduit et commenté par Eisenhohr, dans un ouvrage qui parut en 1877 (2me édition, Leipzig, 1891). Depuis cette époque de nouveaux documents ont été trouvés, mais, en outre, l'étude des papyrus a fait des progrès tels que la traduction d'Eisenhohr devait être entièrement revue et modifiée sur de nombreux points. C'est ce que vient de faire M. F. Eric Peet, professeur d'égyptologie à l'Université de Liverpool. Son remarquable exposé offre un intérêt considérable pour tous ceux qui s'occupent de l'Histoire des mathématiques dans l'antiquité; il sera aussi très précieux pour les maîtres qui désirent montrer à leurs élèves quelles étaient les connaissances mathématiques des Egyptiens d'il y a près de 3500 ans. H. F.

D.-E. Smith. — **History of Mathematics.** Vol. I: General Survey of the History of elementary Mathematics. — 1 vol. in-8° de 596 p.; $ 4.00, Ginn & Co., Boston.

L'auteur s'est proposé de caractériser les grandes étapes de l'Histoire des mathématiques en passant en revue les principaux pays. Dans ce premier volume il donne un aperçu d'ensemble de l'Histoire des mathématiques élémentaires depuis l'antiquité jusqu'au milieu du dix-neuvième siècle. Pour chacune des périodes il signale à grands traits les mathématiciens les plus éminents et leurs principales contributions.

Grâce à ses belles collections d'instruments et de livres anciens, de portraits et de manuscrits, qui constituent un véritable musée historique des sciences mathématiques, M. D.-E. Smith a pu illustrer son livre d'une foule de documents du plus grand intérêt.

Cet ouvrage est appelé à rendre de grands services aux professeurs de l'enseignement moyen et aux étudiants en mathématiques. H. F.

A. Speiser. — **Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung.** (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Band V). — 1 vol. in-8° de 194 p., Fr. 8.—; Julius Springer, Berlin.

En demandant à différents mathématiciens s'occupant de la même théorie quelles en sont les « parties essentielles », on recevra probablement des réponses différentes et peut-être la plupart pourront être résumées ainsi: « l'essentiel est ce dont je m'occupe ». Il est moins arbitraire de dire que

les parties essentielles sont d'abord celles qui servent de fondement aux autres et puis celles qui établissent un lien avec d'autres branches des mathématiques. Le livre de M. Speiser semble embrasser d'une manière très complète les parties essentielles de la théorie des groupes finis, dans le sens le moins arbitraire du mot. L'étude des opérations génératrices est presque la seule qui soit mise un peu de côté, mais toutes les propriétés des groupes finis qui sont essentielles pour les applications y sont traitées d'une manière approfondie.

Outre les applications classiques à l'algèbre et celles un peu moins connues à la théorie des nombres, il y a l'étude de la symétrie cristalline où certains groupes finis interviennent. Ceux-ci sont considérés à plusieurs reprises par M. Speiser et son livre est le premier sur la théorie des groupes où ces questions intéressantes sont introduites — innovation très heureuse à notre avis.

On peut diviser le livre en trois parties. La première (chapitres 1-6 et 8) s'occupe de la théorie générale : les définitions fondamentales, les théorèmes de Jordan et de Hölder sur les sous-groupes invariants, ceux de Sylow et de Frobenius sur l'existence des sous-groupes et des opérations d'ordre donné, la base d'un groupe abélien, les automorphismes et la décomposition des groupes en facteurs, voilà les matières les plus importantes. Deux chapitres (le 7me et le 9me) sur la représentation des groupes par des permutations et des subdivisions monomiales servent de préparation à la partie seconde et principale du livre. Celle-ci s'occupe de la théorie de la représentation des groupes finis par des substitutions linéaires. Cette théorie aussi profonde que précise, une des plus belles des mathématiques, est due à Frobenius; elles est exposée dans les chapitres 10 et 11, ses applications et ses compléments arithmétiques dans les chapitres 12 et 13. Le chapitre 14 s'occupe des groupes représentables par des substitutions opérant sur un nombre donné des variables. Le dernier chapitre, le 15me, contient les applications. La théorie de la résolution des équations d'après Lagrange et Galois, le « Formenproblem » de Klein y sont exposés, très brièvement cependant. On regrette de n'y trouver que des allusions au sujet des applications à la théorie des nombres. Dans les deux dernières pages l'auteur esquisse la perspective d'une théorie des groupes se fondant dans une arithmétique générale qu'il prévoit.

Tous ces sujets difficiles et variés sont condensés en moins de 200 pages. Certes ce n'est pas un livre pour des commençants : il avance à grands pas et présuppose ça et là quelques matières simples qui ne sont exposées que dans les chapitres suivants. C'est un livre pour des initiés. Le style en est sobre, un peu sec, il convient très bien au sujet.

G. Polya (Zurich).

M. Stuyvaert. — **Introduction à la Méthodologie mathématique.** — 1 vol. in-8° de 257 p. avec 24 fig.; Fr. 20.— ; Van Rysselberghe & Rombaut, Gand.

Dans cette introduction à la Méthodologie mathématique, l'auteur expose un certain nombre de théories dont la connaissance est indispensable aux candidats à l'enseignement secondaire, mais qui, faute de temps, ne sont pas développés dans les cours généraux. Sur certains points ces chapitres forment un prolongement de questions traitées dans l'enseignement secon-

daire ou dans les cours des Facultés, sur d'autres ils forment une initiation ou apportent des aperçus d'ensemble, l'étude plus approfondie pouvant être abordée dans des conférences ou par la lecture d'ouvrages spéciaux.

C'est en se plaçant à ce point de vue que l'auteur examine successivement les objets suivants:

Principes de l'arithmétique. Congruences. Fractions ordinaires. Nombres irrationnels. Nombres négatifs. Corps et domaines. Nombres imaginaires. Les exposants algébriques. Les problèmes antiques. Principes de la géométrie. Géométrie générale projective.

H. Tripier. — **Les fonctions circulaires et les fonctions hyperboliques** étudiées parallèlement en partant de la définition géométrique. — 1 vol. in-8° de 56 p. avec 25 fig. ; Librairie Vuibert, Paris

Beaucoup d'auteurs évitent l'emploi des fonctions hyperboliques en ayant recours à des combinaisons équivalentes de la fonction exponentielle ou de la fonction logarithmique, combinaisons qui ne sont guère moins simples d'expression et d'emploi que les fonctions évitées. L'étude des fonctions hyperboliques est pourtant aussi aisée que celle des fonctions circulaires. L'auteur montre qu'elle peut se faire très facilement en partant de la représentation géométrique. Les fonctions hyperboliques sont données par la considération du point courant d'une hyperbole équitalère, comme les fonctions circulaires sont données par la considération des coordonnées du point courant d'un cercle.

Cet exposé, tout à fait élémentaire, ne suppose connu que les premières notions sur les dérivées, sur les séries, et le développement en série de Mac-Laurin.

Vladimir Varicak. — **Darstellung der Relativitätstheorie im dreidimensionalen Lobatschefskijschen Räume.** — 1 vol. gr. in-8° de XII-104 pages et 45 figures. Zaklada Tiskare Narodnih Novina, Zagreb, 1924.

Cet ouvrage, écrit avec soin et édité avec luxe, comme l'indique son titre, tire tout le parti possible de la géométrie de Lobatchefskij pour présenter les résultats relativistes sous des formes aussi peu différentes que possible des conceptions optiques classiques. Ici se dessine immédiatement une sorte d'opposition apparente. D'après les travaux de bien des auteurs, parmi lesquels il faut donner fort bonne place à M. Varicak lui-même, la transformation de Lorentz, l'addition des vitesses d'Einstein et autres algorithmes du même genre, s'interprétaient naturellement dans la géométrie de Lobatchefskij, mais d'autres résultats tenant plus particulièrement à la gravitation conduisaient à faire appel à la courbure riemannienne et par suite à considérer l'Univers comme riemannien. Y a-t-il là une contradiction ? Non ! répond M. Varicak, si je comprends bien la pensée de l'éminent professeur. Nous sommes justement dans des théories *relativistes*; elles ne peuvent pas plus donner un absolu riemannien qu'un absolu lobatchefskijen; il faut savoir changer d'espace comme de coordonnées; un être de lumière qui n'étudierait que des phénomènes optiques aurait le plus grand avantage à être lobatchefskijen même s'il devait ensuite devenir riemannien en prenant corps et en étudiant des phénomènes massiques.

On peut alors maintenant situer le sens général de l'ouvrage: c'est sur-

tout l'étude lobatchefskijenne du champ électromagnétique pur et plus particulièrement du champ lumineux. Cette étude est faite avec une grande élégance. L'addition et la composition einsteiniennes des vitesses s'accomodent très simplement des fonctions hyperboliques; la transformation de Lorentz est vue autrement qu'à travers la rotation imaginaire de Minkowski. Nous pouvons partout écrire des formules réelles, même à la place de la formule mystique, due encore à Minkowski,

$$3.\ 10^5 \text{ km} = i \text{ sec.}$$

Et c'est dans ce style que l'auteur traite l'effet Döppler, l'aberration, la réflexion sur un miroir mobile, etc.

Avec l'impulsion nous apercevons tout de même les idées de Planck sur la masse, notion fugitive variable géométriquement, cinématiquement et dont d'ailleurs diverses définitions sont loin de concorder. Les transformations du champ électromagnétique sont élégamment maniées à l'aide de déterminants. Et, même quand la masse est introduite, l'ouvrage nous montre encore l'avantage de certaines conceptions lobatchefskijennes, ne serait-ce qu'avec un modèle non-euclidien du Soleil.

L'exposé, on le voit, est d'idée audacieuse; mais il est toujours si clair et d'une si grande élégance analytique qu'il donne sans doute bien des aperçus méritant d'être conservés.

A. Buhl (Toulouse).

G. Verriest. — **Cours de Mathématiques générales.** à l'usage des étudiants en sciences naturelles. — Première partie ; Calcul différentiel, Géométrie analytique à deux dimensions. — 1 vol. in-8° (25-16) de 337 p. avec 113 fig. ; Fr. 38.— ; Gauthier-Villars & C°, Paris.

Nous signalons aux étudiants en sciences naturelles le « Cours de Mathématiques générales » écrit à leur intention par le professeur G. Verriest de l'Université de Louvain et dont la première partie ; Calcul différentiel et Géométrie analytique à deux dimensions, vient de paraître chez Gauthier-Villars et Cie.

Bien que cet ouvrage soit plus particulièrement destiné à ceux qui préparent le doctorat spécial en sciences chimiques pures et appliquées (créé récemment par l'Université de Louvain), ce livre s'adresse à un public beaucoup plus étendu, car il intéresse également les étudiants en sciences naturelles, en médecine, en philosophie qui viennent chaque année plus nombreux s'initier aux méthodes de l'analyse mathématique. Cet ouvrage sera de plus très utile aux lecteurs de culture scientifique qui, empêchés de suivre des cours oraux, désirent cependant acquérir des notions de mathématiques supérieures.

C'est dire les services que rendra ce livre à ceux qui se destinent aux carrières scientifiques, à la médecine ou à l'industrie.

R. Weitzenböck. — **Invariantentheorie.** — 1 vol. in-8° de 407 p., 5 fl.; P. Noordhoff, Groningue.

On sait le rôle fondamental que jouent les notions d'invariants et de covariants dans les branches les plus diverses des mathématiques. Rappe-

lons, par exemple, leur importance dans la théorie des groupes de transformation et dans le calcul différentiel absolu. Le tenseur correspond en réalité à l'idée de « forme ». Le calcul tensoriel n'est qu'un chapitre de la théorie moderne des invariants. C'est ce que l'auteur montre clairement dans ce traité dans lequel il expose, dans leur état actuel, les principaux domaines de la théorie des invariants: formes binaires, ternaires et quaternaires, complexes, transformations affines, invariants orthogonaux, algèbre vectorielle et tensorielle, invariants de formes différentielles, invariants intégraux.

M. Weitzenböck, qui a lui-même fourni d'importantes contributions dans ce domaine, était tout particulièrement qualifié pour écrire un ouvrage sur la théorie des invariants et ses développements modernes. Son livre mérite d'être signalé à tous ceux qui s'intéressent à cette théorie ou qui en ont besoin en vue des applications au calcul tensoriel. H. F.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

1. Livres nouveaux :

Tous les ouvrages adressés à la Rédaction sont signalés ici avec une brève indication de leur contenu, sans préjudice de l'analyse dont ils peuvent être ultérieurement l'objet sous la rubrique « Bibliographie ».

L. Bachmann. — **Das Schachspiel und seine historische Entwicklung,** dargestellt an der Spielführung der hervorragendsten Schachmeister, insbesondere der Weltschachmeister. — 1 vol. cart. in-8° de 178 p.; Fr. 8.75; B. G. Teubner, Leipzig.

Les amateurs du jeu d'échec — ils sont nombreux parmi les mathématiciens — liront avec intérêt ce bel ouvrage consacré au jeu d'échec, envisagé dans son développement historique, et aux joueurs les plus célèbres. Ils y trouveront 81 parties engagées, jouées par d'illustres représentants et 20 problèmes. Le volume est orné des portraits de Philidor, De Labourdonnais, Staunton, Anderssen, Morphy, Steinitz, Lasker et Capablanca.

P. Bachmann. — **Zahlentheorie.** Vierter Teil. *Die Arithmetik der quadratischen Formen.* Zweite Abteilung, herausgegeben von R. Haussner in Jena. — 1 vol. in-8° de 537 p. et 20 fig.; Fr. 25.—; B. G. Teubner, Leipzig.

C'est par ce volume que se termine le beau traité sur la théorie des nombres de P. Bachmann, publié par les soins du professeur Haussner. Il est entièrement consacré à la théorie arithmétique de formes quadratiques, telle qu'elle résulte principalement des travaux de Hermite et de Minkowski.

E. Bortolotti. — **Lezioni di Geometria Analitica,** II. — 1 vol. in-8° de 229 p. avec de nombreuses figures; 32 lires; Nicola Zanichelli, Bologne.

Nous avons déjà eu l'occasion de signaler ce nouveau traité qui correspond au cours de géométrie analytique que professe l'auteur à l'Université de Bologne. Ce deuxième volume est divisé en deux parties. Dans la première, l'auteur fait une étude approfondie des quadriques, tandis que la seconde est consacrée aux éléments de la théorie générale des courbes planes et des courbes gauches et de la théorie des surfaces.

F. Bouny. — **Leçons de mécanique rationnelle,** professées à l'Ecole des mines et de métallurgie, Faculté technique du Hainaut à Mons. Tome premier. — 1 vol. in-8° de 600 p. avec 140 fig.; Fr. 50.—; Librairie A. Leich, Mons; Librairie A. Blanchard, Place de la Sorbonne, Paris.

Ce nouveau traité de mécanique rationnelle s'adresse aux élèves de l'enseignement technique supérieur. Il correspond aux leçons professées par l'auteur, depuis 1908, à l'Ecole des mines et de métallurgie du Hainaut.

Ce premier volume comprend le calcul vectoriel, la cinématique, la statique et le potentiel, avec près de 300 exercices accompagnés de leurs solutions. L'auteur fait usage dès le début de la méthode vectorielle suivant la notation de J. Massau.

E. Czuber. — **Mathematische Bevölkerungstheorie,** auf Grund von G. H. Knibbs « The Mathematical Theory of Popoulation ». — 1 vol in-8° de 357 p. et 71 fig.; B. G. Teubner, Leipzig.

Cet ouvrage apporte d'importantes contributions à la théorie statitisque des populations. Il est basé sur les recherches récentes entreprises par M. E. H. Knibbs à la suite du recensement général qui a été fait sous sa direction en Australie en 1911.

K. Doehlmann. — **Projektive Geometrie in synthetischer Behandlung.** Fünfte Auflage. (Sammlung Goeschen). I. Die projektive Beziehung der Grundgebilde 1. Stufe und die Kegelschnitte als Erzeugnis solcher Grundgebilde. — 1 vol. in-16 de 132 p. et 59 fig.; 1 Marc or.

II. Polar- und Brennpunkts-Eigenschaften der Kegelschnitte. Imaginäre Elemente. Die Regelflächen 2. Ordnung. — 1 vol. in-16 de 138 p. avec 55 fig.; Marc or. 1.25; Walter de Gruyter & Co., Berlin.

La cinquième édition des notions de Géométrie projective a été entièrement remaniée et complétée. Elle comprend deux volumes. Le premier est consacré aux formes fondamentales de première espèce, à la génération des sections coniques et aux propriétés qui s'y rattachent (Théorème de Pascal et de Brianchon.). Les propriétés relatives aux pôles et polaires, aux foyers et aux quadriques réglées font l'objet du second volume.

P. B. Fischer. — **Rechenbuch für höhere Knabenschulen.** I. Teil. Lehrstoff der Sexta, II. Teil. Lehrstoff der Quinta, III. Teil. Lehrstoff der Quarta. — 3 vol. brochés in-8° de 76, 139 et 202 p. avec 12, 20 et 2 fig.; de Goldmark 1.—, 0.80 et 0.80. Deuxième édition revue et augmentée. B. G. Teubner, Leipzig.

Recueil de problèmes d'arithmétique, divisé en trois parties et destiné aux classes VI, V et IV de l'enseignement secondaire supérieur allemand.

Cet ouvrage, qui fait partie de la collection de manuels dirigé par M. W. Lietzmann, intéressera tous ceux qui sont chargés de l'enseignement de l'arithmétique dans les collèges.

E. Foerster. — **Politische Arithmetik.** Zinseszinsen, Renten und Anleihungen (Sammlung Göschen, Bd. 879). — 1 vol. in-16 de 155 p. avec 7 fig. Goldmark 1.25 ; Walter de Gruyter & Co., Berlin.

Notions d'arithmétique financière concernant le calcul des intérêts composés, des rentes et des emprunts. Elles sont accompagnées de nombreux exemples étudiés avec soin. L'ouvrage se termine par des tables numériques d'un emploi courant.

H. Freyberger. — **Zentral-Perspektive.** Neu bearbeitet von Prof. J. Vonderlinn. (Sammlung Göschen, Bd. 57). Verbesserte Auflage. — 1 vol. in-16 de 148 p. avec 132 fig., 1 marc or ; Walter de Gruyter & Co., Berlin.

Dans ce petit volume se trouvent condensées les notions essentielles de perspective établies en partant de la projection orthogonale sur deux plans et accompagnées de nombreuses figures.

H. Galbrun. — **Assurances sur la vie, Calcul des Primes.** Premier fascicule du tome III du Traité du Calcul des Probabilités et de ses applications publiés par M. E. Borel. — 1 vol. in-8° raisin (25-16) de 310 p.; Fr. 35.—; Gauthier-Villars & Cie., Paris.

Dans le Traité du Calcul des probabilités et de ses applications, publié sous la direction de M. E. Borel, les assurances sur la vie formeront deux volumes rédigés par M. Galbrun. Le présent volume traite du calcul des primes. Un second volume qui paraîtra ultérieurement sera consacré à la théorie des réserves mathématiques.

L. Grosgurin. — **Enseignement de l'Arithmétique, Méthodologie.** Ouvrage adopté par le Département de l'Instruction publique du Canton de Genève. — 1 vol. in-8° de 298 p. avec de nombreuses figures ; Payot & Cie, Lausanne et Genève.

Cet ouvrage présente une méthode générale pour l'iniatiation à l'arithmétique. Il s'adresse plus particulièrement à ceux qui se destinent à l'enseignement dans les écoles primaires, mais il sera aussi lu avec profit par les professeurs des écoles normales primaires.

K. Hahn. — **Mathematische Physik,** ausgewählte Abschnitte und Aufgaben aus der theoretischen Physik. — 1 vol. in-8° de 63 p. avec 46 fig.; M. 5.40 ; B. G. Teubner, Berlin.

Dans cette introduction à la Physique mathématique, l'auteur donne un exposé à la fois clair et concis des notions fondamentales concernant la mécanique, la mécanique statistique, la théorie de la chaleur, l'électricité et la théorie de la relativité, accessibles à ceux qui possèdent les premiers éléments du calcul infinitésimal. Les problèmes, fort bien choisis, forment à eux seuls un excellent recueil d'exercices de mécanique et de physique.

P. Jolibois. — **Les méthodes actuelles de la chimie.** — (Collection Armand Colin, No 37.) — 1 vol. in-16 de 192 p. avec 45 fig.; Fr. 5.—; Librairie Armand Colin, Paris.

Il est bon que l'étudiant en mathématique conserve le contact avec la chimie et tout particulièrement avec la chimie physique théorique. Il trouvera dans ce petit volume, présentées d'une manière simple, les méthodes soit expérimentales soit théoriques en usage dans la chimie moderne.

G. Julia. — **Lecons sur les fonctions uniformes** à point singulier essentiel. isolé, professées au Collège de France, rédigées par P. Flamand. — 1 vol. in-8° de 152 p.; Fr. 15.—; Gauthier-Villars & Cie, Paris.

Ces leçons présentent, dans son état actuel, la théorie des fonctions uniformes à point singulier essentiel, telle qu'elle résulte des recherches de MM. Picard, Borel, Landau, Carathéodory, Schottky, Lindelöf, Montel, etc.

E. Junker. — **Höhere Analysis,** zweiter Teil. Integralrechnung. (Sammlung Göschen, No 88.) Vierte, verbesserte Auflage. — 1 vol. in-16 de 132 p. et 50 fig.; 1 marc or ; Walter de Gruyter & Co, Berlin.

Quatrième édition, revue et complétée, du petit volume consacré au calcul intégral : Intégrales indéfinies, méthodes d'intégration, intégrales définies, applications géométriques, applications à la statique, intégrales doubles et applications.

B. v. Kerekjarto. — **Vorlesungen über Topologie,** I. *Flächentopologie* (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Band VIII). — 1 vol. in-8° de 270 p. avec 60 fig.; Dollar 2.80 ; Julius Springer, Berlin.

Ce nouvel exposé des principes de l'Analysis situs est basé sur la théorie des ensembles. Dans ce premier volume l'auteur traite de la topologie du plan et de l'espace.

Felix Klein. — **Gesammelte mathematische Abhandlungen.** — Zweiter Band. *Anschauliche Geometrie*, *Substitutionsgruppen und Gleichungstheorie*, *Zur Mathematischen Physik*, herausgegeben von R. Fricke und H. Vermeil (von F. Klein mit ergänzenden Zusätzen versehen). — Dritter Band. *Elliptische Funktionen*, *insbesondere Modulfunktionen*, *Hyperelliptische und Abelsche Funktionen*, *Riemannsche Funktionentheorie und automorphe Funktionen*, herausgegeben von R. Fricke, H. Vermeil und E. Bessel-Hagen (von F. Klein mit ergänzenden Zusätzen versehen). — 2 vol. de 713 et 774 p. avec 185 et 138 fig.; Fr. 30.— et 36.—; Julius Springer, Berlin.

L'*Enseignement mathématique* a déjà annoncé le Tome I des Mémoires de M. Klein. Les Tomes II et III seront analysés dans un prochain numéro.

H. Kleinert. — **Die Prüfungsmöglichkeiten der Einsteinschen Relativitätstheorie.** Allgemein verständliche und zusammenfassende Darstellung. — 1 fasc. in-8° de 63 p., Fr. 3.20 ; Verlag Ernst Bircher, Bern.

Quelles sont les possibilités de vérifier expérimentalement la théorie de la relativité ? Telle est la question qu'examine l'auteur dans le présent

fascicule. Il passe en revue ce qui a été fait jusqu'à ce jour au point de vue expérimental. Les résultats obtenus seraient plutôt favorables à la théorie d'Einstein.

O. Knopf. — **Wahrscheinlichkeitsrechnung.** (Sammlung Göschen, Band 508 et 871). — 2 vol. in-16 de 112 p. chacun avec 10 fig., 1 Goldmark chacun ; Walter de Gruyter & Co., Berlin.

La Collection Göschen vient de s'enrichir d'une nouvelle monographie consacrée au Calcul des probabilités et rédigée par M. O. Knopf, professeur d'astronomie à l'Université de Jéna. Suivant le but de la Collection, l'auteur limite son exposé aux notions essentielles et aux applications les plus importantes. De nombreux exemples faciliteront au lecteur sa première initiation au Calcul des probabilités.

K. Knopp. — **Aufgabensammlung zur Funktionentheorie.** I. Teil : *Aufgaben zur elementaren Funktionentheorie.* (Sammlung Göschen, Band 877). — 1 vol. in-16 de 135 p.; Fr. 1.25 ; Walter de Gruyter & Co., Berlin.

Ce recueil d'exercices d'analyse vient compléter les monographies que la Collection Göschen a déjà consacrées à la théorie des fonctions et dues à MM. Bieberbach, Knopp et Rose. Il comprend des problèmes sur les nombres complexes, les fonctions analytiques, les développements en série et la représentation conforme.

M. Kraitchik. — **Recherches sur la Théorie des Nombres.** — Avec une préface de Ch.-J. de la Vallée-Poussin. — 1 vol. in-8° de 272 p. et 4 tables. Gauthier-Villars & C°, Paris.

Ce volume fait suite à l'ouvrage intitulé « Théorie des nombres » que M. Kraitchik a publié il y a deux ans. Il comprend, dans la première partie, les chapitres suivants . Identité. — Généralités. — Congruences — Congruence du second ordre. — Congruences binomes. — Factorisation. — Equations binomes.

La seconde partie renferme des tables relatives aux nombres premiers d'un grand intérêt pour tous les arithméticiens.

M. Lecat. — **Bibliographie des déterminants à plus de deux dimensions.** — 1 fasc. in-8° de 16 p.; chez l'auteur, avenue des Alliés, 92, Louvain.

M. Lecat poursuit avec un dévouement inlassable ses recherches bibliographiques. Dans le présent fascicule il a réuni la liste des travaux sur les déterminants à plus de deux dimensions. Dans la première partie, les publications sont classées par ordre alphabétique des noms d'auteurs ; dans la seconde, elles sont indiquées dans l'ordre chronologique.

S. Lefschetz. — **L'Analysis situs et la Géométrie algébrique.** (Collection des Monographies sur la théorie des fonctions.) — 1 vol. in-8° de 154 p. avec figures ; Fr. 20.—; Gauthier-Villars & C°, Paris.

Cette monographie apporte d'intéressantes contributions à l'étude des surfaces et des variétés algébriques. Les sujets développés par l'auteur correspondent, en partie, aux conférences faites à Rome, au printemps de 1921, sous les auspices de l'« Institute of international Education ».

H. Lorenz. — **Einführung in die Elemente der höheren Mathematik und Mechanik.** Zweite verbesserte Auflage. — 1 vol. in-8° de 176 p. avec 126 fig.; Verlag R. Oldenburg, Munich.

Cette introduction aux éléments de mathématiques supérieures comprend des notions de géométrie analytique à 2 et à 3 dimensions, de calcul infinitésimal et de mécanique. L'auteur se borne aux notions essentielles que l'étudiant devrait posséder pour pouvoir suivre sans difficultés le cours de mathématiques des écoles techniques supérieures.

W. Lietzmann und V. Trier. — **Wo steckt der Fehler ?** 3. Aufl. (Math. phys. Bibliothek, Bd. 52). — 1 vol. in-16 de 48 p. et 35 fig.

W. Lietzmann. — **Trugschlüsse.** 3. Aufl. (Math.-phys. Bibliothek, Bd. 53). — 1 vol. in-16 de 54 p. et 27 fig.; B. G. Teubner, Leipzig.

A la suite de nombreuses additions, le recueil de curiosités mathématiques intitulé «Wo steckt der Fehler ? » (où est l'erreur ?) comprend deux petits volumes. Nous le signalons à nouveau à l'attention des maîtres. Ils y trouveront de nombreux exemples empruntés aux différents domaines des mathématiques, ainsi que d'intéressantes remarques sur les erreurs de raisonnement qu'il convient de signaler aux élèves.

L. Locke. — **The ancient Quipu or Peruvian Knot Record.** — 1 vol. in-4° de 84 p. avec LIX planches ; The American Museum of Natural History, 1923.

On désigne sous le nom de « quipu » les cordelettes à nœuds dont se servaient autrefois les Péruviens, dans leur système de numération, pour effectuer les calculs. Le présent ouvrage nous apporte d'intéressants renseignements sur ce sujet. Nous y reviendrons dans un prochain numéro.

W. Nernst et A. Schoenflies. — **Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften.** Kurzgefasstes Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung mit besonderer Berücksichtigung der Chemie. Zehnte, vermehrte u. verbesserte Auflage. — 1. vol. in-8° de 502 p. avec 113 fig.; R. Oldenburg, Munich.

Dixième édition, revue et augmentée, de l'ouvrage bien connu de MM. Nernst et Schœnflies. La première remonte à 1895. Depuis cette époque il a paru de nombreaux traités de mathématiques générales à l'usage des étudiants en sciences physiques et chimiques. Constamment perfectionné, le présent ouvrage conserve sa place au nombre des meilleurs. Les additions qui ont été apportées à la nouvelle édition portent sur les applications à la thermodynamique, à la cristallographie et à la relativité.

N. Nielsen. — **Traité élémentaire des nombres de Bernoulli.** — 1 vol. in-8° de X-398 p.; Fr. 50.—; Gauthier-Villars & C°, Paris.

Dans cet ouvrage, M. Nielsen présente d'une manière fort complète la théorie des nombres de Bernoulli et les problèmes qui s'y rattachent.

M. d'Ocagne. — **Notions sommaires de Géométrie projective** à l'usage des candidats à l'Ecole polytechnique. — 1 fasc. in-8° de 25 p.; Fr. 3.—; Gauthier-Villars & C°, Paris.

Exposé sommaire des notions fondamentales de géométrie projective

qui sont utilisées dans le Cours de géométrie de l'Ecole polytechnique, et qu'il est, par suite, souhaitable que les élèves possèdent en y arrivant. Il s'agit des notions relatives aux ponctuelles et aux faisceaux homographiques et de leur application à l'étude des coniques et des quadriques.

I. Peters. — **Die mathematischen und physikalischen Grundlagen der Musik.** (Mathematisch-Physikalische Bibliothek, Bd. 55). — 1 vol. in-16 de 33 p.; 0.80 M; B. G. Teubner, Leipzig.

L'auteur expose d'une manière élémentaire les bases mathématiques et physiques de la musique.

M. Petrovitch. — **Durées physiques indépendantes des dimensions spatiales.** — 1 fasc. in-8° de 28 p.; Librairie Blanchard, Paris.

Etude critique du problème du temps. Nous la signalons à l'attention de tous ceux qui s'intéressent à la théorie de la relativité.

R. Rothe. — **Elementarmathematik und Technik.** Eine Sammlung elementarmathematischer Aufgaben mit Beziehungen zur Technik. (Mathematisch-Physikalische Bibliothek, Bd. 54). — 1 vol. in-16 de 52 p. et 70 fig.; 0.80 M.; B. G. Teubner, Leipzig.

Les maîtres de l'enseignement moyen trouveront dans ce petit recueil de nombreux problèmes empruntés aux sciences techniques mais dont la résolution n'exige que l'emploi des mathématiques élémentaires.

J. Rouch. — **L'atmosphère et la prévision du temps.** (Collection Armand Colin, N° 36). — 1 vol. in-16 de 204 p. avec 35 fig.; Fr. 5.—; Librairie Armand Colin, Paris.

M. J. Rouch, ancien chef du Service météorologique des armées et de la marine, professeur à l'Ecole navale, expose dans ce volume les méthodes qui permettent de prévoir rationnellement le temps qu'il fera. Il montre que, grâce aux méthodes nouvelles, la météorologie prend peu à peu figure de science exacte.

J. G. Rutgers. — **Inleiding tot de analytische Meetkunde.** Eerste Deel : *Het Platte Vlak*, Met Atlas, 115 figuren en ruim 200 Vraagstukken. Tweede Deel . *De Ruimte*, Met Atlas, 46 figuren en ruim, 165 Vraagstukken (Norodhoff's Verzameling van Wiskundige Werken, Deel 7 et 8). — 2 vol. reliés in-8° de 299 et 302 p.; Florins 6.50 chacun ; P. Noordhoff, Groningue.

Cette introduction à la Géométrie analytique, rédigée par M. Rutgers, professeur à l'Ecole technique supérieure de Delft, comprend deux volumes. Le premier renferme les principaux chapitres de la Géométrie analytique à deux dimensions concernant la droite, le cercle, les courbes du 2me ordre et leur propriétés fondamentales, les coordonnées trilinéaires et les coordonnées tangentielles. Le second volume est consacré à l'espace: le plan, la droite, les quadriques et leurs propriétés fondamentales, les courbes gauches notamment les cubiques et les quadriques gauches, les coordonnées tangentielles. La plupart des chapitres sont accompagnés de nombreux problèmes à résoudre.

G. Rutledge. — **Fundamental Topics in the Differential and Integral Calculus.** — 1 vol. in-8° de 252 p. et 50 fig. D. 2.20 ; Ginn E Co., Boston et Londres.

Recueil d'exercices et de problèmes de calcul différentiel et intégral, avec de nombreuses applications empruntées aux sciences techniques. Spécialement destiné aux élèves de l'enseignement technique, il pourra aussi rendre de grands services à tous ceux qui désirent se familiariser avec les premiers éléments du calcul infinitésimal.

Th. Schmid. — **Darstellende Geometrie.** II. Band, zweite Auflage. (Sammlung Schubert LXVI.) — 1 vol. in-8° de 340 p. et 163 fig. Fr. 7.50 ; Walter de Gruyter & Co., Berlin.

Le traité de Géométrie descriptive de M. Th. Schmid, professeur à l'Ecole techrique supérieure de Vienne, a obtenu un succès bien mérité. En moins de trois ans la première édition a été épuisée. Le tome II qui paraîtra aujourd'hui en 2me édition comprend les chapitres suivants :

Projection oblique. — Projection centrale. — Surfaces de révolution. — Surfaces hélicoïdales et surfaces réglées gauches. — Projections cotées et applications, photogrammétrie, le problème des cartes géographiques, nomographie. — Notes historiques et bibliographiques.

F. Schuh. — **Lessen over de hoogere Algebra.** — Uitgegeven als negende druk van Lobatto's Lessen over de hoogere Algebra. Tweede Deel. — 1 vol. in-8° de 357 p. avec 9 fig. et 595 problèmes ; fl. 11.50 ; P. Noordhoff, Groningue.

Voici les principaux chapitres dont se compose le tome II des leçons d'algèbre supérieure publiées par M. F. Schuh :Fonctions symétriques des racines, discriminant. Equations binomes, construction des polygones réguliers. Equations du 3me et du 4me degré, équation d'un degré supérieur. Elimination. Décomposition d'une fonction rationnelle.

Une foule d'exercices et de problèmes permettent au lecteur de se familiariser avec les méthodes exposées par l'auteur.

D.-E. Smith. — **The Progress of Arithmetic in the iast Quarter of a Century.** 1 vol. cart. in-8° de 93 p.; Ginn et C°, Boston.

Dans ce petit volume M. D.-E. Smith retrace les progrès réalisés dans l'enseignement de l'arithmétique élémentaire depuis vingt-cinq ans. Il discute avec une rare compétence les questions de méthodes, ainsi que les conditions que doit remplir un manuel d'arithmétique. Son livre sera lu avec intérêt et profit par tous les maîtres de l'enseignement élémentaire.

H. Thirring. — **L'idée de la théorie de la relativité.** (Science et civilisation.) Trad. de l'allemand par M. Slovine. — 1 vol. de X-186 p. avec 8 fig.; Fr. 8.—; Gauthier-Villars & Cie, Paris.

Cet ouvrage donne une image remarquablement fidèle des idées einsteiniennes, de leur cohésion logique et de leur beauté interne, de leur fécondité et de leur grande portée philosophique.

Dans une lettre adressée à l'auteur, M. Einstein s'exprime en ces termes ; « Le Livre de Thirring, qui s'adresse au grand public, contient un exposé des mieux réussis de la Théorie de la Relativité. Particulièrement instructif

est le tableau synoptique ajouté à la fin, qui met en lumière l'indépendance des idées directrices de la Théorie et la façon dont elles sont reliées par elle. »

L. Tonelli. — **Fondamenti di calcole delle variazioni.** Vol. secondo. — 1 vol. in-8° de 660 p.; Lire 80.—; Nicola Zanichelli, Bologne.

Le tome II des fondements du calcul des variations du professeur Tonelli est consacré à l'étude des problèmes d'extrêma libres absolus (*a*, forme paramétrique ; *b*, forme ordinaire), d'extrèma relatifs et à des problèmes isopérimétriques.

G. Vivanti. — **Elementi del Calcolo delle Variazioni.** (Biblioteca di Matematiche Superiori). — 1 vol. in-8° de 290 p.; 40 Lires ; Giuseppe Principato, Messine.

L'ouvrage de M. Vivanti constitue pour l'étudiant un excellent guide dans une première étude approfondie des éléments du calcul des variations. Il comprend un exposé bien ordonné des problèmes et des méthodes classiques. Dans la première partie, l'auteur examine la variation première, dans la seconde la variation d'ordre supérieure. Les rapports du calcul de variations avec le calcul fonctionnel sont signalés très brièvement dans l'appendice.

H. De Vries. — **Beknopt Leerboek der projectieve Meetkunde.** — 1 vol. relié in-8° de 306 p. avec 77 fig. ; Florins 7.50 ; (Noordhoff's Verzameling van Wiskundige Werken, Deel 8) ; P. Noordhoff, Groningue.

M. de Vries a condensé dans ce traité les principes fondamentaux de la Géométrie projective du plan et de l'espace. Il expose avec beaucoup de clarté les parties essentielles des propriétés projectives des figures. De nombreux aperçus historiques augmentent encore l'intérêt et la valeur de ce nouveau volume de la collection Noordhoff.

C. E. Weatherburn. — **Advanced Vector Analysis** with Application to mathematical Physics. — 1 vol. in-8° de 222 p. avec 36 fig. ; G. Bell and Sons, Ltd., London.

Cet ouvrage forme une suite à l'*Elementary Vector Analysis*, que nous avons déjà signalé dans un précédent numéro. Il est entièrement consacré aux applications de l'analyse vectorielle à la Physique mathématique.

H. Wieleitner. — **Geschichte der Mathematik,** neue Bearbeitung, II. ; Von 1700 bis zur Mitte des 19. Jahrhunderts. (Sammlung Göschen, Band 875). — 1 vol. in-16 de 154 p. ; 1 marc or ; Walter de Gruyter & C°, Berlin.

Aperçu sommaire de l'histoire des mathématiques pendant le XVIIe et la première moitié du XIXe siècle. L'auteur examine, dans leur développement historique, les principales branches des mathématiques, depuis l'arithmétique jusqu'à la Géométrie non-euclidienne.

The Teaching of Geometry in schools. A report prepared for the Mathematical Association. — 1 vol. in-8° de 74 p. avec 12 fig. ; Bell and Sons, Ltd., Londres.

Ce rapport sur l'enseignement de la Géométrie a été rédigé par une

sous-commission de l'Association anglaise des professeurs de mathématiques élémentaires et composées de M. E. H. Neville, président ; Mlle Margaret Punnet, secrétaire ; MM. J. V. H. Coates, C. Godfrey, N. K. Marsden, T. P. Nunn, H. E. Piggott, C. O. Tuckey.

2. Publications périodiques :

American Journal of Mathematics. Volume XLIV. — E. T. Bell: An Arithmetic Dual of Kummer's Quartic Surface. — A. Emch: Incidences of Straight Lines and Plane Algebraic Curves and Surfaces generated by them. — V. C. Poor: On the Theorems of Gauss and Green. — Ch. C. Camp: An Extension of Sturm-Liouville Expansion. — H. Langmann: Conformal Transformations of Period n and Groups generated by them. — L. L. Dines: A Primary Classification of Projective Transformations in Function Space. — E. H. Moore et H. L. Smith: A General Theory of Limits. — G. A. Miller: Substitution Groups whose Cycles of the same Order contain a Given Number of Letters. — R. D. Carmichael: Boundary Value and Expansion Problems: Oscillation, Comparison and Expansion Theorems. — E. W. Chittenden: On a Theorem in General Analysis and the Interrelations of Eight Fundamental Properties of Classes of Functions. — T.-R. Hollcroft: Plane Involutions of Order Four. — I. A. Barnett: Differential Equations with a continuous Infinitude of Variables. — G. E. Wahlin: The Factorization of the rational Primes in a cubic Domain. — S. D. Zeldin: On the Structure of finite continuous Groups with a single Infinitesimal Transformation. — K. P. Williams: The Laplace-Poisson mixed Equation. — Ph. Franklin: The Four Color Problem. — Ch.-A. Fischer: On the Kernel of the Stieltjes Integral Corresponding to a completely Continuous Transformation. — M.-I. Logsdon: Equivalence and Reduction of Pairs of Hermitian Forms. — B. M. Turner: Plane Cubics with a given Quadrangle of Onflexions. — P. H. Dans: Normal ternary continued Fraction Expansion for the Cube Roots of Integers. — V.-D. Gokhale: Concerning compact Kürschak Fields.

Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris. 2me semestre 1922. — 3 *juillet.* — A. Cahen: Sur les solutions singulières des équations différentielles du premier ordre. — M. Biernacki: Sur le déplacement des zéros des fonctions entières par leur dérivation. — R. Jarry-Desloges: Contribution à l'étude de la surface des planètes. — 10 *juillet.* — E. Cartan: Sur un théorème fondamental de M. H. Weyl dans la théorie de l'espace métrique. — A. Chatelet: Groupes abéliens finis. — 17 *juillet.* — J. Andrade: Les déterminismes mécaniques et la notion de milieu; orbites pseudo-elliptiques et orbites circulaires. — 24 *juillet.* — M. Abramesco: Sur les séries de polynomes à deux variables complexes. — P. Dienes: Sur le déplacement des tenseurs. — 31 *juillet.* — E. M. Lemeray: La structure de l'Univers et la relativité générale. — 7 *août.* — M. Abramesco: Sur les développements en séries à deux variables complexes suivant les inverses de polynomes donnés. — 16 *août.* — K. Popoff: Sur l'intégration des équations de la Balistique dans des conditions générales de la résistance. — 21 *août.* — H. Mineur: Sur une classe de transcendants uniformes. — N. Lusin et W. Sierpinski: Sur une décomposition du continu. — 28 *août.*

— J. Chokhate: Sur le développement de l'intégrale $\int_a p(y)/(x-y)dy$ en fraction continue. — Ch. N. Moore: Sur l'équivalence des méthodes de sommation de Cesaro et de Hölder pour les limites multiples. — N. Sakellariou: Sur les systèmes polaires. — A. Bejot: Mise en perspective réciproque des figures de même espèce. — 4 *septembre.* — Th. Varopoulos: Sur un théorème de M. Remoundos. — Alf. Guldberg: Sur le théorème de M. Tchebycheff. — 11 *septembre.* — E. Merlin: Sur un espace mobile attaché à un réseau. — P. Urysohn: Les multiplicités cantoriennes. — D. Riabouchinski: Sur les équations du mouvement à deux dimensions de solides dans un liquide avec tourbillon. — H. Villat: Sur les mouvement plans tourbillonnaires dans un fluide simplement ou doublement connexe contenant des parois solides. — 18 *septembre.* — L.-G. du Pasquier: Sur l'arithnomie des quaternions. — 25 *septembre.* — P. Urysohn: Sur la ramification des lignes cantoriennes. — 2 *octobre.* — P. Montel: Sur les familles quasi normales de fonctions méromorphes. — 9 *octobre.* — G. Bratu: Sur les progressions d'ordre supérieur. — H. Hansson: Sur un procédé nouveau de multiplication des échelles fonctionnelles. — 16 *octobre.* — A. Bilimovitch: Des lignes d'inertie sur une surface. — 23 *octobre.* — A. Angelesco: Sur une propriété fonctionnelle des coniques. — E. Merlin: Quelques propriétés des réseaux. — Desaint: Sur les représentations générales des fonctions analytiques. — P. J. Myrberg: Sur les singularités des fonctions automorphes. — F. Nevanlinna: Sur les relations qui existent entre la distribution pes zéros et des pôles d'une fonction monogène et la croissance de son module. — A. Guldberg: Sur un théorème de M. Markoff. — C. Lurquin: Sur le critérium de Tchébycheff. — 30 *octobre.* — M. D'Ocagne: Sur la représentation plane de l'espace. — De Seguier: Sur les diviseurs de certains groupes linéaires galvisiens. — 6 *novembre.* — S. Bernstein: Sur le développement asymptotique de la meilleure approximation par des polynomes de degrés infiniment croissants des fonctions rationnelles. — B. Meidell: Sur un problème de calcul des probabilités et les statistiques mathématiques. — P.-J. Myrberg: Sur les singularités des fonctions automorphes. — J. Le Roux: Sur la gravitation dans la mécanique classique et dans la théorie d'Einstein. — 13 *novembre.* — P. Levy: Sur la détermination des lois de probabilité par leurs fonctions caractéristiques. — Van der Corput: Sur quelques approximations nouvelles. — W. Sierpinski: Sur l'existence de toutes les classes d'ensembles mesurables. — P. Fatou: Sur les fonctions méromorphes de deux variables — 20 *novembre.* — S. Bays: Sur les systèmes cycliques de triple de Steiner. — A. Myller: Surfaces réglées remarquables passant par une courbe donnée. — P. Mentré: Sur les complexes qui présentent, sur toutes leurs droites, des singularités projectives du deuxième ordre infinitésimal. — M. Brillouin: Gravitation einsteinienne et gravitation newtonienne: à propos d'une récente note de M. Le Roux. — 27 *nov.* — P. Fatou: Sur certaines fonctions uniformes de deux variables. — S. Sarantopoulos: Sur le nombre des racines des fonctions holomorphes dans une courbe donnée. — A. Guldberg: Sur les valeurs moyennes. — J. Rueff: Théorie des phénomènes de change. — M. Brillouin: Gravitation einsteinienne. Statique. Points singuliers. Le point matériel. Remarques diverses. — A. Buhl: Sur le mouvement séculaire du périhélie de Mercure. — 4 *décembre.* — J. Le Roux: Sur la gravitation des systèmes. — 11 *déc.* — G. Julia:

Sur les substitutions rationnelles à deux variables. — M. Lecat : Développement des déterminants en fonction de déterminants à espaces axiaux vides. — L. Mouren : Sur de nouveaux nomogrammes à points alignés applicables, en particulier, à des problèmes de navigation et leur réalisation mécanique. — A. Costa : A propos d'une note de M. Borel. — 26 *déc.* — A. Guldberg : Quelques inégalités dans le calcul des probabilités. C. Guichard : Sur les réseaux qui sont conjugués à des congruences polaires réciproques par rapport à un complexe linéaire. — B. Gambier : Systèmes linéaires de courbes planes admettant un système donné de points-bases. — G. Bouligand : Sur un concept de la géométrie linéaire. — N. Sakellariou : Sur les figures polaires. — J. Le Roux : La mécanique de Newton n'est pas une approximation de celle d'Einstein.

Giornale di Matematiche. — Vol. LX. Juillet-Décembre 1922. — A. Giulio : Sistemi differenziali di Riccati. — B. Michele : Sul numero delle radici di un' equazione algebrica in un' area. — Ch. Salvatore : Sulle varietà abeliane reali e sulle matrici di Riemann reali. — C. Salvatore : Sui determinanti di differenze. — M. Mario : Sulla teoria astratta delle operazioni. — M. Roberto : Materiale didattico ed esperienze nell' insegnamento. — M. Domenico : Il principio di trasporto di Clebsch e lo studio di particolari tangenti delle curve di 30. ordine. — M. Wilhelm : Die rationale Quintik der Ebene vom 5-dimensionalen ausgesehen. — N. Grazia : Le superficie razionali d'ordine n dotate di retta $(n\text{-}y)$-*pla* e di punti y-*pli*.

Journal für die reine und angewandte Mathematik. — Band 152. — G. Mittag-Leffler : Der Satz von Cauchy über das Integral einer Funktion zwischen imaginären Grenzen. — O. Haupt : Ueber Asymptoten ebener Kurven. — W. E. H. Jung : Ueber die Salomonschen Tangenten einer algebraischen Fläche. — E. Kamke : Ueber die simultane Zerfällung ganzer Zahlen in 1-*te* und n-*te* Potenzen. — R. Mehmke : Einige Sätze über Matrisen. — K. Schwering : Die Siebenteilung der lemniskatischen Funktion sin am (u). — K. Bindschedler : Die Teilungskörper der elliptischen Funktionen im Bereich der dritten Einheitswurzel. — G. Weyl : Hinreichende Bedingungen des Extremuns bei einer neuen Art von isoperimetrischen Problemen. — R. Sturm : Ueber das grösste Tetraeder, wenn die Inhalte der Flächen gegeben sind. — R. Sturm : Zwei Minimalprobleme. — A. Kienast : Ueber die Darstellung analytischer Funktionen durch bestimmte Integrale. — B. Delaunay : Zur Bestimmung algebraischer Zahlkörper durch Kongruenzen; eine Anwendung auf die Abelschen Gleichungen. — Th. Reye : Die kubische Raumkurve als Leitkurve von Regelflächen dritten bis sechsten Grades. — H. Hasse : Ueber die Darstellbarkeit von Zahlen durch quadratische Formen im Körper der rationalen Zahlen. — F. Burkhardt : Ueber eine Verallgemeinerung der Tetraedergruppe. — O. Staude : Ueber Kollineationen und Korrelationen im Raume. — K. Rychlik : Eine stetige nicht differenzierbare Funktion im Gebiete der Henselschen Zahlen. — J. Kurschak : Irreduzible Formen. — G. Rados : Bemerkungen und Ergänzungen zum Beweis eines Kummerschen Theorems. — P. Riebesell : Ueber die Lehre vom statistischen Ausgleich. — H. Hasse : Ueber die Equivalenz quadratischer Formen im Körper der rationalen Zahlen. — K. Hensel : Ueber ein neues Normenrestsymbol und

seine Anwendung auf die Theorie der Normenreste in allgemeinen algebraischen Körpern. — H. Brandt: Klassenanzahlen bei linearen Substitutionen. — O. Haupt: Ueber Asymptoten ebener Kurven.

Nouvelles annales de mathématiques. — 5me série, Tome I. — G. Casabonne: Un théorème sur les équations algébriques entières. — G. Bouligand: Transformations linéaires. volumes et déterminants. — G. Valiron: Sur les fonctions analytiques d'une variable réelle. — L. Tits: Identités nouvelles pour le calcul des nombres de Bernoulli. — P. Humbert: Monographie des polynomes de Kummer. — S. Zaremba: Sur une forme remarquable de l'intégrale de l'équation des cordes vibrantes. — A. Guldberg: Un théorème du calcul des probabilités. — G. Valiron: Sur un problème particulier de variations. — R. Bricard: Sur le théorème de Morley. — Ch. Bioche: Remarques sur les trièdres. — E. Vessiot: Sur l'étude algébrique des problèmes de la division des arcs. — B. Niewenglowski: Sur la trisection d'un angle. — V. Thebault: Sur un théorème classique de Dandelin. — J. Larras: La construction du centre de courbure des coniques d'après Mannheim démontrée par le théorème de Pascal. — H. Lebesgue: Sur les cercles focaux. — J. Lemaire: Système harmonique de trois coniques. — L. de la Roëre: Développables formées avec les normales d'une quadrique. — Ch. Bioche: Sur les coniques focales. — M. d'Ocagne: Sur les systèmes de quadriques ayant mêmes projections de leurs lignes de courbure sur un plan principal commun. — J. Hadamard: Sur les points doubles des lieux géométriques et sur la construction par régions. — M.-F. Egan: Note sur les polaires. — Ch. Bioche: Remarques sur les jacobiens. — R. Esteve: Sur la formule d'Holditsch et les applications qu'on peut en déduire. — G. Bouligand: Sur une notion d'équivalence locale apte à préciser certains points de la théorie des enveloppes. — G. Fontene: Sur deux familles de courbes orthogonales. — P. Montel: Sur les ombilics. — J. Lemaire: Surface dont tous les points sont des ombilics. — R. Bricard: Sur la conservation de la courbure géodésique dans la déformation d'une surface. — J. Peres: A propos de la formule d'Euler-Savary. — G. Bouligand: Sur un théorème de Liouville. — M. Morand: Sur une manière simple d'obtenir géométriquement les formules de Lorentz. — B. Niewenglowski: Démonstration de la formule de l'accélération dans le mouvement relatif. — G. Bouligand: Introduction à l'étude de la Mécanique et de ses principes. — J. Haag: Sur un invariant intégral se rattachant à la Mécanique statistique. — Et. Delassus: Sur les liaisons de roulement. — R. Thiry: Etude d'un problème particulier où intervient le frottement de glissement. — J. Soula: Sur les problèmes de choc avec frottement. — H. V.: Sur un problème de choc avec frottement. — Questions d'examens et de concours. — Correspondance. — Bibliographie. — Nécrologie. — Questions proposées. — Solutions de questions proposées.

Revue semestrielle des Publications mathématiques, rédigée sous les auspices de la Société Mathématique d'Amsterdam. Tome XXX, Première partie: octobre 1921 à octobre 1922. Deuxième partie: actobre 1922 à avril 1923. — P. Noordhoff, Groningue.

Zeitschrift für Mathematischen und Naturwissenschaftlichen Unterricht aller Schulgattungon. — 53. Jahrgang 1922. — A. Baruch: Die verschiedenen Methoden zur Lösung von Aufgaben der darstel-

lenden Geometrie bei ungünstigen Lageverhältnissen. — K. Bögel: Zum « Paradoxon der Gravitation » (vgl. Teege) Ueber den Anfangsunterricht in der Differentialrechnung. — M. Brettar: Die zeichnerische Ermittlung der Konstanten eines Luftlichtbildes, sowie Herstellung des Grund- und Aufrisses von Geländepunkten bei unebenem Gelände. — E. Diehl: Die Brennpunktseigenschaften der Kegelschnitte, abgeleitet mit Hilfe der Kollineation. — H. Dörrie: Der Schenkel-Transversalensatz. — M. Ebner: Mathematische Lehrfilme. — A. Gottschalk: Zur Gruppierung der Vierecke. — K. Hahn: Die oszillatorische Entladung. — H. Hermann: Die Ermittlung der molekulären Grössenordnung im Unterricht. — A. Lanner: Ableitung der sphärischtrigonometrischen Formeln aus der darstellenden Geometrie. — W. Lietzmann: Die Stellung der Mechanik zwischen Physik und Mechanik. — Ph. Maennchen: Zur Entwicklung der mathematischen Erfindungsgabe. — H. Meurer: Herleitung der Lorentztransformation eines Längsabschnittes durch Vergleich der relativistischen mit den nichtrelativistischen Gleichungen des Dopplerprinzips. — A. Pröll: Das Flugzeug im Mechanikunterricht. — K. Siemon: Verallgemeinerung der Cardanischen Formel. — H. Teege: Ein Paradoxon der Gravitation. — Einfache Handregeln über die Wirkungen eines elektromagnetischen Feldes. — Bemerkung zur vorstehenden Abhandlung (vgl. Bögel). — H. Thorade: Freie und erzwungene harmonische Schwingungen (in elementarer Behandlung). — H. Wieleitner: Die Erbteilungsaufgaben bei Muhammed ibn Musa Alchwarazmi. — H. Willers: Die Spiegelung als primitiver Begriff im Unterricht. — Kleine Mitteilungen - Aufgaben - Repertorium - Berichte - Bücherbesprechungen.

Acta Litterarum ac Scientiarum, regiæ Universitatis hungaricæ francisco-josephinæ. Sectio scientiarum mathematicarum. Redigunt: A. Haar, F. Riesz. Tome 1, 1923. — M. Bauer: Ueber ein Problem von Dedekind. — Ueber die Erweiterung eines algebraischen Zahlkörpers durch Henselsche Grenzwerte. — Bemerkungen zur Theorie der Differente. — E. Egervary: On a maximum-minimum problem and its connection with the roots of equations. — M. Fekete: Ueber Zwischenwerte bei komplexen Polynomen. — Ueber Faktorenfolgen, welche die « Klasse » einer Fourierschen Reihe unverändert lassen. — A. Haar: Ueber eine Verallgemeinerung des Du Bois-Reymond'schen Lemma's. — Ueber die Konvergenz von Funktionenfolgen. — C. Jordan: On the Montmort-Moivre Problem. — B. Kerekjarto: Az analysis es geometria topologiai alapjairol. (Sur les fondements topologiques de l'analyse et de la géométrie.) — L. Klug: Einige Sätze über Kegelschnitte. — J. Kürschak: Ueber das identische Verschwinden der Variation. — Eine Verallgemeinerung von Moivres Problem in der Wahrscheinlichkeitsrechnung. — v. Sz. Nagy: Ueber die Lage der Wurzeln von linearen Verknüpfungen algebraischer Gleichungen. — v. Neumann: Zur Einführung der transfiniten Zahlen. — A. Ostrowski: Ueber die Bedeutung der Jensenschen Formel für einige Fragen der komplexen Funktionentheorie. — J. Pal: Zur Topologie der Ebene. — T. Rado: Zur Theorie der mehrdeutigen konformen Abbildungen. — Bemerkung zu einem Unitätssatze der konformen Abbildung. — Sur la représentation conforme de domaines variables. — Ueber die Fundamentalabbildung schlichter Gebiete. — G. Rados: Ein Satz über Kongruenzen höheren Grades. — F. Riesz: Sur le théorème de M. Egoroff et sur les

opérations fonctionnelles linéaires. — Sur les valeurs moyennes du module des fonctions harmoniques et des fonctions analytiques. — Sur les suites de fonctions analytiques. — M. Riesz: Sur la sommation des séries de Fourier. — Sur un théorème de la moyenne et ses applications. — Sur le problème des moments et le théorème de Parseval correspondant. — G. Szegö: Ueber die Tschebyscheffschen Polynome.

Acta Matematica. Tome 39. — G. Mittag-Leffler: Die ersten 40 Jahre des Lebens von Weierstrass. — H. Poincaré: Sur les fonctions fuchsiennes. — Correspondance d'Henri Poincaré et de Félix Klein. — G. Mittag-Leffler: Weierstrass et Sonja Kowalewski. — K. Weierstrass: Briefe an Paul du Bois-Reymond. — Briefe an L. Kœnigsberger, — Ueber Poincarés Theorie der Fuchsschen Funktionen. — Briefe an L. Fuchs. — Eine Aeusserung an Mittag-Leffler über das Dreikörperproblem.

Tome 44, Nos 2 à 4. — N. E. Nörlund : Mémoire sur le calcul aux différences finies. — P. Appell: Sur l'intégrale

$$\int_{x_0}^{x} f(y)\, d\, f(x)$$

où x et y sont liés par une relation symétrique. — P. Appell: Sur l'intégrale $\int \log(z - \lambda)\, d \log(z - \mu)$. — O. Ore: Zur Theorie der algebraischen Körper. — G. Kowalewski: Ueber Bolzanos nichtdifferenzierbare stetige Funktion.

Annales de l'Université de Grenoble. Tome XXXIV. — C. Sautreaux: Exposé des principes de la mécanique rationnelle.

Annales de la Société polonaise de Mathématique, dirigé par M. Stanislas Zaremba, Cracovie (Rocznik Polskiego Tow. Matematycznego). Tome I, année 1922. — Ce nouveau périodique publie des travaux de langue française, anglaise, italienne et allemande. Les mémoires de langue polonaise paraissent dans un supplément. Voici le sommaire du Tome I: S. Zaremba: Les fonctions réelles non analytiques et les solutions singulières des équations différentielles du premier ordre. — W Wilkosz: Sull'insieme dei valori che annullano una funzione analitica a più variabili complesse. — F. Leja: Sur la distribution des valeurs des fonctions analytiques dans leurs domaines d'existence. — Ed. Stamm: Connexione inter operationes arithmetica et logica. — A. Hoborski: Remarque relative aux transformations linéraires. orthogonales. — S. Kempisty: Sur les trois classifications des fonctions représentables analytiquement. — F. Leja: Sur les surfaces singulières des fonctions analytiques de deux variables complexes. — W. Wilkosz: Aspetto integrale delle curve inviluppi.

Annals of Mathematics. Vol. 23. — O. Veblen and P. Franklin : On matrices whose elements are integers. — O. E. Glenn: An algorism for differential invariant theory. — R. E. Moritz: The general theory of cyclic-harmonic curves. — J. W. Clawson: More theorems on the complete quadrilateral. — J. L. Walsh: A theorem on cross-ratios in the geo-

metry of inversion. — J. K. Whittemore: The condition for an isothermal family on a surface. — E. T. Bell: The reversion of class number relations and the total representation of integers as sums of squares or triangular numbers. — G. A. Miller: Note on the term maximal subgroup. — L. E. Dickson: Reducible cubic forms expressible rationally as determinants. — D. Jackson: Note on the Picard methode of successive approximations.— L. E. Dickson: A fundamental system of covariants of the ternary cubic form. — A. A. Bennett: The modular theory of polyadic numbers. — Id.: Some analogies in matric theory. — P. Franklin: Generalized conjugate matrices. — J. Lipka: Transformations of trajectories on a surface. — S. D. Zeldin: On the structure of finite continuous groups with one two-parameter invariant subgroup. — Id.: On the simplification of the structure of finite continuous groups with more than one two-parameter invariant subgroup. — J. H. M. Wedderburn: The automorphic transformation of a bilinear form. — O. Dunkel: A direct determination of the minimum area between a curve and its caustic. — A. Arwin: The Poisson integral and an analytic function on its circle of convergence. — H. R. Brahana: Systems of circuits on two-dimensional manifolds. — P. J. Daniell: Two generalizations of the Stieltjes integral. — G. E. Raynor: Dirichlet's problem. — O. C. Hazlett: Annihilators of modular invariants and convariants. — W. B. Carver: Systems of linear inequalities. — H. F. Mac Neish: Euler Squares. — J. Pierpont: Geometric aspects of Einstein's Theory. — H. J. Ettlinger: Cauchy's paper of 1814 on definite Integrals. — G. H. Cresse: Arithmetical deduction of Kronecker's class-number relations. — Pandit Oudh Upadhyaya: Cyclotomic heptasection for the prime 43. — T. H. Gronwall: Summation of double series. — B. M. Turner: On the positions of the imaginary points of inflexion and critic centers of a real cubic. — H.-L. Rietz: Frequency distributions obtained by certain transformations of normally distributed variates. — H. S. White: The associated point of seven points in space. — A. Arwin: Common solutions of two simultaneous Pell equations. — B. A. Bernstein: On the complete independence of Hurwitz's postulates for abelian groups and fields. — T. H. Gronwall: On power series with positive real part in the unit circle. — S. Lefschetz: Algebraic surfaces, their cycles and integrals. A correction.

Bulletin des Sciences Mathématiques. Tome XLVII. — P. Fatou: Sur le mouvement d'une planète dans un milieu résistant. — B. Niewenglowski: Une démonstration d'un théorème de Coriolis. — J. Mascart: Note relative à l'attraction d'un ellipsoïde. — B. Gambier: Réduction des systèmes algébriques de points appartenant à une même courbe algébrique. Théorème d'Abel. — P. Woronetz: Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles. — S. Lefschetz: Progrès récents dans la théorie des fonctions abéliennes. — B. Niewenglowski: Sur deux formules de Lagrange. — J. Plemelj: Sur l'abaissement du degré de l'équation modulaire. — M. Plancherel: Le passage à la limite des équations aux différences aux équations différentielles dans les problèmes aux limites. — G. Valiron: Sur un théorème de M. Hadamard. — H. Omont: Une lettre inédite de Descartes au Père Mersenne. — M. Plancherel: Démonstration du théorème de Riesz-Fischer et du théorème de Weyl sur les suites convergentes en moyenne. — H. Vergne: Mouvement d'un solide pesant

fixé par un point voisin de son centre de gravité. — G. Bouligand: Sur les modes de continuité de certaines fonctionnelles. — E. Picard: Pascal mathématicien et physicien. — G. Bertrand: Le problème de Dirichlet et le potentiel de simple couche.

Mathematische Annalen. 87. Band. — C. L. Siegel: Additive Theorie der Zahlkörper. — Id.: Neuer Beweis des Satzes von Minkowski über lineare Formen. — Van der Corput: Verschärfung der Abschätzung beim Teilerproblem. — Id.: Ueber Summen die mit den elliptischen $\mathcal{S}$-Funktionen zusammenhängen. — G. Rados: Ueber Kongruenzbedingungen der rationalen Lösbarkeit von algebraischen Gleichungen. — O. Perron: Einige elementare Funktionen, welche sich in eine trigonometrische, aber nicht Fouriersche Reihe entwickeln lassen. — G. Szegö: Tschebyscheffsche Polynome und nicht fortsetzbare Potenzreihen. — H. Rademacher: Einige Sätze über Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen. — Ch. H. Müntz: Allgemeine independente Auflösung der Integralgleichungen erster Art. — H. Tietze: Ueber ein Beispiel von L. Vietoris zu den Hausdorffschen Umgebungsaxiomen. — H. Beck: Ueber uneigentliche Somen. — H. Jonas: Untersuchungen über die als Gewebe bezeichneten Kurvennetze und über eine Reihe von Problemen, die mit der Verbiegung des gleichseitigen hyperbolischen Paraboloids zusammenhängen. — E. Study: Ueber S. Lie's Geometrie der Kreise und Kugeln. — A. Hammerstein: Elementarer Beitrag zur Variationsrechnung. — E. Kamke: Zum Waringschen Problem füt rationale Zahlen und Polynome. — P. Hertz: Axiomensysteme für beliebige Satzsysteme. I. Teil. Sätze ersten Grades. — F. Jüttner: Beiträge zur Theorie der Materie. — E. Trefftz: Schwingungsprobleme und Integralgleichungen. — L. Neder: Bemerkung zu einer Arbeit des Herrn Popoff.

88. Band. — A. Hurwitz: Ueber die Komposition der quadratischen Formen. — Id.: Ueber die Anzahl der Klassen positiver ternärer quadratischer Formen von gegebener Determinante. — K. Hentzelt: Zur Theorie der Polynomideale und Resultanten. — W. Krull: Algebraische Theorie der Ringe I. — H. Falckenberg: Zur Theorie der Kleinschen Ergänzungsrelationen. — O. Haupt: Zur Parametrixmethode. — D. Hilbert: Die logischen Grundlagen der Mathematik. — M. Fekete: Eine Bemerkung zu der Arbeit des Herrn Bieberbach « Ueber die Verteilung der Null- und Einsstellen analytischer Funktionen ». — H. Brandt: Ueber ein Problem von A. Hurwitz, quaternäre, quadratische Formen betreffend. — H. Falckenberg: Zur Theorie der Kleinschen Ergänzungsrelationen. — M. Fekete: Eine Bemerkung zu der Arbeit des Herrn Bieberbach « Ueber die Verteilung der Null- und Einstellen analytischer Funktionen ». — O. Haupt: Zur Parametrixmethode. — K. Hentzelt: Zur Theorie des Polynomideale und Resultanten. — D. Hilbert: Die logischen Grundlagen der Mathematik. — A. Hurwitz: Ueber die Komposition der quadratischen Formen. — Id.: Ueber die Anzahl der Klassen positiver ternärer quadratischer Formen von gegebener Determinante. — W. Krull: Algebraische Theorie der Ringe. — K. Petri: Ueber die invariante Darstellung algebraischer Funktionen einer Veränderlichen. — G. Polya: Bemerkungen über unendliche Folgen und ganze Funktionen. — C. L. Siegel: Additive Theorie der Zahlkörper. — E. Study: Ueber S. Lies Geometrie der Kreise und Kugeln. — H. Tietze: Beiträge zur allgemeinen Topologie. I. Axiome für verschiedene Fassungen des Umgebungsbegriffs.

89. Band. — H. Mohrmann: Die Flächen vierter Ordnung mit gewundener Doppelkurve. — V. Sz. Nagy: Ueber Kurven von Maximal-Klassenindex Ueber Kurven von Maximalindex. — P. Hertz: Ueber Axiomensysteme für beliebige Satzsysteme. II. Teil. Sätze höheren Grades. — K. Löwner: Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises. I. — K. Popoff: Ueber die Gewinnung summierbarer Polynomreihen aus summierbaren Fourierreihen. — O. Blumenthal: Bemerkung zu der Arbeit des Herrn Popoff «Ueber die Gewinnung summierbarer Potenzreihen aus summierbaren Fourier-Reihen ». — O. Haupt und E. Hilb: Oszillationstheoreme oberhalb der Stieltjesschen Grenze. — E. Artin: Ueber die Zetafunktion gewisser algebraischer Zahlkörper. — P. O. Upadhyaya: On a formula of transformation. — R. Courant: Zur Theorie der linearen Integralgleichungen. — G. Polya: Analytische Fortsetzung und konvexe Kurven. — G. Doetsch: Die Integrodifferentialgleichungen vom Faltungstypus. — Th. Pöschl: Ueber die ebene radiale Strömung eines Gases mit Berücksichtigung der Reibung. — Van der Corput: Neue zahlentheoretische Abschätzungen. — W. Scherrer: Zur Geometrie der Zahlen. — H. Mohrmann: Bestimmung aller algebraischen W-Kurven. — A. Comessatti: La curva razionale normale ed i suoi gruppi proiettivi. — E. Study: Ueber S. Lies Geometrie der Kreise und Kugeln. — H. Mohrmann: Bemerkung zu E. Studys Aufsatz: « Ueber S. Lies Geometrie der Kreise und Kugeln ».

Proceedings of the London Mathematical Society. Series 2. Vol. 21. — H. Hilton: On plane Curves of Degree $2n$ with Tangents having Bi-n-point Contact. — F. S. Macaulay: Note on the Resultant of a Number of Polynomials of the same Degree. — G. Polya: Sur les séries entières à coefficients entiers. — G. H. Hardy and J. E. Littlewood: The approximate Functional Equation in the Theory of the Zetafunction, with Applications to the Divisor-Problems of Dirichlet and Plitz. — W. H. Young: On a New Set of Conditions for a formula for an Area. — S. Banach: An Example of an Orthogonal Development whose sum is everywhere different from the developed Function. — E. K. Wakeford: Chords of Twisted Cubics. — H. F. Baker: Remarks on Mr. Wakeford's Paper. — W. P. Milne: Relation between Apolarity and Clebsch's Mapping of the Cubic Surface on a Plane. — F. V. Morley: An analytical Treatment of the 3-bar Curve. — W. H. Young: Integration over the Area of a Curve and Transformation of the Variables in a multiple Integral. — M. J Conran: Curvature and Torsion in Elliptic Space. — T. W. Chaundy: A Method of Solving certain Linear Partial Differential Equations. — B. M. Wilson: Proofs of some Formulæ enunciated by Ramanujan. — H. Bateman: On lines of electric induction and the conformal transformations of a Space of Four Dimensions. — A. C. Dixon: Expansions and Functions reduced to Zero by the Operator sinh D-cD. — W. F. Sheppard: Reciprocal Correspondence of Differences and Sums. — F. Lettenmeyer: Neuer Beweis des allgemeinen Kroneckerschen Approximationssatzes. — H. Bohr: Another Proof of Kroneckers Theorem. — J. E. Campbell: On a Class of Surfaces in Euclidean Space which generate an expression for the Space Time Interval in Einstein's Geometry of a particular form. — W. P. Milne: Relation between Apolarity and the Weddle Surface. — G. D. Sadd: On certain Types of plane unicursal sextic Curves. — Lt.-Col. A. Cunningham,

H. J. Woodall and T. G. Creak: On least primitive Roots. — H. Lamb: On Water Waves due to disturbance beneath the Surface. — W. P. Milne: Sextactic Cones and Tritangent Planes of the same System of a Quadri-Cubic Curve. — H. W. Turnbull: On the general invariant Theory of Quadrics. — B. M. Wilson: On the Manner of Divergence of the Legendre Series of an integralbe Function. — H. W. Richmond: On Analogues of Waring's Problem for rational Numbers. — R. L. Hippisley: Note on the Nodes of the 3-bar Sextic. — G. I. Taylor: A Relation between Bertrand's and Kelvins' Theorems of Impulses. — L. J. Mordell: On the Integer Solutions of the Equation $ey^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$. — J. L. Burchnall and T. W. Chaundy: Commutative ordinary differential Operators. — W. H. Young: On the Theory of Functions of two complex Variables. — S. Pollard: On the Conditions for Cauchy's Theorem. — T. Carleman: A Theorem concerning Fourier Series. — L. J. Mordell: A Trigonometric Series involving Algebraic Numbers.

Revue de Métaphysiquo et de Morale. 30me année. 1923. N° 1. — M. Winter: Le théorème de Pythagore. — N° 3. — L. Brunschwig: La relation entre la mathématique et la physique. — D. König: Sur un problème de la théorie générale des ensembles et la théorie des graphes.

Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften in Wien. 130. Band. 1921. — H. Hahn: Ueber irreduzible Kontinua. — L. Hofmann: Konstruktive Lösung der Massaufgaben im vierdimensionalen euklidischen Raum. — F. Mertens: Gleichungen, deren Gruppe eine Quaternionengruppe ist. — A. Tauber: Zur Integration der linearen Differentialgleichungen — Ueber den Zusammenhang von Integralen und Reihen. — Zur Integration der linearen Differentialgleichungen. — R. Weitzenböck: Ueber die Wirkungsfunktionen in der Weyl'schen Physik. — Zur vierdimensionalen Tensoranalysis.

131. Band. 1922. — E. Dolezal: Reihenumkehrung. Anwendung in der Ausgleichungsrechnung. — L. Eckhart: Ueber Flächen vierter Ordnung, deren Fallinien Kegelschnitte sind. — H. Hahn: Ueber die Lagrange'sche Multiplikatorenmethode. — F. Kottler: Newton'sches Gesetz und Metrik. — Maxwell'sche Gleichungen und Metrik. — E. Müller: Das Rechnen mit Faltprodukten in seiner Anwendung auf die Direktorkreise von Kegelschnitten. — A. Tauber: Zur Integration der linearen Differentialgleichungen.

3. Thèse de doctorat :

Nous signalons sous cette rubrique les thèses de doctorat dont un exemplaire imprimé aura été adressé à la Rédaction, 110 Florissant, *Genève*.

Allemagne. — *Université de Giessen.* — F. Dorr. — *Zur Invariantentheorie Mongescher Systeme gegenüber Berührungstransformationen.* (Mitteilungen des Mathematischen Seminars der Universität Giessen, XI. Heft). — 1 fasc. in-8° de 39 p.

Suisse. — *Université de Lausanne.* — J. Marchand. — *Etude géométrique des courbes apolaires à la paire ombilicale simple ou multiple.* — 1 fasc. in-8° de 117 p.

CARACTÈRES GÉNÉRAUX DE LA PENSÉE SCIENTIFIQUE DANS LA GRÈCE ANCIENNE [1]

PAR

Arnold Reymond (Neuchâtel).

Fille préférée de Zeus et déesse de la sagesse, inspirant la guerre, les sciences et les arts, Pallas Athéné fut, entre toutes les divinités, honorée et respectée par les Athéniens; le temple du Parthénon qui sur l'Acropole lui fut consacré symbolise, de nos jours encore, le génie du peuple grec dans ce qu'il a de plus pur. On se souvient de l'admirable prière que la vue de cet édifice inspira un jour à Renan: « O noblesse, ô beauté simple et vraie, déesse dont le culte signifie raison et sagesse, toi dont le temple est une leçon éternelle de conscience et de sincérité, j'arrive tard au seuil de tes mystères; j'apporte à ton autel beaucoup de remords. Pour te trouver, il m'a fallu des recherches infinies. L'initiation que tu conférais à l'Athénien naissant par un sourire, je l'ai conquise à force de réflexions, au prix de longs efforts. »

Cet hommage rendu à la déesse tutélaire d'Athènes exprime en termes émouvants le respect et la gratitude qu'inspire le formidable labeur de civilisation accompli par la Grèce antique. Quelques siècles à peine ont suffi à cette dernière non seulement pour réaliser une architecture et une statuaire incomparables, mais aussi pour créer tous les genres littéraires connus et pour

---

[1] Conclusion d'un ouvrage qui paraîtra prochainement chez Albert Blanchard, Paris, sous le titre: *Histoire des Sciences exactes et naturelles, sommaire des écoles et des principes*, avec une préface de M. L. Brunschvicg, membre de l'Institut.

jeter les bases éternelles de la plupart des sciences. Et, semble-t-il, c'est presque sans effort et sans tâtonnements que ces conquêtes furent faites, en vertu, comme le dit Renan, d'une initiation spontanée accordée par la raison à chaque Grec dès sa naissance. Comment en particulier la Grèce ancienne est-elle parvenue à rompre des habitudes d'esprit millénaires et à concevoir dans la réalité des liaisons d'un caractère scientifique ?

Comparée aux connaissances empiriques et fragmentaires que les peuples de l'Orient avaient recueillies avec effort et durant de longs siècles, la science grecque constitue un véritable miracle. Avec elle l'esprit humain entrevoit pour la première fois la possibilité d'établir un nombre restreint de principes et d'en déduire un ensemble de vérités qui en sont la conséquence rigoureuse.

Par delà les données fuyantes de la sensation, les Grecs ont cherché un ensemble de liaisons qui s'imposent à l'esprit comme fondées en fait et en droit. Ils ont, les premiers, mis en lumière les articulations de la pensée et du langage et marqué une différence entre le raisonnement et les données sur lesquelles celui-ci s'appuie.

Ce travail, commencé par Parménide et par les sophistes, fut poursuivi par Socrate et Platon, pour être achevé par Aristote. Parménide, en effet, entrevoit un domaine de la vérité que l'opinion ne peut ébranler; les sophistes jettent les bases de la grammaire; Socrate établit le rapport qui existe entre l'idée générale et les idées particulières que celle-ci renferme. Platon distingue dans l'activité de la pensée deux procédés dialectiques, l'un qui va des hypothèses aux conséquences, l'autre qui des hypothèses remonte jusqu'aux principes qui les justifient; Aristote, enfin, coordonne dans l'imposant édifice de sa logique les résultats obtenus jusqu'à lui. Dans aucune autre civilisation et chez aucun autre peuple nous ne trouvons une semblable analyse, systématique et rationnelle, de la pensée humaine.

Grâce à cette analyse les Grecs furent conduits à envisager dans toute science une matière et une forme. La première varie avec l'objet, propre à chaque science; la deuxième se retrouve dans tout système de connaissances raisonnées.

Par la forme une conséquence est rattachée à son principe d'une façon nécessaire, de même qu'un fait particulier est relié à sa cause.

Quant à leur matière les objets de la science peuvent être classés en deux groupes, suivant qu'ils relèvent directement ou non de l'observation sensible.

Lorsque l'objet ne relève pas directement de la sensation, comme c'est le cas des êtres mathématiques, la science peut se constituer rigoureusement grâce à un ensemble de notions premières dont on tire les conséquences au moyen d'une déduction raisonnée. Il faut pour cela que ces notions premières soient aussi logiques et aussi peu nombreuses que possible. L'esprit domine alors et la matière et la forme de la science, puisque celle-là ne renferme aucun élément étranger à la raison.

Les sciences qui reposent sur l'observation sensible présentent de même que les mathématiques une opposition entre la forme et la matière, entre un ensemble de données et une suite de raisonnements établis sur ces données. Mais ici la matière est fournie par les éléments individuels que nous révèle la sensation et qui peuvent être groupés suivant le genre, l'espèce, etc. auxquels ils appartiennent. Pour établir cette classification, il faut tout d'abord recourir à des raisonnements analogiques fondés sur l'observation; mais, une fois les classements opérés, un syllogisme déductif permet d'assigner à chaque chose sa place dans l'univers.

Pour les Grecs il n'y a donc pas opposition radicale entre le syllogisme inductif et le syllogisme déductif. Lorsque possédant la science nous raisonnons par déduction, nous reproduisons l'ordre de la nature qui crée les individus en fonction du genre et de l'espèce dont ils dépendent. Mais en fait et pour acquérir la science nous devons partir d'observations particulières et avoir recours au syllogisme inductif. « L'homme, le cheval, le mulet vivent longtemps. Or, l'homme, le cheval, le mulet sont des animaux sans fiel. Donc les animaux sans fiel vivent longtemps. »

L'opposition qui dans les temps modernes a été marquée entre l'induction et la déduction n'est pas fondée en nature pour l'aristotélisme. L'unité des deux perspectives qui, du point de

vue de la réflexion critique, paraissent incompatibles est assurée chez Aristote par le renversement entre l'ordre de la connaissance progressivement acquise et l'ordre de l'être « entre l'ordre pour nous et l'ordre en soi. « Suivant une formule remarquable de l'Ethique à Nicomaque (1112. *b* 23): »

Τὸ ἔσχατον ἐν τῇ ἀναλύσει, πρῶτον ἐν τῇ γενέσει[1].

Les sciences qui reposent sur l'observation sensible ont ainsi pour objet de découvrir la classification et les hiérarchies naturelles des phénomènes les uns par rapport aux autres. Elles ont pour tâche essentielle de grouper extensivement et compréhensivement les concepts auxquels ces phénomènes répondent. La causalité physique qui justifie ce groupement est imprégnée de finalité et ne saurait comporter des relations quantitatives absolues, sauf rares exceptions.

Il y a donc pour les Grecs un fossé entre les sciences mathématiques et les sciences physiques ou naturelles et nous ne croyons pas qu'à leurs yeux ce fossé pût jamais être comblé. Voici pourquoi, semble-t-il.

Les sciences dont les données sont fournies exclusivement par la sensation ont pour objet des corps qui, les astres exceptés, sont soumis à la naissance, à la mort et à des mouvements forcés. Ces corps, en outre, obéissent à une causalité qui déploie ses effets dans le temps en vertu d'une finalité inhérente à la nature. En tant qu'individus ils ne réalisent jamais que d'une façon imparfaite la forme vers laquelle ils aspirent. Entre la forme et la matière il ne peut par conséquent exister un rapport adéquat, mathématiquement mesurable, et du point de vue logique des obscurités subsistent. La nature sans doute tend à être pénétrée de rationnalité; mais cette pénétration n'est jamais absolue et à cause de la résistance que la matière oppose les êtres individuels ne sont jamais que des exemplaires imparfaits de la forme.

[1] L. Brunschvicg. *L'expérience humaine et la causalité physique*, p. 157. Alcan, Paris 1922.

Les relations numériques et spatiales telles que l'arithmétique et la géométrie les conçoivent présentent un tout autre caractère, car ce sont des relations éternelles, indépendantes du temps, du lieu physique et des circonstances. Si même, comme le pensait Aristote, les êtres mathématiques ont été dégagés, peu à peu et par abstraction, du monde sensible, ils se présentent, une fois obtenus par ce procédé, sous une forme parfaite et immuable. Cela étant, les individus mathématiques reproduisent exactement le genre et l'espèce dont ils font partie. Tout triangle isocèle, qu'il soit petit ou grand, possède au complet et parfaitement les propriétés du triangle isocèle, en ce sens qu'ayant deux côtés égaux il a forcément deux angles égaux. Il n'y a pas de progrès à réaliser dans le temps pour que les êtres mathématiques atteignent leur forme parfaite. La relation abstraite qui les constitue est éternelle, ou plutôt c'est une relation intemporelle de principes à conséquences, dans laquelle causalité efficiente et causalité finale se trouvent fondues par un acte indivisible de l'esprit.

Ce fait conditionne la nature des notions et de la démonstration mathématiques de la façon suivante:

Les propositions premières (axiomes. définitions, postulats) doivent éviter de faire appel aux notions obscures de l'intuition sensible telles que la divisibilité dichotomique indéfinie et le rapport du mouvement à l'espace.

Il faut, d'autre part, dans la démonstration géométrique utiliser surtout des procédés statiques et considérer comme étrangères à la science pure les constructions qui résultent de la rencontre de deux lignes en mouvement.

De même en matière d'intégration le passage à la limite ne peut être directement effectué. Il faut se borner à montrer qu'une aire curviligne est comprise entre deux aires rectilignes dont les surfaces diffèrent d'une quantité aussi petite que l'on veut. Un cercle, par exemple, est compris entre la surface croissante d'un polygone inscrit et la surface décroissante d'un polygone circonscrit.

Etant donné leur caractère les sciences mathématiques seules réalisent le type de la science axiomatique rêvé par les Grecs, à savoir un ensemble de principes qui satisfont à la logique

et dont les conséquences rigoureuses sont assurées par une déduction raisonnée.

Aussi les sciences physiques et astronomiques dans la mesure où elles ont cherché à réaliser cet idéal ont-elles été obligées de limiter le champ de leurs investigations.

L'astronomie, par exemple, confondue tout d'abord avec la météorologie s'en dégage et tente avec les Pythagoriciens d'unir la physique et les mathématiques. Cet effort n'ayant qu'imparfaitement abouti,on voit surgir un divorce entre la mécanique des corps célestes impérissables et celle des corps terrestres soumis à la génération et à la mort. L'astronomie attribue alors aux corps célestes un mouvement circulaire et elle borne son ambition à une représentation géométrique de leur marche dans le ciel. Peu importe du reste que cette représentation soit physiquement réalisable. Il suffit qu'elle rende compte des apparences révélées par les phénomènes célestes. Cela étant, l'axiomatique est satisfaite, car le mouvement circulaire est le seul mouvement régulier et périodique qui soit logiquement concevable pour un corps abandonné dans l'espace. En effet, si ce corps ne se mouvait pas circulairement, ou bien il partirait par la tangente et s'éloignerait à l'infini, ce qui est impossible dans un univers limité; ou bien il tomberait au centre de l'univers, et tout serait immobile, ce qui est contraire aux apparences.

Des remarques analogues s'appliquent à la mécanique. En désirant constituer cette science sur un type axiomatique analogue à celui qui caractérise les Eléments d'Euclide, Archimède restreignit ses études à la statique. Ce faisant, il crut trouver dans un principe purement logique, à savoir le principe de symétrie, une base suffisante à la loi du levier et de l'équilibre des corps. S'il n'a pas tenté de fonder la dynamique, c'est probablement par crainte de devoir recourir à une intuition sensible confuse. L'étude d'un corps en mouvement implique les notions de continuité, de divisibilité indéfinie dans le temps et dans l'espace, notions qui restent en un sens réfractaires à la logique.

Aristote fut plus hardi; mais ses thèses dynamiques sont obscurcies par une idée de la force empruntée à des conceptions biologiques.

Ainsi orientée la science grecque devait fatalement aboutir à une impasse.

Le champ tout d'abord qu'elle assigne aux mathématiques est trop restreint et trop arbitraire, puisque les courbes dites mécaniques en sont exclues. Ensuite et dans les limites ainsi tracées les démonstrations se compliquent de plus en plus par crainte d'un appel direct à l'infini. Sans doute l'emploi indirect de ce dernier offre des avantages inappréciables au point de vue de la rigueur démonstrative; mais il est d'un maniement difficile et incommode; il manque de généralité et nécessite dans son application progressive des constructions géométriques de plus en plus compliquées.

Cette défiance vis-à-vis de l'infini, déjà si grande en matière d'intégration, se manifeste encore et surtout en ce qui concerne l'espace géométrique. Les Grecs se sont refusé à concevoir ce dernier comme infini. Par conséquent, ils n'ont jamais imaginé comme possible l'existence géométrique de points et de droites rejetés à l'infini. On sait cependant combien ces notions ont vivifié la géométrie moderne; elles ont rendu possibles des généralisations, des simplifications dont les Anciens n'avaient aucune idée.

Dans une tout autre direction les sciences physiques et naturelles se trouvaient également arrêtées dans leur développement. En effet, la conception finaliste qu'Aristote place à leur base se heurte à une difficulté que M. Brunschvicg souligne avec netteté. La formule aristotélicienne laisse l'esprit indécis entre deux directions contraires: immanence et transcendance. « D'une part, les êtres se développent en réalisant la forme propre qui leur est inhérente, qui est eux-mêmes en ce que leur réalité a d'intime et de spécifique. D'autre part, cette réalisation suppose, en chacun d'eux cependant, une aspiration à dépasser son état actuel, qui ne peut pas s'expliquer tout entière sans un attrait vers une fin supérieure et, en une certaine mesure, extérieure. Le monde des spontanéités vivantes constitue une hiérarchie tournée vers Dieu et dont Dieu lui-même, sans qu'il se tourne vers le monde, est pourtant le principe, le moteur initial. La doctrine de la causalité au point où l'a conduite l'élaboration aristotélicienne, oscille entre deux tendances qui, développées

chacune pour soi-même, aboutiraient à deux visions antagonistes de Dieu et de l'univers [1]. »

La conception que les Grecs se sont faite de la science axiomatique est certes très remarquable, puisqu'elle habitue l'esprit à être très exigeant en matière de preuves et de démonstrations. Elle témoigne cependant d'une prudence et d'une timidité exagérées. Non seulement elle entrave le développement des mathématiques, mais elle se révèle presque impraticable dans le domaine des sciences physiques, car les bases qu'elle assigne à la recherche scientifique dans ce domaine se trouvent trop étroites pour supporter des notions tirées de l'expérience, comme celles de mouvement, de continuité et de divisibilité indéfinie.

Or ces notions apparaissent inévitablement le jour où la réalité est serrée de plus près. Dès lors un problème capital se pose. Comment les savants de la Renaissance ont-ils réussi à combler le fossé qui pour les Grecs était creusé entre la physique et les mathématiques ? Comment sont-ils parvenus à concilier les exigences posées par l'axiomatique grecque avec les données non moins impérieuses de l'expérience ?

A cette question on peut, semble-t-il, répondre en quelques mots de la façon suivante:

La science grecque comporte, comme nous l'avons vu, deux exigences:

1° Un enchaînement rigoureux de propositions;

2° Un ensemble de notions qui sert de base à cet enchaînement et dont la vérité logique s'impose à l'esprit.

De ces deux exigences, les savants de la Renaissance maintiennent intégralement la première mais ils modifient en partie la seconde.

L'enchaînement des propositions dans toute science doit être rigoureux. Sur ce point aucune contestation n'est possible.

Seulement les notions premières (axiomes, définitions) qui servent de base à la déduction raisonnée ne sont pas nécessairement translucides à la logique; pour être valables, il suffit qu'elles soient constamment vérifiées par l'expérience. Nous ne

---

[1] *L'expérience humaine et la causalité physique*, p. 158.

savons pas, par exemple, ce qu'est le mouvement en soi; mais si nous pouvons le décomposer en certains éléments, et si cette décomposition est utile et rend compte des faits observés, nous pouvons l'introduire dans les notions premières.

En procédant de cette manière, les savants de la Renaissance ont réussi à constituer une science qui fût à la fois rationnelle et expérimentale. Assouplir les notions mathématiques de manière à les adapter à l'interprétation des faits mécaniques et physiques, créer un type de loi qui tout en permettant des déductions rigoureuses exprime les liaisons réelles des phénomènes, tel a été le but qu'ils ont poursuivi plus ou moins consciemment. La tâche était immense et pour la mener à bien il fallut surmonter des difficultés qui semblaient inextricables.

Ces difficultés vaincues, on put croire que la voie était définitivement ouverte et qu'il suffirait de s'y avancer sans avoir à craindre de rencontrer des obstacles infranchissables. Et de fait jusqu'au commencement du XXe siècle la conception que s'était faite de la loi scientifique le savant de la Renaissance ne fut pas sérieusement ébranlée. D'après cette conception il existe à la base de toute sceince des principes à la fois rationnels et expérimentaux qui une fois découverts sont éternellement vrais et ne sauraient se modifier. Par suite, c'est uniquement dans l'application de plus en plus étendue de ces principes que résidera le progrès des sciences dans tous les domaines.

On sait comment la théorie de la relativité énoncée par Einstein et défendue par Langevin est venue ébranler cette manière de voir et mettre en échec certains postulats de la cinématique newtonienne. Chose curieuse, l'abandon partiel des conceptions formulées au XVIe et au XVIIe siècles marque en même temps un retour à plusieurs des positions prises par la science grecque dans l'antiquité; ce retour est d'autant plus significatif qu'il n'a pas été prémédité. Ce qui est certain en tout cas, ce sont les analogies que l'on peut établir tant au point de vue des hypothèses que des méthodes entre la physique de la relativité et la cosmologie des anciens Grecs.

Les premiers philosophes de l'Ionie ne distinguent pas entre

un espace vide qui aurait une existence en soi et un fluide matériel (air, eau, ou feu) qui le remplirait accidentellement. Pour eux les propriétés physiques de l'espace ne se séparent pas de l'espace comme tel. Dans la physique de la relativité il en va de même, sous une forme, est-il besoin de le dire, infiniment plus complexe et plus justifiée. Ce sont des propriétés gravifiques et électromagnétiques qui en chaque région confèrent à l'espace ses qualités géométriques (courbure, genre possible de triangles, etc.).

Cela étant il ne peut y avoir un système universel de référence, donné une fois pour toutes et auquel on pourra rapporter l'étude d'un groupe de phénomènes localisés n'importe où dans l'univers. Le système de référence doit être dans chaque cas intrinsèque au groupe des phénomènes étudiés, ce qui nécessite l'emploi du calcul tensoriel et du calcul différentiel absolu. Comme le fait remarquer M. G. Juvet, « la caractéristique de ces méthodes provient de ce qu'elles permettent de faire l'étude d'un être géométrique à un point de vue purement intrinsèque. Les Grecs ne faisaient pas de géométrie autrement; lorsqu'ils cherchaient les propriétés d'une figure, c'était toujours en scrutant la figure elle-même, considérée en soi et prise indépendamment de tout système de référence [1]. »

On le voit. Pour la géométrie grecque de même que pour l'algorithme relativiste les relations d'une figure se suffisent à elles-mêmes et, bien qu'elles puissent être étudiées au moyen d'une méthode et de formules universelles, il n'est pas nécessaire pour cela de les rapporter à un système de coordonnées qui leur est extérieur comme dans la géométrie cartésienne.

On sait en outre que l'univers de la physique relativiste tout en se prêtant à des considérations infinitistes reste, en vertu de sa courbure, fini dans ses dimensions. Or, ainsi que nous l'avons vu, la thèse finitiste est caractéristique de l'astronomie grecque. Comme nous l'avons signalé également, Empédocle émettait au sujet de l'univers considéré comme fini une idée rappelant celle des étoiles-fantômes; il déclarait en effet que le soleil n'a pas d'existence propre et qu'il est formé par une simple concentra-

---

[1] G. JUVET. *Introduction au Calcul tensoriel.* A. Blanchard, Paris, 1922.

tion de rayons lumineux qui, réfléchis sur la terre, sont ensuite arrêtés par la voûte céleste.

Une autre analogie non moins intéressante à marquer est la suivante:

Le théorème dit de Pythagore est à la base des premières spéculations de la géométrie grecque; c'est lui qui fit surgir le problème des incommensurables et qui, indirectement, donna naissance à la dialectique de Zénon. Or cette dialectique roule essentiellement sur la difficulté que voici: l'espace selon les Grecs est une réalité objective qui est posée comme immobile. Comment dès lors concevoir le rapport d'un objet mobile tel qu'une flèche avec cet espace immobile ?

On sait que la difficulté d'où est née la physique de la relativité et que l'expérience Michelson-Morley, entre autres, a mise en pleine clarté est tout à fait analogue. Une source lumineuse selon qu'elle est immobile ou en mouvement devrait se comporter différemment par rapport à l'éther jugé immobile. Or en fait, semble-t-il, il n'en est rien. Comment expliquer la chose ? C'est ici qu'interviennent la notion d'un intervalle spatio-temporel et l'expression quadratique

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2 ,$$

laquelle n'est qu'une forme généralisée du théorème de Pythagore.

Sans rechercher quelle est la portée métaphysique et l'utilisation pratique de cette fusion de l'espace et du temps, le fait capital subsiste. C'est que, envisagée dans son aspect théorique, la Physique de la relativité est une tentative remarquable de constituer une axiomatique en tous points comparable à celle d'Euclide. Seulement cette tentative ne vise pas à fonder le champ d'une mathématique séparée de la réalité; elle tend à fusionner dans un tout les propriétés géométriques, mécaniques et physiques de l'univers. Evidemment, ainsi que le remarque justement M. Winter, une pareille axiomatique ne peut avoir la prétention de créer logiquement et à priori le monde réel en dehors de toute expérience; elle ne peut être qu'analytique, c'est-à-dire élaborer le groupe d'axiomes nécessaires et suffisant à l'explication des phénomènes

réels[1]. Ainsi comprise l'analyse axiomatique cherche à substituer aux notions intuitives et expérimentales, souvent confuses, des idées claires et distinctes. Par là elle se trouve prolonger non seulement la méthode de Descartes, mais aussi celle de la science grecque. Dès lors la conclusion suivante semble s'imposer:

En même temps qu'elle retourne aux données immédiates de l'expérience sensible, la physique de la relativité cherche à les axiomatiser et c'est pourquoi elle se rencontre avec les tendances à la fois réaliste et logique des penseurs grecs de l'antiquité.

LA PÉDAGOGIE DES THÉORIES D'EINSTEIN

PAR

A. Buhl (Toulouse).

L'*Enseignement mathématique* n'ayant publié jusqu'ici qu'un excellent mais unique article sur les théories relativistes, celui de M. T. Levi-Civita (t. XXI, 1920, pp. 5–28), il m'est venu à l'idée de faire, à mon tour, un exposé, *très bref* et *purement pédagogique*, répondant d'abord à la préoccupation suivante: *Comment un professeur d'Analyse infinitésimale ou de Mécanique rationnelle peut-il, sans changer essentiellement son cours et en un petit nombre de leçons, exposer la Gravifique einsteinienne ?*

Cette préoccupation me paraît devoir exister surtout en France où les cours de Physique mathématique n'abondent pas et où un professeur, surtout dans les Facultés de province, ne se sent pas toujours absolument libre d'enseigner à sa fantaisie et selon ses travaux personnels.

Parmi les causes qui m'ont amené à enseigner les théories nouvelles, je dois faire une place importante à la simple curiosité des élèves. Et je ne parle pas seulement des miens. Dans l'enseignement secondaire, des collègues ont été aussi harcelés de

[1] *Revue de Métaphysique et de Morale*. Le théorème de Pythagore, p. 23, année 1923.

questions, souvent sous la pression des parents qui, à force de rencontrer Einstein dans la presse quotidienne, engageaient leur fils à rapporter des éclaircissements du Collège ou du Lycée. Bien des professeurs ont été embarrassés et, comme ma mission est surtout de former des professeurs, j'ai entrepris d'éclairer les candidats au professorat.

Je crois l'avoir fait en donnant l'impression de la facilité.

Un point de vue, qui me semble très élémentaire, consiste à rattacher l'électromagnétisme et la gravifique aux principes mêmes de l'Analyse, aux formes différentielles, aux déterminants fonctionnels, bref à toutes ces choses qui naissent immédiatement dès que l'on tente de transformer des intégrales. Un cours classique dans lequel on introduit la Physique mathématique, sous de telles espèces, n'en est pas plus altéré que celui de M. E. Picard par les développements concernant le potentiel newtonien ou que celui de M. P. Appell par le chapitre concernant les formules de Stokes et de Green.

Irais-je jusqu'à laisser croire que je m'imagine que l'exposé qui suit doit être considéré comme un modèle ? Nullement ! Nous croyons, au contraire, M. Fehr et moi, que cet article doit jouer surtout un rôle d'amorce et en appeler d'autres, autant que possible dans les mêmes conditions de brièveté, articles à provenir de collègues qui se seront également trouvés dans les conditions ci-dessus indiquées et dont les expériences personnelles, en s'ajoutant, conduiront à de nouveaux exposés de plus en plus simples et intéressants.

Disons aussi que nous accueillerons avec plaisir les auteurs qui, sans faire un exposé général, nous enverrons des remarques ou notes qui pourront être insérées dans la Chronique ou la Correspondance de la *Revue*.

I. — Identités et Formules stokiennes fondamentales.

Les identités fondamentales dont il s'agit peuvent être considérées comme exprimant des principes fondamentaux du Calcul intégral ; ce sont

$$\int_C X dY = \int\int_A dX\,dY\,, \qquad \int\int_S X dY dZ = \int\int\int_V dX\,dY\,dZ\,. \quad (1)$$

Par des changements de variables et des combinaisons linéaires des nouvelles identités obtenues, on obtient des formules qui généralisent la formule de Stokes ordinaire, qui existent dans tous les hyperespaces et que je désigne sous la dénomination générale de *formules stokiennes*. La première identité (1), dans l'espace E_4 à quatre dimensions, donne

$$\int_C \sum P_i \, dx_i = \int\int_A \frac{\Delta_1 \, dx_1 \, dx_2}{\dfrac{\partial (F, G)}{\partial (x_3, x_4)}} \tag{2}$$

en posant

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F}{\partial x_2} & \dfrac{\partial F}{\partial x_3} & \dfrac{\partial F}{\partial x_4} \\ \dfrac{\partial G}{\partial x_1} & \dfrac{\partial G}{\partial x_2} & \dfrac{\partial G}{\partial x_3} & \dfrac{\partial G}{\partial x_4} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} & \dfrac{\partial}{\partial x_4} \\ P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \end{vmatrix}.$$

La variété A, d'équations $F = 0$, $G = 0$, a deux dimensions dans E_4; elle est déformable dans cet espace en conservant toutefois une frontière C invariable.

De même la seconde identité (1) donne, dans E_4,

$$2\int\int_S \sum M_{ij} \, dx_i \, dx_j = \int\int\int_V \frac{\Delta_2 \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3}{\dfrac{\partial F}{\partial x_4}} \tag{3}$$

en posant

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F}{\partial x_2} & \dfrac{\partial F}{\partial x_3} & \dfrac{\partial F}{\partial x_4} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} & \dfrac{\partial}{\partial x_4} \\ M_{1\omega} & M_{2\omega} & M_{3\omega} & M_{4\omega} \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

La variété V, d'équation $F = 0$, a trois dimensions dans E_4; elle est déformable dans cet espace en conservant toutefois une frontière S, à deux dimensions, invariable.

Le mineur

$$\begin{vmatrix} M_{i\omega} & M_{j\omega} \\ i & j \end{vmatrix} = M_{ij} - M_{ji} = 2M_{ij} .$$

Nous rencontrerons d'autres développements de déterminants à effectuer de manière analogue; l'indice ω sera dit *indice de substitution.*

Dans le premier membre de (3), l'assemblage d'indices ij conduit à *six* termes en 12, 13, 14, 23, 24, 34. On a toujours

$$M_{ii} = 0 .$$

En résumé, *nous partons des identités* (1) *ou bien*, ce qui n'est pas dire plus mais ce qui est plus explicite, *de deux formes différentielles*

$$\sum P_i dx_i , \qquad \sum M_{ij} dx_i dx_j \tag{4}$$

l'une linéaire, l'autre bilinéaire. C'est tout ce dont nous avons besoin, au point de vue des fondements essentiels, pour établir les formules générales de l'électromagnétisme et de la gravifique.

II. — Dérivées en D. — Déplacements parallèles. Géodésiques.

Fixons notre attention sur les deux dernières lignes du déterminant Δ_1; d'ailleurs ce que nous avons à dire s'appliquerait tout aussi bien aux mineurs à extraire de la matrice

$$\begin{Vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial}{\partial x_n} \\ P_1 & P_2 & \cdots & P_n \end{Vmatrix} . \tag{5}$$

Soit l'égalité

$$\begin{vmatrix} \dfrac{D}{Dx_i} & \dfrac{D}{Dx_j} \\ P_i & P_j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_i} & \dfrac{\partial}{\partial x_j} \\ P_i & P_j \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \Gamma^{\alpha}_{i\omega} & \Gamma^{\alpha}_{j\omega} \\ {}_iP_{\alpha} & {}_jP_{\alpha} \end{vmatrix} . \tag{6}$$

Le déterminant en ∂ est l'un des mineurs de (5) ; le dernier

déterminant, comme on le concevra sans peine, est à développer en

$$\Gamma_{ij}^{\alpha} P_{\alpha} - \Gamma_{ji}^{\alpha} P_{\alpha} ,$$

ce qui est identiquement nul si

$$\Gamma_{ij}^{\alpha} = \Gamma_{ji}^{\alpha} . \tag{7}$$

Cette hypothèse (7) sera toujours maintenue.

Donc, dans (6), rien ne généralise *le déterminant en* ∂; mais ceci n'empêche pas qu'en développant les trois déterminants de (6) on a, par considération des termes homologues et *par définition, des dérivées, en* D, *de composantes vectorielles* P_j,

$$\frac{DP_j}{Dx_i} = \frac{\partial P_j}{\partial x_i} - \Gamma_{ij}^{\alpha} P_{\alpha} . \tag{8}$$

A la formule (6) on peut immédiatement associer

$$\begin{vmatrix} \frac{D}{Dx_i} & \frac{D}{Dx_j} \\ P^i & P^j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_i} & \frac{\partial}{\partial x_j} \\ P^i & P^j \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \Gamma_{i\alpha}^{\omega} & \Gamma_{j\alpha}^{\omega} \\ {}^{i}P^{\alpha} & {}^{j}P^{\alpha} \end{vmatrix} \tag{9}$$

d'où, de même et *par définition, des dérivées, en* D, *d'autres composantes* P^j,

$$\frac{DP^j}{Dx_i} = \frac{\partial P^j}{\partial x_i} + \Gamma_{i\alpha}^{j} P^{\alpha} . \tag{10}$$

Cette fois le dernier déterminant de (9) n'est pas nul ce qui est une des raisons qui font distinguer les P^j des P_j. Mais (10) va cependant se justifier tout aussi bien que (8).

Formons

$$P^j \frac{DP_j}{Dx_i} + P_j \frac{DP^j}{Dx_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}(P^j P_j) - \Gamma_{ij}^{\alpha} P_{\alpha} P^j + \Gamma_{i\alpha}^{j} P^{\alpha} P_j .$$

Les deux derniers termes du second membre de cette égalité se détruisent *si* α *et* j *sont considérés à la fois comme des indices de sommation.*

Donc les dérivées en D, (8) et (10), sont des dérivées partielles

généralisées possédant déjà au moins deux propriétés essentielles:

1° *On n'altère pas la première formule stokienne si, dans* Δ_1, *on remplace les* ∂ *par des* D;

2° *On n'altère pas la formule*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(P^j P_j) = P^j \frac{\partial P_j}{\partial x_i} + P_j \frac{\partial P^j}{\partial x_i} \qquad (11)$$

si, dans le second membre, on remplace les ∂ *par des* D.

Bien entendu, il reste acquis, une fois pour toutes, que les α sont indices de sommation dans les formules (8) et (10) et même que tout indice qui figure deux fois dans un même terme est indice de sommation.

En (11) apparaît pour $P^j P_j$ une propriété qui est aussi bien vraie pour $P^j Q_j$, comme on le vérifie immédiatement; de telles expressions sont des *invariants* en Calcul tensoriel.

Les équations

$$\left\{\begin{aligned} \frac{DP_j}{Dx_i} dx_i &= dP_j - \Gamma^\alpha_{ij} P_\alpha dx_i = 0 \ , \\ \frac{DP^j}{Dx_i} dx_i &= dP^j + \Gamma^j_{i\alpha} P^\alpha dx_i = 0 \ , \end{aligned}\right. \qquad (12)$$

manifestement construites à partir de (8) et (10), sont celles du *déplacement parallèle* de Weyl, Levi-Civita, Eddington. On pourrait déjà songer à préciser la nature des fonctions Γ^α_{ij} mais ce n'est pas encore indispensable; au contraire, ces fonctions, qui sont au nombre de $\frac{n^2(n+1)}{2}$ dans E_n, c'est-à-dire de 40 dans E_4, tendent à servir de base, actuellement, à une gravifique généralisée en laquelle il convient de les laisser d'abord indéterminées.

Si, dans la seconde équation (12), on imagine que la composante vectorielle P^j soit le déplacement infinitésimal dx_j, cette équation devient

$$d^2 x_j + \Gamma^j_{\alpha i} dx_\alpha dx_i = 0 \ . \qquad (13)$$

C'est celle des *géodésiques*. Là encore, bien entendu, ce ne seront les géodésiques de variétés géométriques, au sens habituel

du mot, que quand les fonctions Γ seront convenablement déterminées mais il n'en est pas moins fort remarquable que *la forme* des équations des géodésiques, *la forme* des équations du déplacement parallèle, *la forme* des dérivées en D, sont *des formes* contenues implicitement dans la matrice (5), c'est-à-dire, si l'on veut, dans la notion de tourbillon euclidien ou, ce qui revient au même, dans la formule stokienne (2) issue elle-même de la première identité (1).

III. — Champ électromagnétique général.

Prenons maintenant la seconde formule stokienne, c'est-à-dire (3). Il y a deux circonstances, absolument distinctes, qui rendent nul Δ_2 et, par suite, les deux membres de la formule.

1° On n'impose d'abord aucune condition aux M_{ij} mais $\Delta_2 = 0$ a lieu par choix de la variété V, c'est-à-dire de la fonction F qui satisfait alors à une équation aux dérivées partielles, du premier ordre, linéaire et homogène. Les équations des caractéristiques sont

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_2}M_{34} + \frac{\partial}{\partial x_3}M_{42} + \frac{\partial}{\partial x_4}M_{23} &= -\rho V_{x_1}, \\ \frac{\partial}{\partial x_3}M_{41} + \frac{\partial}{\partial x_4}M_{13} + \frac{\partial}{\partial x_1}M_{34} &= \rho V_{x_2}, \\ \frac{\partial}{\partial x_4}M_{12} + \frac{\partial}{\partial x_1}M_{24} + \frac{\partial}{\partial x_2}M_{41} &= -\rho V_{x_3}, \\ \frac{\partial}{\partial x_1}M_{23} + \frac{\partial}{\partial x_2}M_{31} + \frac{\partial}{\partial x_3}M_{12} &= \rho, \end{aligned}\right. \tag{14}$$

en posant

$$V_{x_1} = \frac{dx_1}{dx_4}, \qquad V_{x_2} = \frac{dx_2}{dx_4}, \qquad V_{x_3} = \frac{dx_3}{dx_4}$$

et en désignant par ρ un facteur de proportionnalité.

Les équations (14) constituent le *premier groupe des équations de Maxwell-Lorentz généralisées.* Elles correspondent à un E_4 qui contient des V_3 spéciales.

2° On obtient $\Delta_2 = 0$ en annulant, dans Δ_2, les mineurs de la première ligne. Alors on a des M_{ij} spéciaux, que nous appel-

lerons des $\overset{*}{M}_{ij}$, pour lesquels

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_2}\overset{*}{M}_{34} + \frac{\partial}{\partial x_3}\overset{*}{M}_{42} + \frac{\partial}{\partial x_4}\overset{*}{M}_{23} &= 0 , \\ \frac{\partial}{\partial x_3}\overset{*}{M}_{41} + \frac{\partial}{\partial x_4}\overset{*}{M}_{13} + \frac{\partial}{\partial x_1}\overset{*}{M}_{34} &= 0 , \\ \frac{\partial}{\partial x_4}\overset{*}{M}_{12} + \frac{\partial}{\partial x_1}\overset{*}{M}_{24} + \frac{\partial}{\partial x_2}\overset{*}{M}_{41} &= 0 , \\ \frac{\partial}{\partial x_1}\overset{*}{M}_{23} + \frac{\partial}{\partial x_2}\overset{*}{M}_{21} + \frac{\partial}{\partial x_3}\overset{*}{M}_{13} &= 0 . \end{aligned}\right. \tag{15}$$

Ces $\overset{*}{M}_{ij}$ existent évidemment; ils sont de la forme

$$\overset{*}{M}_{ij} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \Phi_j}{\partial x_i} ,$$

les Φ_i étant dits *potentiels électromagnétiques.*

Les équations (15) constituent *le second groupe des équations de Maxwell-Lorentz généralisées.* Elles expriment que $\overset{*}{M}_{ij}\, dx_i dx_j$ est une différentielle *exacte* dans E_4.

IV. — Champ de Maxwell-Lorentz.

Imaginons que l'on réduise la généralité précédente en posant

$$\begin{aligned} &M_{12} = \mathbf{d}_z , && M_{14} = - c\,\mathbf{h}_x ; && \overset{*}{M}_{12} = \mathbf{h}_z , && \overset{*}{M}_{14} = c\,\mathbf{d}_x , \\ &M_{23} = \mathbf{d}_x , && M_{24} = - c\,\mathbf{h}_y ; && \overset{*}{M}_{23} = \mathbf{h}_x , && \overset{*}{M}_{24} = c\,\mathbf{d}_y , \\ &M_{31} = \mathbf{d}_y , && M_{34} = - c\,\mathbf{h}_z ; && \overset{*}{M}_{21} = \mathbf{h}_y , && \overset{*}{M}_{34} = c\,\mathbf{d}_z . \end{aligned}$$

Alors, en écrivant x, y, z ,t pour x_1, x_2, x_3, x_4, et c étant une constante, les équations (14) deviennent

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{h}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathbf{h}_y}{\partial z} &= \frac{1}{c}\left(\rho \mathbf{V}_x + \frac{\partial \mathbf{d}_x}{\partial t}\right) , \\ \frac{\partial \mathbf{h}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathbf{h}_z}{\partial x} &= \frac{1}{c}\left(\rho \mathbf{V}_y + \frac{\partial \mathbf{d}_y}{\partial t}\right) , \\ \frac{\partial \mathbf{h}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{h}_x}{\partial y} &= \frac{1}{c}\left(\rho \mathbf{V}_z + \frac{\partial \mathbf{d}_z}{\partial t}\right) , \\ \frac{\partial \mathbf{d}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{d}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{d}_z}{\partial z} &= \rho . \end{aligned}\right. \tag{16}$$

De même les équations (15) deviennent

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \mathbf{d}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathbf{d}_y}{\partial z} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{h}_x}{\partial t} , \\ &\frac{\partial \mathbf{d}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathbf{d}_z}{\partial x} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{h}_y}{\partial t} , \\ &\frac{\partial \mathbf{d}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{d}_x}{\partial y} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{h}_z}{\partial t} , \\ &\frac{\partial \mathbf{h}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{h}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{h}_z}{\partial z} = 0 . \end{aligned}\right. \tag{17}$$

Bien que la notation vectorielle n'ait rien d'indispensable, elle intervient ici commodément pour rassembler les systèmes (16) et (17) sous la forme

$$\left\{\begin{aligned} &\mathrm{rot}\,\mathbf{h} = \mathbf{s} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{d}}{\partial t} , \qquad \mathrm{div}\,\mathbf{d} = \rho , \qquad \mathbf{s} = \frac{\rho}{c}\mathbf{v} , \\ &\mathrm{rot}\,\mathbf{d} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} , \qquad \mathrm{div}\,\mathbf{h} = 0 . \end{aligned}\right. \tag{18}$$

Telles sont les équations de Maxwell-Lorentz qui, à vrai dire, sont aussi bien celles de Faraday-Ampère.

Des deux dernières on conclut $\mathbf{h} = -\mathrm{rot}\,\mathbf{f}$ et

$$\mathrm{rot}\left(\mathbf{d} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t}\right) = 0 , \qquad \mathbf{d} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} = \nabla\varphi ,$$

si ∇ désigne l'opération $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ qui s'applique à une quantité $\varphi(x, y, z, t)$ scalaire.

Portant dans la première équation (18), on a

$$-\mathrm{rot}^2\mathbf{f} = -\nabla^2\mathbf{f} - \nabla\,\mathrm{div}\,\mathbf{f} = \mathbf{s} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial t^2} + \frac{1}{c}\nabla\frac{\partial \varphi}{\partial t} .$$

Avec la *relation supplémentaire de Maxwell*

$$\mathrm{div}\,\mathbf{f} + \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 , \tag{19}$$

il reste *l'équation vectorielle*

$$-\nabla^2\mathbf{f} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial t} = \mathbf{s} . \tag{20}$$

Enfin, la seconde équation (18) donne

$$\operatorname{div}\left(\nabla\varphi + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t}\right) = \rho ,$$

d'où, d'après la relation supplémentaire, *l'équation scalaire*

$$-\nabla^2\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \rho . \qquad (21)$$

On voit que l'étude des équations (18) est ramenée à celle de (19), (20), (21).

Bien entendu

$$-\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

mais, même si l'on ne connaissait pas cette signification de ∇^2, on la retrouverait aisément en suivant le fil du calcul. Il en est de même pour toutes les notations vectorielles du présent paragraphe.

V. — Optique. — Relativité restreinte.

Soit $\rho = 0$. Les équations de Maxwell-Lorentz se simplifient. Le vecteur **v**, qui correspond à la conductibilité électrique proprement dite, disparaît. Il ne reste, dans les seconds membres de (16), que le fameux courant de déplacement suffisant pour bâtir l'optique. Alors les équations (16) et (17) sont vérifiées par

$$\mathbf{d}_y = \mathbf{h}_z = a \cos n\left(t - \frac{x}{c}\right) ,$$

tous les autres **d** et **h** étant nuls. Cette solution élémentaire pourrait servir à en construire bien d'autres, à cause du caractère linéaire des équations; toutes ces solutions présenteraient une même propriété: celle de ne changer en rien quant t augmente de T et x de cT. Nous sommes donc en présence d'un phénomène de nature périodique qui se propage avec la vitesse c. C'est l'onde électromagnétique, c'est la lumière.

Les équations (20) et (21) rentrent dans la forme unique

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0 . \qquad (22)$$

Nous n'aurons plus alors, dans la théorie, que des fonctions U satisfaisant à cette équation.

Ecrivons la

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial l^2} = 0 .$$

Remarquons que

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial l^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial l'^2}$$

si

$$\begin{cases} x' = x \cos\theta + l \sin\theta , \\ l' = - x \sin\theta + l \cos\theta , \end{cases} \tag{23}$$

En posant

$$\operatorname{tang}\theta = i\frac{v}{c} , \qquad l = ict , \qquad l' = ict' ,$$

on conclut définitivement que l'équation (22) et, par suite, toutes ses solutions U sont conservées par la transformation

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} , \qquad y' = y , \qquad z' = z , \qquad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} .$$

C'est la *transformation de Lorentz*; elle équivaut, de par (23), à une *rotation imaginaire* et, comme toute rotation, engendre un *groupe*. On aurait pu l'étudier directement sur les équations de Maxwell-Lorentz (pour $\rho = 0$) sans passer par l'équation (22) mais comme cette dernière est l'équation fondamentale de la théorie ondulatoire il est hautement préférable, dans un exposé pédagogique, de ne pas se priver de montrer que la théorie ondulatoire de la lumière est aussi un cas particulier des généralités ici invoquées.

Il n'entre point dans le plan de cet article de discuter longuement les conséquences de la transformation de Lorentz; on ne l'a fait que trop souvent et en embrouillant les choses les plus simples.

Ainsi, pour la *contraction de Lorentz*, il suffit de remarquer que si l'éloignement de deux observateurs varie avec une certaine vitesse (ici v), ils se voient *réciproquement* diminués en dimension aussi bien du fait de la vitesse que du fait de l'éloignement.

Pour l'éloignement tout le monde admet cela; en quoi est-ce plus étrange pour la vitesse ? Rien de plus suggestif que cet exact rapprochement entre la perspective ordinaire et la cinématique lorentzienne.

VI. — Dérivées en D d'expressions a deux indices.

Revenons maintenant à la seconde formule stokienne (3) et plus particulièrement à son déterminant Δ_2 qui nous a déjà donné le champ électromagnétique général. Il s'agit de lui faire donner les formules de gravitation proprement dites.

Considérons, dans Δ_2, les mineurs des termes de la première ligne. On ne les altère pas en les écrivant

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_i} & \frac{\partial}{\partial x_j} & \frac{\partial}{\partial x_k} \\ M_{i\omega} & M_{j\omega} & M_{k\omega} \\ i & j & k \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \Gamma^\alpha_{i\omega} & \Gamma^\alpha_{j\omega} & \Gamma^\alpha_{k\omega} \\ M_{i\alpha} & M_{j\alpha} & M_{k\alpha} \\ i & j & k \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \Gamma^\alpha_{i\omega} & \Gamma^\alpha_{j\omega} & \Gamma^\alpha_{k\omega} \\ i & j & k \\ M_{\alpha i} & M_{\alpha j} & M_{\alpha k} \end{vmatrix}$$

car les deux derniers déterminants sont identiquement nuls. Bien entendu on a toujours l'hypothèse (7) et les i, j, k libres viennent, dans les développements, prendre la place des ω. Remarquons aussi tout de suite, que les présents raisonnements ne supposent plus aucune relation entre M_{ij} et M_{ji}.

Convenons maintenant que l'expression précédente, à trois déterminants, s'écrive

$$\begin{vmatrix} \frac{D}{Dx_i} & \frac{D}{Dx_j} & \frac{D}{Dx_k} \\ M_{i\omega} & M_{j\omega} & M_{k\omega} \\ i & j & k \end{vmatrix} \qquad (24)$$

La simple identification donne des formules rentrant toutes dans le type

$$\frac{D}{Dx_i} M_{jk} = \frac{\partial}{\partial x_i} M_{jk} - \Gamma^\alpha_{ik} M_{j\alpha} - \Gamma^\alpha_{ij} M_{\alpha k} \,. \qquad (25)$$

On peut ensuite étendre les raisonnements du paragraphe II. Dans (24) et dans l'expression qui précède (24) relevons partout les

deux indices des M cependant que, dans les Γ, on échangera α et ω.

Les déterminants contenant les Γ seront, de plus, changés de signe.

On définit ainsi des M^{jk} à dériver par la formule

$$\frac{D}{Dx_i} M^{jk} = \frac{\partial}{\partial x_i} M^{jk} + \Gamma^k_{i\alpha} M^{j\alpha} + \Gamma^j_{i\alpha} M^{\alpha k} . \tag{26}$$

Dans ce second cas, les déterminants en Γ ne sont pas nuls mais on achève de justifier (26) en remarquant que

$$N^{jk} \frac{D}{Dx_i} M_{jk} + M_{jk} \frac{D}{Dx_i} N^{jk} = \frac{\partial}{\partial x_i} (N^{jk} M_{jk})$$

si j, k, α sont indices de sommation.

Enfin reprenons l'égalité de (24) et des trois déterminants qui précèdent (24). Dans (24) et les deux premiers déterminants des trois autres relevons les indices i, j, k des M, sans toucher aux Γ; dans le dernier déterminant, relevons les α des M, intervertissons α et ω dans les Γ et changeons le signe de ce déterminant.

On définit ainsi des M^j_k à dériver par la formule

$$\frac{D}{Dx_i} M^j_k = \frac{\partial}{\partial x_i} M^j_k - \Gamma^\alpha_{ik} M^j_\alpha + \Gamma^j_{i\alpha} M^\alpha_k . \tag{27}$$

Celle-ci est finalement construite de telle manière que

$$N^k_j \frac{D}{Dx_i} M^j_k + M^j_k \frac{D}{Dx_i} N^k_j = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(N^k_j M^j_k\right) .$$

Donc les dérivées en D, (25), (26), (27) sont des dérivées partielles généralisées possédant déjà au moins deux propriétés essentielles (*Cf.* paragraphe II):

1° *On n'altère pas la seconde formule stokienne si, dans* Δ_2, *on remplace les* ∂ *par des* D;

2° *Les dérivées partielles de* $N^{jk} M_{jk}$ *et de* $N^k_j M^j_k$ *s'expriment en* D *comme en* ∂.

Remarquons aussi que les formules (25), (26), (27), comme d'ailleurs (8) et (10), sont indépendantes de considérations métriques ou mieux qu'elles tendent à engendrer ces considérations plutôt qu'à en naître. En effet, nos M à deux indices conduisent maintenant à des M_{ii} qui ne sont plus nuls si bien

que, de la forme *bilinéaire* écrite en (4), naît une forme *quadratique*. Les coefficients de celle-ci, avec des notations analogues à celles du paragraphe III, pourraient s'appeler des M_{ij}^{**}. Pour nous conformer aux habitudes, nous les appellerons des g_{ij} et la forme quadratique maintenant apparue sera

$$ds^2 = g_{ij}\,dx_i\,dx_j\ . \tag{28}$$

C'est d'elle que procèdent la géométrie métrique et la gravitation.

Enfin des généralisations peuvent s'apercevoir. Ainsi dans l'expression à trois déterminants du début de ce paragraphe, *les fonctions* Γ *n'ont pas besoin d'être les mêmes dans les deux derniers déterminants.* Il est fort intéressant de rechercher ce qui peut se conserver des résultats subséquents quand ces Γ diffèrent. Mais c'est encore une chose qui sortirait des limites de cet exposé pédagogique (*Cf. Annales de Toulouse*, 3e Mémoire).

Remarquons encore que la théorie des dérivations en D n'est qu'un prolongement de celle des déterminants.

VII. — Symboles a quatre indices.

Jusqu'ici la dérivation en D semble avoir été instituée pour conserver des formules en ∂. Elle ne peut cependant les conserver toutes, sous peine de ne pas être une véritable généralisation. Parmi les choses qu'elle ne conserve pas, il faut signaler, en tout premier lieu, l'*interversion des dérivations*.

Ainsi traitant les dérivées en D, (8) et (10), comme les expressions à deux indices du paragraphe précédent, il vient, après des calculs simples et quelques permutations d'indices,

$$\begin{vmatrix} \dfrac{D}{Dx_i} & \dfrac{D}{Dx_j} \\[2ex] \dfrac{DP_k}{Dx_i} & \dfrac{DP_k}{Dx_j} \end{vmatrix} = P_\alpha B^\alpha_{kji}\ , \tag{29}$$

$$\begin{vmatrix} \dfrac{D}{Dx_i} & \dfrac{D}{Dx_j} \\[2ex] \dfrac{DP^k}{Dx_i} & \dfrac{DP^k}{Dx_j} \end{vmatrix} = P^\alpha B^k_{\alpha ij}\ , \tag{30}$$

$$B^\alpha_{kji} = \frac{\partial}{\partial x_j}\Gamma^\alpha_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_i}\Gamma^\alpha_{kj} + \Gamma^\beta_{ik}\Gamma^\alpha_{\beta j} - \Gamma^\beta_{jk}\Gamma^\alpha_{\beta i}\ . \tag{31}$$

VIII. — Métrique. Courbure. Gravitation.

Maintenant que nous avons constaté que la dérivation d'expressions à deux indices conduisait à percevoir l'existence d'une forme quadratique (28), il reste à s'expliquer sur les coefficients g_{ij} de celle-ci et sur le choix des fonctions Γ jusqu'ici complètement indéterminées. C'est là que peuvent intervenir diverses hypothèses auxquelles correspondent diverses théories gravifiques.

L'hypothèse la plus simple, à laquelle correspond la géométrie de Riemann, consiste à admettre que toutes les dérivées en D des g_{ij} sont nulles. Ceci entraîne, d'après les formules du paragraphe VI, que des g^{ij} et des g^i_j ont également leurs dérivées en D identiquement nulles, si g^{ij} est le quotient par g du mineur de g_{ij} dans le déterminant g des g_{ij} et si

$$g^i_j = g^{\alpha i} g_{\alpha j} = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad i \neq j \\ 1, & \text{si} \quad i = j \end{cases}. \tag{32}$$

Rappelons que l'équation

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}x_i} g_{jk} = \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} - g_{j\alpha}\Gamma^\alpha_{ik} - g_{\alpha k}\Gamma^\alpha_{ij} = 0 ,$$

ou bien

$$\frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} - \begin{bmatrix} i\,k \\ j \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} i\,j \\ k \end{bmatrix} = 0 ,$$

donne

$$2\begin{bmatrix} i\,j \\ k \end{bmatrix} = \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} .$$

On a ainsi

$$\Gamma^\alpha_{ik} = \begin{Bmatrix} i\,k \\ \alpha \end{Bmatrix} = g^{\alpha\beta}\begin{bmatrix} i\,k \\ \beta \end{bmatrix} .$$

Les B à quatre indices exprimés en (31) sont alors les composantes de la courbure riemannienne, courbure dont la théorie pourrait être ici esquissée rapidement. Allons plus directement au but en utilisant l'opérateur (32) qui, aux B à quatre indices, fera correspondre des G à deux indices seulement (contraction; *Verjüngung*), soit

$$\mathrm{G}_{\alpha i} = g^k_j \mathrm{B}^k_{\alpha ij} .$$

Ces G sont encore des composantes de courbure, ce que, par exemple, on peut vérifier aisément dans le cas d'une surface ordinaire sur laquelle on aurait

$$ds^2 = g_{11}\,dx_1^2 + 2g_{12}\,dx_1\,dx_2 + g_{22}\,dx_2^2 \,.$$

Alors $g^{\alpha i}\,G_{\alpha i}$ correspond à la courbure totale de la surface.

Pour revenir au cas général, l'essentiel est que l'on tient maintenant des $G_{\alpha i}$ et des $g_{\alpha i}$ qui sont en même nombre (10 dans E_4); l'équation

$$G_{\alpha i} = 0 \,, \qquad (33)$$

qui est la plus simple des lois de gravitation, exprime un mode de courbure de l'espace-temps qui est vraisemblablement le plus simple. Cette équation permet la détermination des $g_{\alpha i}$, c'est-à-dire d'un ds^2 auquel correspondent des géodésiques-trajectoires, etc.

Nous n'irons pas plus loin dans cette voie car l'exposition que nous aurions à faire pour continuer ne différerait pas de celles déjà faites par maints auteurs.

Terminons par quelques remarques analytiques.

Pour arriver à (33), il vaut mieux passer par (30) que par (29). En effet, former les G à partir de (29) c'est faire, dans le second membre $\alpha = i$, opération impossible à indiquer sur le premier membre qui ne porte pas explicitement l'indice α. Il en est autrement, avec (30), pour $k = j$ et l'on pourrait même énoncer la loi de gravitation (33) sous cette forme: *les expressions*

$$\begin{vmatrix} \dfrac{D}{Dx_i} & \dfrac{D}{Dx_j} \\[2ex] \dfrac{DP^j}{Dx_i} & \dfrac{DP^i}{Dx_j} \end{vmatrix}$$

sont nulles, quel que soit le vecteur P. Sous cette physionomie, on voit combien la loi est proche des formules stokiennes fondamentales qui ont également servi de base à l'électromagnétisme.

Soyons également très bref sur les déjà nombreuses extensions des théories einsteiniennes. Ainsi A.-S. Eddington (*Math. Theory*, p. 217) pose

$$\frac{D}{Dx_i} g_{jk} = 2K_{jk.i}$$

en faisant naître cette formule de considérations métriques inutiles à invoquer ici comme base.

Si $K_{jk.i} = g_{jk} \varkappa_i$, on retrouve la métrique de Weyl; pour $\varkappa_i$ nul celle de Riemann.

IX. — Bibliographie.

Nous n'indiquons ici que les écrits auxquels nous avons fait un emprunt précis pour la rédaction de ce qui précède. Les auteurs sont rangés par ordre alphabétique ce qui ne nous empêche point de mentionner que ceux qui ont joué le rôle le plus important sont MM. Th. De Donder, A.-S. Eddington, H. Weyl.

A. Buhl. 1° *Sur les formules fondamentales de l'Electromagnétisme et de la Gravifique.* Trois Mémoires (« Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse », 1920–1921–1923). 2° *Les Théories einsteiniennes et les Principes du Calcul intégral* (« Journal de Mathématiques pures et appliquées », 1922).

E. Cartan. 1° *Leçons sur les Invariants intégraux* (J. Hermann, Paris, 1922). Exposé systématique relatif surtout aux formes différentielles. La « dérivation extérieure » revient à la construction des formules stokiennes. Voir une analyse de l'ouvrage dans *L'Enseign. math.* (1921–22, p. 389). 2° *Sur les variétés à connexion affine et la Théorie de la Relativité généralisée* (« Annales de l'Ecole Normale, 1923). Travail qui, parmi les nombreuses publications de M. Cartan sur le sujet, paraît tout particulièrement d'envergure prodigieuse. Le point de départ est celui que nous avons toujours adopté. « Au fond, écrit M. Cartan (*loc. cit.*, p. 329), les lois de la Dynamique des milieux continus et celles de l'Electromagnétisme s'expriment par des équations analogues à la formule de Stokes ou à cette formule généralisée ».

Th. De Donder. 1° *Théorie du champ électro-magnétique de Maxwell-Lorentz et du champ gravifique d'Einstein.* 2° *La Gravifique einsteinienne* (Gauthier-Villars & Cie, Paris, 1920 et 1921). Le premier de ces ouvrages donne les formules (14) et (15) ainsi que toute une théorie précisée dans le second et définitive-

ment mise au point en des *Premiers Compléments* (1922). Voir analyse dans *L'Enseign. math.* (1920, p. 237).

P. Dienes. *Sur la structure mathématique du Calcul tensoriel* (« Journal de Mathématiques pures et appliquées », 1924). Ce travail est de ceux qui montrent que le ds^2 est loin d'être la chose primordiale en analyse tensorielle. Comme ici, les formules de dérivation en D ont une tout autre origine logique.

A.-S. Eddington. 1° *Espace, Temps, Gravitation* (J. Hermann, Paris, 1921). 2° *The mathematical Theory of Relativity* (Cambridge University Press, 1923). A ces deux ouvrages on peut emprunter très facilement le développement des applications de la loi de gravitation (33). Voir analyse dans *L'Enseign. math.* (1921-22, p. 86).

E. Goursat. *Leçons sur le problème de Pfaff.* (J. Hermann, Paris, 1922). Mêmes remarques que pour l'ouvrage de M. E. Cartan. Celui de M. Goursat est loin d'être tendancieux au point de vue einsteinien ; il ne s'en occupe point spécialement. Cependant le jeu naturel d'une élégante analyse le conduit (p. 151) aux formules (14). Voir analyse dans *L'Enseign. math.* (1921-22, p. 316).

R. Leveugle. *Précis de Calcul géométrique.* (Gauthier-Villars, Paris, 1920). Cet ouvrage fournira très simplement les éléments nécessaires à qui voudrait approfondir davantage notre paragraphe IV. Voir analyse dans *L'Enseign. math.* (1920, p. 238).

T. Levi-Civita. 1° *Comment un conservateur pourrait-il arriver au seuil de la Mécanique nouvelle* ? (« L'Enseign. math. », 1920). 2° *Nozione di parallelismo in una varietà qualunque e conseguente specificazione geometrica della curvatura riemanniana* (Rendiconti, Palermo, 1917).

H.-A. Lorentz. *The theory of Electrons and its applications to the phenomena of Light and radiant Heat.* (G.-E. Stechert, New-York; B.-G. Teubner, Leipzig, 1916). Exposé magnifique et d'une très grande clarté. On trouvera, dans les premières pages, le procédé donné ici, au paragraphe IV, pour l'intégration des équations de Maxwell-Lorentz.

H. Poincaré. *Electricité et Optique.* Leçons professées à la Sorbonne en 1888, 1890 et 1899. (Gauthier-Villars, Paris). Ces leçons sont des plus suggestives au point de vue de l'histoire de la Science. Elles montrent qu'en 1889, Henri Poincaré en était déjà à l'enseignement classique du *temps local* (p. 530) et de la *contraction de Lorentz* (p. 536). Ces conceptions ont donc précédé de beaucoup les théories einsteiniennes proprement dites, contrairement à ce que semblent croire de nombreuses personnes. Voir analyse dans *L'Enseign. math.* (1902, p. 307).

C. Somigliana. *I fondamenti della Relatività* («Scientia», juillet 1923). D'après cet article, la transformation de Lorentz remonterait à 1887, époque où Woldemar Voigt l'aperçut dans le domaine de l'élasticité. Dans cet ordre d'idées, étant donné que la transformation n'est qu'une interprétation très simple d'une rotation, il est probable qu'on pourrait lui trouver des origines encore beaucoup plus lointaines.

H. Weyl. *Raum, Zeit, Materie* (Vierte Auflage, J. Springer, Berlin, 1921) ou *Espace, Temps, Matière* (A. Blanchard, Paris, 1922). Cet ouvrage expose une géométrie *affine* en connexion profonde avec la théorie des groupes. Il suscite de grands mouvements d'idées qui, en France, semblent surtout se refléter dans les travaux actuels de M. E. Cartan. Voir analyse dans *L'Enseign. math.* (1921-22, p. 235).

NOTE

Dans l'article de M. Arnold Reymond, qui précède celui-ci, il m'est agréable de voir présenter la théorie relativiste comme une axiomatique qui peut « élaborer le groupe d'axiomes nécessaires et suffisant à l'explication des phénomènes réels » (pp. 267–268).

En effet, dans mon premier Mémoire des *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse* (1920, p. 1), j'écrivais textuellement : Les temps sont proches — s'ils ne sont déjà révolus — où l'on posera les conditions analytiques, nécessaires et suffisantes, pour que les phénomènes physiques puissent être conçus.

A. B.

PROPRIÉTÉS INVOLUTIVES D'UN SYSTÈME DE SECTIONS CONIQUES

A propos du problème du cadran solaire.

PAR

P. Mercier (Genève).

Le problème qui fait l'objet de cette étude se présente lorsque l'on examine les propriétés géométriques des cadrans solaires. On sait qu'au cours d'une journée l'ombre portée par l'extrémité du style sur le plan du cadran décrit une courbe que l'on appelle arc diurne. Si l'on néglige la variation de la déclinaison du soleil pendant cette journée, cet arc diurne est simplement l'intersection avec le plan du cadran d'un cône droit ayant pour sommet l'extrémité du style, l'axe de ce cône étant parallèle à l'axe du monde et ses génératrices s'appuyant sur le cercle apparent décrit par le soleil. Il en résulte que l'on peut choisir l'orientation et l'inclinaison du plan du cadran de telle manière que, suivant l'époque de l'année, l'arc diurne décrit soit un arc d'hyperbole, de parabole ou d'ellipse. Il est évident qu'à l'équinoxe la déclinaison du soleil étant nulle, le cône se réduit à un plan parallèle à l'équateur dont l'intersection avec le plan du cadran est une droite appelée équinoxiale.

La question qui se pose alors à l'esprit est de trouver les relations générales appartenant à ce système de coniques et pour cela il convient de considérer le problème dans toute sa généralité, c'est-à-dire au point de vue purement géométrique.

Désignant sous le nom de faisceau de cônes droits un système composé d'une infinité de cônes droits à deux nappes ayant même axe, même sommet et remplissant tout l'espace, l'énoncé

du problème devient: *Etant donné un faisceau de cônes droits, on coupe ce système par un plan quelconque. On demande de déterminer les propriétés géométriques caractérisant le réseau de sections coniques ainsi obtenu.*

Considérons (v. fig.) un plan π et une droite s inclinée d'un angle quelconque γ par rapport à ce plan. Soit P l'intersection de s avec le plan π. Choisissons sur s un point quelconque S comme sommet d'un faisceau de cônes droits ayant pour axe la droite s. Il est aisé de construire l'intersection d'un cône quelconque de ce système avec le plan π si l'on fait usage de la remarque suivante:

Le cône dont la demi-ouverture est égale à 90° se réduit à un plan perpendiculaire à s et passant par le point S. Il coupe le plan π suivant la droite p. Une droite quelconque b passant par P contenue dans le plan π, détermine avec l'axe s un plan auxiliaire qui coupe un cône du faisceau ayant pour demi-ouverture l'angle α suivant deux génératrices et la droite p en un point B_0. Le triangle B_0SP, contenu dans le plan auxiliaire bs, est rectangle en S, ce qui permet de construire son rabattement sur le plan π autour de b comme charnière.

Le plan auxiliaire bs étant rabattu, on peut mener par (S) les deux génératrices g_1 et g_1' qui y sont contenues et trouver leur intersection avec la droite b, ce qui donne deux points B_1, B_1'. de la section conique considérée.

En faisant varier la position du plan auxiliaire passant par s et en procédant de la même manière. on obtient l'intersection complète du cône dont la demi-ouverture est α avec le plan π.

On sait (Théorème de Dandelin) que cette intersection est une hyperbole si l'on a $\alpha > \gamma$, dans ce cas le plan π coupe les deux nappes du cône. C'est une parabole si $\alpha = \gamma$, le plan π est alors parallèle à une génératrice du cône. Enfin c'est une ellipse si $\alpha < \gamma$, le plan π ne coupant qu'une nappe du cône. En faisant varier la demi-ouverture α du cône de 0 à 90°, on obtient sur le plan π un réseau de coniques dont on a figuré quelques unes sur la figure.

Considérons le point d'intersection de la droite b avec le réseau de coniques. Chaque conique du réseau est coupée par cette droite en deux points qui peuvent être considérés comme corres-

π plan du tableau. — s projection orthogonale de l'axe s sur le plan π. — S projection orthogonale du sommet du faisceau de cônes sur le plan π. — (s) à gauche: Rabattement de l'axe s sur le plan π autour de sa projection. — (s) à droite: Rabattement de l'axe s sur le plan π autour de b comme charnière. — p intersection avec le plan π du cône dont la demi-ouverture est égale à 90°. — $B_0B_1B_2B_3$ .... $B_0B_1B_2B_3$.... involution de points sur la droite b. — o lieu géométrique des centres des involutions de points considérées.

pondants. On obtient ainsi deux ponctuelles $B_0B_1B_2B_3 \dots$ et $B_0B_1'B_2'B_3' \dots$.

Théorème I. — *Une droite quelconque* b *contenue dans le plan* π *et passant par le point* P *coupe le réseau de coniques suivant deux ponctuelles* $B_0B_1B_2B_3 \dots B_0B_1'B_2'B_3' \dots$ qui forment une *involution hyperbolique de points dont le centre* O *est le milieu du segment* $\overline{PB_0}$ *et la puissance* $p = \overline{OB_0}^2 = \overline{OP}^2$.

Il suffit de démontrer que le produit des distances au point O de deux points correspondants est constant, c'est-à-dire que l'on a $OB_1 . OB_1' = OB_2 . OB_2' = \dots = \overline{OP}^2$.

Cette propriété peut être démontrée facilement, mais il est plus simple de remarquer que lorsqu'on coupe un faisceau de cônes droits par un plan passant par son axe, chaque cône est coupé suivant deux génératrices qui peuvent être considérées comme deux rayons correspondants de deux faisceaux symétriques par rapport à l'axe du cône. Ces deux faisceaux constituent une involution de rayons dont les rayons doubles sont perpendiculaires. Si l'on coupe cette involution de rayons par une droite quelconque, on obtient une involution de points dont les points doubles correspondent aux rayons doubles.

C'est précisément ce qui se présente dans notre cas, le plan auxiliaire *bs* coupe le faisceau de cônes suivant une involution de rayons et la droite *b* est coupée par cette involution de rayons suivant une involution de points. Le cône dont l'ouverture est égale à zéro se réduit à son axe. C'est un rayon double de l'involution de rayons contenue dans le plan *bs*. Le cône dont la demi-ouverture est égale à 90° se réduit à un plan perpendiculaire à l'axe dont l'intersection avec le plan π est la droite *p*. Ce plan, perpendiculaire à l'axe est coupé par le plan *bs* suivant deux génératrices qui sont confondues et constituent l'autre rayon double. Il est évident que la droite *b* coupe les rayons doubles en P et B_0 qui sont les points doubles de l'involution de points. Le centre de l'involution est le point O, milieu du segment PB_0. Cette involution est hyperbolique car deux points conjugués sont toujours situés d'un même côté du centre.

Théorème II. — *Si l'on choisit comme pôle le point* P, *la droite* p *est la polaire de toutes les coniques du réseau.*

En effet si l'on modifie d'une façon quelconque la position de

la droite b dans le plan π en l'astreignant toutefois à passer par le point P, elle coupera le réseau de coniques suivant une nouvelle involution de points dont les points doubles coïncident l'un avec P, l'autre avec l'intersection de p avec la droite b dans sa nouvelle position. Il en résulte que le point P et la droite p sont le lieu géométrique des points doubles de toutes les involutions de points obtenues en coupant le réseau de coniques par une droite quelconque b passant par le point P.

On sait que dans une involution hyperbolique, toutes les paires de points sont conjuguées harmoniques par rapport aux points doubles; il en résulte que la droite p est la polaire d'une conique quelconque du réseau par rapport au point P pris comme pôle. On sait en effet que si par un point P pris dans le plan d'une conique on mène des cordes qui déterminent sur la courbe des paires de points, le lieu des conjugués harmoniques de P par rapport aux extrémités de chaque corde, est une droite qui est la polaire de P par rapport à cette conique.

Cas particulier. — Lorsque l'axe du faisceau de cônes droits est perpendiculaire au plan, le réseau de coniques devient un réseau de cercles concentriques. La droite de l'infini est la polaire de tous ces cercles, leur centre commun étant choisi comme pôle.

Revenons au cadran solaire. Le problème physique est plus restreint que le problème géométrique en ce sens que la variation de la déclinaison du soleil est limitée à $\pm 23°28'$. Il faut en outre observer que sur le cadran solaire les arcs diurnes correspondant à des déclinaisons du soleil égales et de signe contraire appartiennent géométriquement à une même section conique. En tenant compte de ces remarques, on peut traduire les résultats obtenus en employant les termes utilisés en Gnomonique. Le point P devient le centre du cadran, la droite p est l'équinoxiale, le réseau des sections coniques est constitué par l'ensemble des arcs diurnes et le Théorème II devient:

L'équinoxiale est la polaire des arcs diurnes par rapport au centre du cadran pris comme pôle.

SUR LES TRIANGLES HOMOLOGIQUES

PAR

Henri LEBESGUE (Paris).

---

1. — M. J. KARIYA a démontré (*Enseignement mathématique*, t. VI, mars 1904) un théorème qu'on peut énoncer comme il suit :

Soient a, b, c les points de contact avec les côtés d'un triangle ABC de l'un des cercles inscrits dans ce triangle. Soit O *le centre de ce cercle, soit a' b' c' un triangle homothétique de a b c par rapport à* O. *ABC* et *a' b' c' sont homologiques*[1].

L'énoncé précédent nous apprend qu'*étant donnés deux triangles* T *et* t ;

a) *qui sont homologiques ;*

b) *et tels que* t *soit inscrit dans* T,

on peut, et d'une infinité de manières, déterminer un point O *et une droite* D *de façon que* T *soit homologique de tout triangle* t' *qui se déduit de* t *par n'importe laquelle des homologies de centre* O *et d'axe* D *(homologies* O, D*)*.

Le cas considéré par M. Kariya, qui est celui où la conique $\mathcal{C}$ inscrite dans T et circonscrite à t se réduit à une cercle de centre O, nous montre, en effet, que l'*on peut prendre pour* O *n'importe quel point du plan, à condition de prendre pour* D *la polaire de* O *par rapport à* $\mathcal{C}$.

On peut donner à l'énoncé précédent une plus grande portée

---

[1] J'ai eu connaissance de cette proposition par un article de M. A. AMIEL paru dans le dernier numéro de l'*Enseignement mathématique* (t. XXIII, nos 3-4), dans lequel l'auteur donne un théorème en quelque sorte corrélatif de celui de M. KARIYA.

Pour m'assurer que les remarques qu'on va lire n'avaient pas été soumises déjà aux lecteurs de cette revue, j'en ai feuilleté la collection. Je me suis ainsi aperçu que le théorème de Kariya avait été l'occasion de multiples communications qu'on trouvera non seulement dans le no de mai 1904 cité par M. Amiel, mais dans les tomes VI et VII tout entiers. En particulier, il a échappé à M. Amiel que son énoncé avait déjà été démontré en 1905 par M. TABAKOFF.

apparente en remarquant que, O et D étant pôle et polaire par rapport à $\mathcal{C}$, si T′ et t″ se déduisent de T et t par des homologies (O, D), distinctes ou non, T′ et t″ sont homologiques; en effet, effectuons d'abord sur T et t celle des homologies (O, D) qui transforme T en T′; t devient alors t′. Appliquons maintenant le théorème précédent à T′ et t′, en effectuant sur t′ celle des homologies (O, D) qui le transforme en t″, nous aurons prouvé l'homologie de T′ et t″. On pourra, en particulier, inverser le rôle de T et t dans l'énoncé précédent et énoncer que t est homologique de tout transformé de T par une homologie (O, D) [1].

Ainsi le théorème précédent est susceptible d'énoncés divers qui sont conséquences les uns des autres; je m'en tiendrai dans la suite à la forme donnée ci-dessus à ce théorème. Et je vais étudier s'il reste vrai quand on renonce à la condition *b*); T et t deviennent alors deux triangles homologiques qui, en dépit de la forme de l'énoncé, jouent exactement le même rôle [2]. Nous allons voir que l'énoncé subsiste et nous déterminerons tous les couples (O, D) que nous trouverons liés, dans le cas général, tout à fait de la même manière que dans le cas particulier examiné par M. Kariya [3].

2. — Considérons deux triangles ABC ou T, *abc* ou t, homologiques par rapport à un centre Ω et soit O un point de leur plan; demandons-nous si l'on peut associer à O une droite D définissant des homologies satisfaisant à l'énoncé précédent. Soit γ le point de rencontre, inconnu, de D et de *ab*; une droite quelconque issue de γ rencontre O*a* et O*b* en deux points *a*′, *b*′ qui sont deux sommets de l'un des triangles, *a*′ *b*′ *c*′ ou t′, que nous avons à considérer. Le centre de l'homologie transformant T en t′ est le point de rencontre ω de A*a*′ et B*b*′. Lorsque γ est connu le lieu de ω est, d'après cela, une conique (γ) passant par A, B, O, Ω. Pour qu'une droite D réponde à la

---

[1] Pour le cas où $\mathcal{C}$ est un cercle de centre O, cette dernière forme de la proposition est celle de MM. Tabakoff et Amiel. Un énoncé de M. Franke, et sa réciproque formulée par M. Tabakoff, se relient de la même manière à l'énoncé de M. Kariya.

[2] Il est clair qu'on ne saurait renoncer à la condition *a*).

[3] Pour éviter tout malentendu, je fais observer que nous n'avons pas à rechercher dans quel cas des homologies forment un groupe. Nous avons bien à considérer l'opération résultant de l'homologie qui transforme T en t, suivie de celle qui transforme t en t′; mais nous appliquons ces opérations seulement aux trois sommets de T.

question, il faut et il suffit que de ses points de rencontre γ, α, β avec ab, bc, ca on déduise trois coniques (γ), (α), (β) qui soient confondues. Il est nécessaire et suffisant pour cela que (γ) passe par C, (α) par A, (β) par B; car alors (α), (β), (γ) sont toutes trois déterminées par les 5 mêmes points A, B, C, O, Ω.

Voyons donc quel doit être γ pour que (γ) passe par C. Si ω vient en C, Aa' et Bb' sont devenues AC et BC donc a' et b' sont respectivement aux points de rencontre a'_1, b'_1 de Da et de AC, de Ob et de BC. La droite a'_1, b'_1, est connue, elle coupe $a\ b$ au point γ qui est ainsi déterminé. α est de même déterminé par la rencontre d'une droite $b'_2 c'_2$ et de bc, β par la rencontre de $c'_3 a'_3$ et de ac.

Ainsi, si les points α, β, γ sont en ligne droite, au point O est associé une droite D et une seule: la droite $\alpha\beta\gamma$. Or on va vérifier que α, β, γ sont toujours en ligne droite. Je ferai cette vérification par le calcul ce qui me donnera de suite la correspondance O, D.

Soient les équations

$$x = 0 \text{ pour } bc, \qquad y = 0 \text{ pour } ca, \qquad z = 0 \text{ pour } ab;$$

et

$$ux + vy + wz = 0$$

pour l'axe d'homologie de T et t. Les côtés de T ont pour équation

$$\begin{aligned} (u + u_1)x + vy + wz &= 0, \quad \text{BC},\\ ux + (v + v_1)y + wz &= 0, \quad \text{CA},\\ ux + vy + (w + w_1) &= 0, \quad \text{AB}, \end{aligned}$$

Soient x_0, y_0, z_0, les coordonnées de O; celles de a'_1 vérifieront l'équation de CA et la relation

$$\frac{y}{y_0} = \frac{z}{z_0};$$

donc ce sont

$$(v + v_1)y_0 + wz_0, \quad -uy_0, \quad -uz_0.$$

L'équation de a'_1, b'_1, est donc:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ (v + v_1)y_0 + wz_0 & -uy_0 & -uz_0 \\ -vx_0 & (u + u_1)x_0 + wz_0 & -vz_0 \end{vmatrix} = 0.$$

et comme le z de γ est nul, on a pour les coordonnées de γ

$$u[(u+u_1)x_0+vy_0+wz_0]\,,\quad -v[ux_0+(v+v_1)y_0+wz_0]\,,\quad 0$$

de même pour β et α on a:

$$-w[ux_0+vy_0+(w+w_1)z_0]\,,\quad 0\quad v[ux_0+(v+v_1)y_0+wz_0]\,;$$
$$0\,,\quad w[ux_0+vy_0+(w+w_1)z_0]\,,\quad -u[(u+u_1)x_0+vy_0+wz_0]\,.$$

Le déterminant de ces coordonnées est d'ordre 3, il est symétrique gauche, donc il est nul. α, β, γ sont en ligne droite; à tout point O est associé une droite D dont l'équation a pour coefficients de x, y, z, les mineurs de la matrice formée par les coordonnées de β et α. Donc l'équation de D est:

$$0 = u[(u+u_1)x_0+vy_0+wz_0]x+v[ux_0+(v+v_1)y_0+wz_0]y$$
$$+w[ux_0+vy_0+(w+w_1)z_0]z\,.$$

D passe par O, quand O est point de la conique $\mathcal{C}$.

$$u[(u+u_1)x+vy+wz]x+v[ux+(v+v_1)y+wz]y$$
$$+w[ux+vy+(w+w_1)z]z=0\,.$$

Or il est clair que l'équation de D s'écrit:

$$x\times\frac{1}{2}\mathcal{C}'_{x_0}+y\times\frac{1}{2}\mathcal{C}'_{y_0}+z\times\frac{1}{2}\mathcal{C}'_{z_0}=0\,.$$

Donc O *et* D *sont pôle et polaire par rapport à* $\mathcal{C}$.

Et la valeur trouvée pour $\frac{1}{2}\mathcal{C}'_x$ montre que la droite $\frac{1}{2}\mathcal{C}'_x=0$, c'est-à-dire la polaire de a, est la droite BC. Ainsi *la conique* $\mathcal{C}$ *est celle par rapport à laquelle* T *et* t *sont polaires réciproques.*

3. — Cet énoncé généralise bien celui que nous avons déduit du théorème de M. Kariya; au reste il n'était pas difficile à prévoir si l'on songeait qu'une transformation par polaire réciproque par rapport à $\mathcal{C}$ inversait T et t et transformait une homologie (O, D) répondant à la question en une homologie y répondant également et qui avait pour centre le pôle de D et pour axe la polaire de O. Guidé par cette prévision du résultat à démontrer on peut remplacer l'analyse précédente par le raisonnement synthétique suivant.

Nous voulons prouver que *si O et D sont pôle et polaire par rapport à la conique* $\mathcal{C}$ *par rapport à laquelle deux triangles homologiques* T *et* t *sont polaires réciproques, le couple* (*O*, *D*) *définit des homologies qui transforment* t *en triangles homologiques avec* T [1].

Raisonnons sur une représentation du plan projectif dans laquelle $\mathcal{C}$ est une circonférence de centre O. Alors O a est perpendiculaire à BC et le coupe en un point A_1; de même O b et O c sont respectivement perpendiculaires à CA, AB et les coupent en B_1 et C_1. On a:

$$Oa \times OA_1 = Ob \times OB_1 = Oc \times OC_1 .$$

Si maintenant on remplace T et t par des homothétiques T′ et t″ par rapport à O, les relations de perpendicularité restent les mêmes et l'on a:

$$Oa''.OA_1' = Ob''.OB_1' = Oc''.OC_1' .$$

Donc a'' b'' c'' ou t″ et A′ B′ C′ ou T′ sont polaires réciproques par rapport à un cercle de centre O, donc sont homologiques.

Ce mode de raisonnement, qui s'applique de suite à l'énoncé de M. Kariya, comme aussi à ceux de MM. Franke, Tabakoff et Amiel auxquels j'ai fait allusion, est, sinon le plus élémentaire de ceux qui ont été proposés, du moins le plus immédiat et le plus clair.

Il exige que l'on sache démontrer l'homologie de deux triangles abc, ABC polaires réciproques par rapport à une circonférence de centre O. Soient α, β, γ les points de rencontre de bc et BC, de ca et CA, de ab et AB. Soit ω le point de rencontre de bc et de aA. Le rapport anharmonique des quatre droites concourrantes Aα, AB, AC, Aa, est celui de leurs pôles

$$\omega\,,\quad c\,,\quad b\,,\quad \alpha\,,$$

donc celui de

$$\alpha\,,\quad b\,,\quad c\,,\quad \omega\,,$$

donc celui de

$$a\alpha\,,\quad ab\,,\quad ac\,,\quad a\omega\,.$$

---

[1] Je laisse maintenant de côté la question, précédemment traitée, de savoir si ces couples (O, D) sont les seuls répondant à la question.

Et puisque Aa et $a\omega$ coïncident, les points α, β, γ, déterminés par la rencontre de $A\alpha$ avec $a\alpha$, de AC avec *ac*, de AB avec *ab*, sont en ligne droite.

4. — Des raisonnements du paragraphe 2 on déduira de suite que si trois homologies (O, D) transforment un triangle t en triangles homologiques avec un triangle donné T, t et T sont homologiques et (O, D) est l'un des couples que nous avons appris à leur associer.

Cette proposition, comme les précédentes, est relative à des figures formées de triangles dont deux quelconques sont homologiques. Peut-être pourrait-on déterminer toutes les figures jouissant de cette propriété.

DÉDUCTION GÉOMÉTRIQUE DES DÉRIVÉES SUPÉRIEURES DES FONCTIONS CIRCULAIRES sin x ET cos x

PAR

J. Arnovljevic (Belgrade) et B. Petronievics (Belgrade).

Ayant réussi à déduire géométriquement les dérivées premières des fonctions circulaires [1], je me suis efforcé d'appliquer le même procédé aux dérivées supérieures de ces fonctions. Mon collègue, M. Dr Ivan Arnovljevic, professeur de Mécanique à la Faculté technique de l'Université de Belgrade, ayant trouvé avant moi une solution géométrique du problème pour la deuxième dérivée des fonctions sin x et cos x, j'ai utilisé les éléments de sa solution pour arriver à la déduction géométrique de la troisième et des dérivées supérieures de ces deux fonctions.

---

[1] Comp. B. Petronievics, Déduction des dérivées de fonctions circulaires par la méthode géométrique des limites. — *L'Enseignement mathématique*, XXIIe année, N° 3-4, p. 195-208.

La première partie de cet article contient la part de la collaboration importante de M. Arnovljevic; dans la deuxième, je donne d'abord ma solution du problème résolu par M. Arnovljévic, puis la solution générale.

I

Nous allons donner d'abord la déduction géométrique des formules connues

$$\frac{d^2 \sin x}{dx^2} = - \sin x \qquad \text{et} \qquad \frac{d^2 \cos x}{dx^2} = \cos x \; .$$

Dans le cercle de rayon $\overline{\mathrm{OA}_0} = 1$ (fig. 1), on a

$$\overline{\mathrm{OA}} = \cos x \quad \text{et} \quad \overline{\mathrm{AB}} = \sin x \; ,$$

$$\overline{\mathrm{BB}_1} = dx \; , \qquad \overline{\mathrm{C}_1 \mathrm{B}_1} = d \sin x \; , \qquad \overline{\mathrm{BC}_1} = - d \cos x \; ,$$

De $\Delta \mathrm{B}_1 \mathrm{BC}_1 \sim \mathrm{OBA}$, on déduit

$$\overline{\mathrm{B}_1 \mathrm{C}_1} : \overline{\mathrm{B}_1 \mathrm{B}} = \overline{\mathrm{OA}} : \overline{\mathrm{OB}} \qquad \text{et} \qquad \overline{\mathrm{BC}_1} : \overline{\mathrm{BB}_1} = \overline{\mathrm{AB}} : \overline{\mathrm{OB}} \; .$$

d'où:

$$d \sin x : dx = \cos x : 1 \qquad \text{et} \qquad - d \cos x : dx = \sin x : 1 \; .$$

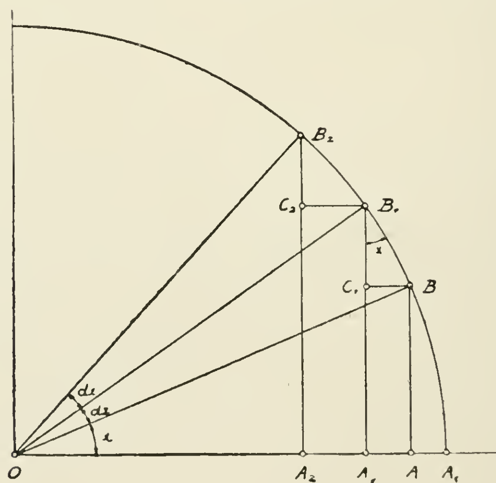


Fig 1

C'est la déduction géométrique de

$$\frac{d \sin x}{dx} = \cos x \quad \text{et} \quad \frac{d \cos x}{dx} = - \sin x\ .$$

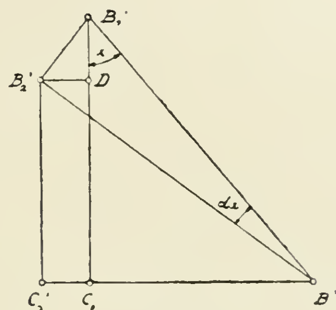


Fig 2

Dans la fig. 2, les deux triangles BB_1C_1 et $B_1B_2C_2$ de la fig. 1 ont été agrandis et tracés de telle sorte que les deux angles B et B_1 coïncident en B' et que les côtés BC_1 (resp. $B'C'_1$) et B_1C_2 (resp. $B'C'_2$) coïncident aussi.

Alors $B'B'_1$ étant // BB_1 et $B'B'_2$ // B_1B_2, on a: $\sphericalangle B'_1B'B'_2 = dx$; $B'_1B'_2$ étant // OB_1 et $B'_2D \perp B'_1C'_1$, on a: $\sphericalangle B'_1B'_2D = x + dx = x$; et dans le triangle $B'_2DB'_1$ on a: $DB'_2 = \overline{C'_2B'} - \overline{C'_1B'} = - d^2 \cos x$, $\overline{DB'_1} = \overline{B'_2C'_2} - \overline{B'_1C'_1} = - d^2 \sin x$ et $B'_1B'_2 = \overline{B'B'_1} \,.\, dx = (dx)^2$.

De $\Delta B'_2DB_1$, de la fig. 2 (dont les côtés sont des grandeurs infiniment petites de deuxième ordre), $\sim$ OAB (dans la fig. 1), leurs côtés respectifs devenant parallèles à la limite, on a:

$$\overline{B'_1D} : \overline{B'_1B'_2} = \overline{BA} : \overline{OB} \quad \text{et} \quad \overline{B'_2D} : \overline{B'_1B'_2} = \overline{OA} : \overline{OB}$$

d'où:

$$- d^2 \sin x : dx^2 = \sin x : 1 \quad \text{et} \quad - d^2 \cos x : dx^2 = \cos x : 1\ ,$$

ou:

$$\frac{d^2 \sin . x}{dx^2} = - \sin x \quad \text{et} \quad \frac{d^2 \cos . x}{dx^2} = - \cos x\ .$$

II

1. — Dans la fig. 3, on a PZ $= x$, $\overline{\text{OP}} = \Delta x$, P est le point de la tangente PT, Q le point de la tangente QT[1], PS la sécante passant par les points Q et P, PM le sinus de l'arc x (et de l'angle correspondant α, QN le sinus de l'arc $x + \Delta x$ (et de l'angle correspondant $\alpha + \Delta x$), Q'N' le sinus de l'arc $x + 2\Delta x$ (et de l'angle correspondant $\alpha + 2\Delta\alpha$).

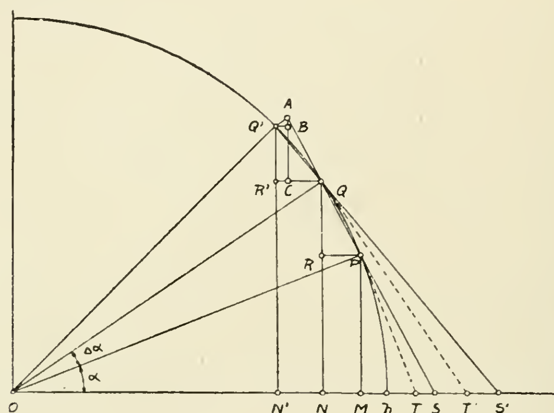


Fig 3

De même on a dans cette figure:

$$\Delta \sin x = \sin(x + \Delta x) - \sin x = \text{NQ} - \text{MP} = \text{RQ}$$
$$\Delta \sin(x + \Delta x) = \sin(x + 2\Delta x) - \sin(x + \Delta x) = \text{N'Q'} - \text{NQ} = \text{R'Q'}$$
$$\Delta\Delta \sin x = \Delta \sin(x + \Delta x) - \Delta \sin x = \text{R'Q'} - \text{RQ} = \text{BC} - \text{AC} = -\text{AB} .$$

Dans le triangle Q'QA, ayant l'arc Q'A pour base, on a: $\widehat{\text{Q'A}} = \text{Q'Q} . \sphericalangle \text{Q'QA}$, et dans le triangle Q'QO, ayant l'arc Q'Q pour base, on a de même: $\widehat{\text{Q'Q}} = \text{OQ} . \sphericalangle \text{Q'OQ}$.

On aura donc:

$$\lim \text{Q'A} = \lim \Delta x . \lim \sphericalangle \text{SQS'} = \lim \Delta x . \lim \Delta \sphericalangle \text{RQP}$$
$$= \lim \Delta x . \lim \Delta \alpha$$

d'où:

$$\lim \text{Q'A} = dx . d\alpha = dx^2 . \qquad (1)$$

Comme le triangle Q'BA coïncide, en passant à la limite, avec le petit triangle non tracé Q'BA', qui est semblable au triangle ON'Q', on aura d'autre part:

$$\lim \sphericalangle AQ'B = \lim \sphericalangle (\alpha + 2\Delta\alpha) = \alpha = x .$$

On a aussi:

$$\lim AB = - \lim \Delta\Delta \sin x = - d^2 \sin x . \qquad (2)$$

De même, comme en passant à la limite, $\Delta ON'Q'$ coïncide avec OMP, on aura:

$$\lim \frac{AB}{Q'A} = \lim \frac{PM}{OP} , \qquad (3)$$

Des équations (1), (2) et (3), il s'ensuit enfin:

$$\frac{d^2 \sin x}{dx^2} = - \sin x .$$

2. — En suivant la déduction précédente de la seconde dérivée de sin x, on déduira facilement la seconde dérivée de cos x.

Dans la fig. 3, on a:

$$\Delta \cos x = - RP , \quad \Delta \cos (x + \Delta x) = - R'Q , \quad \Delta\Delta \cos x = - R'C .$$

On a de même:

$$\lim Q'A = dx^2 , \qquad (1)$$

$$\lim \sphericalangle AQ'B = x ,$$

$$\lim Q'B = d \cos^2 x \qquad (2)$$

et

$$\lim \frac{Q'B}{Q'A} = \frac{OM}{OP} . \qquad (3)$$

On aura donc enfin:

$$\frac{d^2 \cos x}{dx^2} = - \cos x .$$

3. — Les figures 4 et 4 *a* se rapportent à la troisième dérivée des fonctions sin x et cos x. Dans la fig. 4 *a*, les triangles R″Q′Q″ et R′Q′A′ de la fig. 4 ont été agrandis de telle sorte que le triangle Q″Q′A′ contient, non seulement le petit triangle Q″B′A′, mais aussi le triangle encore plus petit DEA′.

Dans la fig. 4, mais en tant qu'elle diffère de la fig. 3, Q' est le point de la tangente Q'T″, Q'S″ la sécante passant par les points Q″ et Q', Q″N″ le sinus de l'arc $x + 3\Delta x$ (et de l'angle correspondant $\alpha + 3\Delta\alpha$).

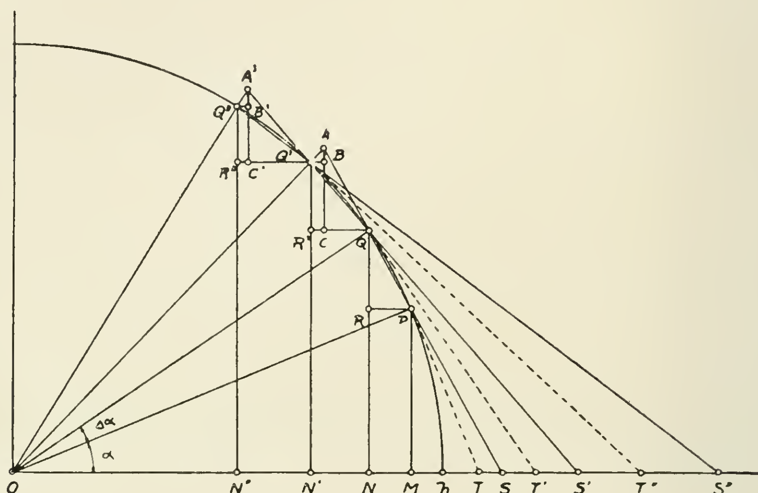


Fig. 4

De même, on a dans la figure 4:

$$\Delta \sin(x + 2\Delta x) = \sin(x + 3\Delta x) - \sin(x + 2\Delta x) = N''Q'' - N'Q' = R''Q''$$

$$\Delta\Delta \sin(x + \Delta x) = \Delta \sin(x + 2\Delta x) - \Delta \sin(x + \Delta x)$$
$$= R''Q'' - R'Q' = - A'B'$$

$$\Delta\Delta\Delta \sin x = \Delta\Delta \sin(x + \Delta x) - \Delta\Delta \sin . x = - A'B' - (- AB) \; .$$

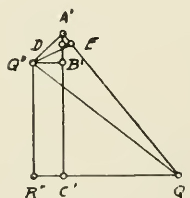


Fig 4a

Comme dans la figure 4 *a*:

A'B' de la figure 4, représente A'B'
et AB » » » DB',

on a, dans cette figure:

$$\Delta\Delta\Delta \sin x = -A'B' - (-DB') = -A'D .$$

On a aussi dans la figure 4 *a*:

$$\lim A'E = \lim \widehat{A'E} = \lim Q''A' . \lim \sphericalangle A'Q''E$$
$$= \lim \widehat{Q''A'} . \lim \Delta \sphericalangle A'Q''B' ,$$

mais comme, en passant à la limite, $\widehat{Q''A'}$ coïncide (dans la figure 4) avec Q'A et $\sphericalangle$ A'Q''B' avec A Q'B, on aura:

$$\lim A'E = \lim Q'A . \lim \Delta \sphericalangle AQ'B = dx^2 . d\alpha = dx^3 , \qquad (1)$$

On aura aussi, en passant à la limite (ΔDA'E étant $\sim$ ΔC'A'Q'),

$$\lim \sphericalangle DA'E = \lim \sphericalangle C'A'Q' = \lim \sphericalangle N'Q'S' = \lim \sphericalangle NQT' = \alpha = x$$

et

$$\lim A'D = -\lim \Delta\Delta\Delta \sin x = -d^3 \sin x . \qquad (2)$$

De même, en passant à la limite, Δ DA'E devient semblable à Δ MPO, et on aura:

$$\lim \frac{A'D}{A'E} = \frac{OM}{OP} . \qquad (3)$$

Des équations (1), (2) et (3) il s'ensuit enfin:

$$\frac{d^3 \sin x}{dx^3} = -\cos x .$$

Remarque. — En suivant la déduction de la troisième dérivée de sin x, on déduira facilement la troisième dérivée de cos x.

On aura en effet (dans la fig. 4):

$$\Delta\Delta \cos x = R''Q' - R'Q = -R''C' ,$$

et

$$\Delta\Delta\Delta \cos x = -R''C' - (-R'C) = DE$$

(dans la figure 4 *a*, où Q''B' représente R''C', tandis que le segment rectiligne correspondant à R'C' > R''C n'a pas été tracée).

Comme

$$\lim \frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{A'E}} = \frac{\mathrm{PM}}{\mathrm{OP}},$$

on aura:

$$\frac{d^3 \cos . x}{dx^3} = \sin x .$$

4. — En suivant la déduction des deuxième et troisième dérivées de sin x, on déduira facilement la quatrième dérivée, et ainsi de suite.

On s'apercevra aussi (comp. fig. 3 et 4) que, si cette déduction porte sur la dérivée de l'ordre pair, l'angle du petit triangle (dont les différences $\Delta^n y$ et Δx^n sont des côtés), qui correspond à l'angle α, sera orienté dans le même sens que celui-ci, tandis que, s'il s'agit de la dérivée de l'ordre impair, cet angle sera orienté dans le sens de l'angle NQS. D'où la différence dans le procédé de démonstration des deux cas.

On pourrait démontrer que, tandis que $\Delta^2 \sin x$ et $\Delta^3 \sin x$ sont négatifs, la différence $\Delta^4 \sin x$ sera positive. Mais alors, comme la valeur absolue de la deuxième dérivée et de chaque dérivée de l'ordre pair de la fonction sin x est sin x et celle de la troisième et de chaque dérivée de l'ordre impair cos x, la valeur de la quatrième dérivée sera $+ \sin x$, et les valeurs $\cos x$, $-\sin x$, $-\cos x$, $\sin x$ se succèderont périodiquement à partir de la cinquième dérivée. Et la même remarque s'applique aux valeurs — sin x, — cos x, sin x, cos x par rapport à la fonction cos x.

Remarque. — Nous terminerons notre travail par une remarque. Comme on le sait, l'objection la plus sérieuse au calcul différentiel de LEIBNIZ était celle faite par le Hollandais B. NIEUWENTIJT : les dérivées supérieures d'une fonction ne peuvent pas exister, étant donné qu'elles ne possèdent pas de signification géométrique [1]. Or, dans notre travail, nous avons établi, pour la première fois d'une manière incontestable, l'existence géométrique des dérivées supérieures d'une fonction.

[1] L'objection se trouve dans l'ouvrage de NIEUWENTIJT, intitulé *Analysis infinitorum*, 1695, Cap. VIII, et la réponse de LEIBNIZ dans *Acta Eruditorum*, 1695 (une traduction de cette réponse se trouve dans le livre de J. M. CHILD, *The Early mathematical papers of Leibniz*, London, 1920). Comp. aussi M. CANTOR, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, Bd. III, 2te Aufl., S. 254-56.

SUR L'INVERSION DES PRODUITS ARITHMÉTIQUES

PAR

E. T. Bell (Seattle, Wash.)

---

1. — Dans une étude sur les travaux arithmétiques de Gauss, M. A. Aubry [1] observa que la formule

$$\varphi(a) + \varphi(b) + \ldots = \varphi(n) ,$$

où a, b, ... sont tous les diviseurs de l'entier n, $\varphi(n)$ étant la fonction d'Euler, « semble avoir donné le signal de la découverte d'une foule de relations arithmétiques qu'il y aurait grand intérêt à réunir et à rapprocher ». Je crois avoir rempli ce desideratum avec une algèbre symbolique que je construisis en 1915, et que je simplifiai dans quelques notes et articles parus plus tard [2]. Cette algèbre donne le moyen immédiat de réaliser l'idée de M. Aubry pour un corps quelconque d'éléments ayant une loi de résolution unique en facteurs irréductibles, soit par exemple le corps des entiers rationnels ou les idéaux d'un corps algébrique donné. On peut appliquer d'une façon immédiate les principes extrêmement simples de cette algèbre pour réunir et augmenter encore le nombre des relations entre les fonctions numériques trouvées, et dont un exposé a été donné par M. Dickson dans son *History of the Theory of Numbers* (tome 1, chapitres 5, 10, 19).

Dans la présente Note j'applique des principes de la même espèce à l'inversion des produits

$$\prod_n [f(d)]^{g(\delta)} .$$

---

[1] *L'Enseignement mathématique*, tome 11 (1909), p. 438-439.

[2] Voir, par exemple, *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 27, pp. 330-332; *Transactions* (of the A. M. S.), vol. 25, pp. 135-154.

où le Π s'étend à tous les couples d, δ de diviseurs conjugués de l'entier n, et où f, g sont des fonctions numériques quelconques. Comme cas très spécial de l'inversion générale on trouve une formule importante de Dedekind.

2. — Rappelons quelques principes simples de la méthode citée. Soit n un entier quelconque > 0, et $f_1(n)$, $f_2(n)$, ..., $f_r(n)$ des fonctions numériques. Posons symboliquement la somme

$$\Sigma_n f_1(d_1) f_2(d_2) \cdots f_r(d_r) ,$$

où Σ_n s'étend à tous les systèmes $(d_1, d_2, \ldots, d_r)$ de r entiers > 0 dont le produit est n, égal au produit symbolique

$$f_1 f_2 \cdots f_r ,$$

de sorte que

$$\Sigma_n f_1(d_1) f_2(d_2) \ldots f_r(d_r) \equiv f_1 f_2 \cdots f_r .$$

On voit sans peine que le produit symbolique $f_1 f_2 \ldots f_r$ reste invariant sous toutes les permutations de $f_1, f_2, \ldots, f_r$. Ainsi cette multiplication symbolique est commutative. Elle est aussi associative. Par exemple

$$\begin{aligned} f_1(f_2 f_3) &= \Sigma_n[f_1(d)\Sigma_\delta f_2(\delta_1^1) f_3(\delta_2^1)] (n = d\delta , \ \delta = \delta_1 \delta_2) , \\ &= \Sigma_n f_1(d_1) f_2(d_2) f_3(d_3) \quad (n = d_1 d_2 d_3) , \\ &= \quad f_1 f_2 f_3 . \end{aligned}$$

L'unité de cette multiplication est la fonction η, où

$$\eta(1) = 1 , \qquad \eta(n) = 0 , \qquad (n > 1) ;$$

car on a $\eta f = f$, f étant une fonction numérique quelconque.

La fonction f' telle que

$$ff' = \eta$$

est unique quand f est donnée.

Je l'ai nommée la fonction réciproque de f.

Soient $f_1, f_2, \ldots, g_1, g_2, \ldots, h_1, h_2, \ldots$ des fonctions numériques telles que

$$f_1 f_2 \cdots f_r g_1 g_2 \cdots g_s = h_1 h_2 \ldots h_t .$$

Le produit $g_1 g_2 \ldots g_s$ est une fonction numérique, soit g; ainsi de même pour $h_1 h_2 \ldots h_t$, soit h. Soit g' la fonction réciproque de g, de sorte que $gg' = \eta$, et posons

$$hg' \equiv \frac{h}{g}$$

symboliquement, par analogie avec l'artihmétique ordinaire. Donc, de la relation donnée on tire

$$f_1 f_2 \cdots f_r = \frac{h_1 h_2 \ldots h_t}{g_1 g_2 \cdots g_s}.$$

Ces fonctions symboliques ont toutes les propriétés multiplicatives des fractions arithmétiques. Ainsi, par exemple, la multiplication indiquée par $\times$ étant symbolique au sens de cette algèbre, on a

$$\frac{f_1 f_2 \cdots f_r}{g_1 g_2 \cdots g_s} \times \frac{g_1 g_2 \cdots g_s}{h_1 h_2 \ldots h_t} = \frac{f_1 f_2 \cdots f_r}{h_1 h_2 \ldots h_t}.$$

3. — Pour étendre l'ismorphisme j'écris symboliquement

$$\prod_n [f(d)]^{g(\delta)} \equiv f^g. \tag{1}$$

Soient maintenant $f(n)$, $g(n)$, $h(n)$, $k(n)$ des fonctions numériques telles que

$$f^g = h^k, \tag{2}$$

et soit g' la fonction réciproque de g, et k' celle de k. Donc, je dis,

$$f^{k'} = h^{g'}, \tag{3}$$

en analogie complète avec l'algèbre ordinaire.

Pour démontrer (3), on obtient de (2)

$$\Sigma_n g(\delta) \log f(d) = \Sigma_n k(\delta) \log h(d).$$

ou, si l'on pose $\log f(n) = \mathrm{F}(n)$, $\log h(n) = \mathrm{H}(n)$,

$$g\mathrm{F} = k\mathrm{H}.$$

Multiplions symboliquement cette identité par φ, où φ est une fonction numérique arbitraire. Donc

$$\varphi g F = \varphi k H ,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$f^{\varphi g} = h^{\varphi k} .$$

Soit maintenant φ la fonction spécifique $g'k'$. Donc $\varphi g = k'$, $\varphi k = g'$, et on a (3).

L'inversion de Dedekind est le cas spécial où $g = u$, $k = \eta$, et $u(n)$ est la fonction numérique

$$u(n) = 1 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) .$$

Car la fonction réciproque de η est η elle-même, et la fonction réciproque de u est la fonction μ de Möbius, où $\mu(n) = 0$ quand n contient un facteur premier à une puissance > 1, et $\mu(n) = 1$ ou -1, selon que n est le produit d'un nombre pair ou impair de facteurs premiers distincts. Dans ce cas (2), (3) deviennent

$$f^u = h^\eta , \qquad f^\eta = h^\mu ,$$

ou, en forme non-symbolique,

$$\prod_n f(d) = h(n) , \qquad f(n) = \prod_n \left[h(d)\right]^{\mu(\delta)} .$$

University of Washington.

SUR LA THÉORIE DES ÉQUATIONS ET DES FONCTIONS ALGÉBRIQUES D'APRÈS L'ÉCOLE GÉOMÉTRIQUE ITALIENNE [1]

PAR

Federigo ENRIQUES (Rome).

1. — Lorsqu'on parle de géométrie, il n'est pas rare de rencontrer une certaine méfiance parmi des mathématiciens qui n'ont pas oublié la rivalité qui existait autrefois entre l'école des analystes et celle des géomètres, lorsque la pureté de la méthode, analytique ou synthétique, semblait constituer l'idéal de la science.

On aime à croire quelquefois que cette rivalité est terminée par la simple mort de l'une des deux écoles rivales, et précisément de l'école géométrique, puisque les fins que celle-ci poursuivait — soit la description de figures remarquables, leurs générations ou transformations, etc. — ont perdu en grande partie de leur intérêt pour les mathématiques contemporaines. Aussi celui qui vient vous entretenir aujourd'hui de questions géométriques, risque d'être écouté un peu comme un survivant, qui vous parlerait de problèmes déjà dépassés par la pensée scientifique.

Il est vrai, Messieurs, je suis bien loin de le nier, que certaines manières d'envisager les problèmes de la géométrie — tant au point de vue de la méthode qu'au point de vue des buts que se proposaient les chercheurs — ont actuellement perdu dans une large mesure leur attrait. D'autre part, dans le domaine algébrique qui formera l'objet de ma conférence, l'emploi constant de l'imaginaire, ainsi que l'introduction d'un nombre de dimensions supérieur à trois, ôtent à la science de l'espace son sens visuel ordinaire, de façon qu'elle reste seulement un *langage*

[1] Conférence faite à la réunion du printemps de la Société mathématique suisse, tenue à Lugano, le 22 avril 1924.

imaginatif, propre à exprimer des faits qui appartiennent à l'analyse. Enfin, si vous le voulez, je puis bien admettre que la voie du progrès dans nos idées géométriques est semée de quelques cadavres. Mais, ici, comme toujours, la mort a joué le rôle qui lui revient par sa nature, dans l'évolution de la vie; je veux dire qu'elle n'est que l'aspect négatif d'une transformation profonde qui a réussi à renouveler l'esprit de la science. Et cette évolution est bien ce qui constitue la véritable justification historique de l'opposition entre analystes et géomètres que je rappelais tout à l'heure. A ce point de vue l'effort même des puristes a joué un rôle important, en amenant une adaptation mutuelle de deux ordres de concepts, qui se rattachent à des formes différentes de l'intuition mathématique.

C'est ainsi que Darboux a pu dire qu'au dernier siècle le développement autonome de la géométrie — qui, après l'introduction des coordonnées et l'invention du calcul infinitésimal, était devenue un champ ouvert à l'application de l'analyse — a contribué *dans une large mesure au renouvellement de la science mathématique toute entière, en offrant aux recherches une voie nouvelle et féconde.*

2. — C'est au domaine des équations et des fonctions algébriques que s'est attachée particulièrement l'école des géomètres italiens et il est juste de reconnaître ici que leur conception géométrique de ces problèmes a élargi et transformé la position classique des problèmes de l'algèbre.

Cette influence de la conception géométrique se montre déjà dans la considération du cas du système *déterminé*, qu'on ramène traditionnellement au cas type d'une équation unique, renfermant une seule inconnue. En effet, d'une manière générale, le traitement de problèmes où il s'agit de déterminer algébriquement un nombre fini d'objets, nous met en présence d'un certain nombre n d'équations compatibles entre $m \leq n$ inconnues, et le plus souvent il est pratiquement impossible d'effectuer les opérations d'élimination qui devraient réduire le système à une équation unique.

Pour le géomètre, il n'y a aucune difficulté à raisonner, par

exemple, sur un nombre fini de points qui constituent un groupe G, donné par les intersections de courbes planes ou de surfaces dans l'espace, ou même de variétés à plusieurs dimensions. et cela sans qu'il ait à former l'équation résultante dont on peut faire dépendre la détermination de G. Et il n'a pas besoin de développements de calcul pour comprendre que tout ce que l'on dit des fonctions symétriques ou des groupes de substitutions sur les racines de cette résultante, s'étend de suite aux fonctions symétriques ou aux groupes de substitutions définis par rapport aux points de G.

Mais la considération générale du système d'équations déterminé donne lieu à des problèmes que celui qui se rapporterait constamment à une équation unique ne pourrait même pas soupçonner, en premier lieu déjà au problème du calcul du nombre des solutions, qui est le degré de la résultante. Les exemples les plus simples tirés de la géométrie montrent la difficulté de cette recherche. Que l'on se propose, par exemple, d'évaluer le nombre des droites appartenant à une surface cubique générale, f_3; ce nombre est, comme on le sait, égal à 27, mais en écrivant les conditions pour qu'une droite appartienne à f_3, on obtient d'abord une équation d'ordre 81, dont il faut écarter une partie des solutions: la géométrie nous montre aisément les raisons de la mise à l'écart de ces solutions.

En d'autres cas, la considération d'un système d'équations rencontre des difficultés que l'on ne sait pas vaincre d'une manière directe, mais devant lesquelles l'intuition géométrique nous aide d'une façon indirecte en transformant le problème par une vision de continuité. Pour citer un exemple très simple, supposons qu'il s'agisse de trouver les équations réductibles qui appartiennent à un système linéaire d'équations quadratiques

$$\lambda_1 f_1(xyz) + \lambda_2 f_2(xyz) + \lambda_3 f_3(xyz) + \lambda_4 f_4(xyz) = 0 .$$

Il suffit de remarquer que, par une variation continue des coefficients, ce système se réduit à celui des surfaces de second ordre passant par six points 1, 2, 3, 4, 5, 6. On voit alors qu'il y a dix couples de plans analogues au couple 1, 2, 3; 4, 5, 6 et renfermant les six points, et on conclut que le problème général proposé admet également dix solutions.

C'est là le *principe* bien connu de la *conservation du nombre*, qui se dégage du principe de continuité de Poncelet, et qui est devenu par l'œuvre de mathématiciens tels que De Jonquières, Cremona, Cayley, Zeuthen et Schubert, la base d'une méthode systématique de recherche. Je n'insisterai pas sur les développements que cette méthode a reçus dans l'école italienne, en particulier par les travaux de Segre, Castelnuovo, Pieri, Severi, etc. [1]; je me bornerai seulement à rappeler que, parmi les résultats obtenus, il y a aussi la détermination rigoureuse des conditions de validité du principe en question, dont quelques-unes seulement avaient été reconnues par Zeuthen et Schubert.

3. — Le cas du système déterminé auquel se rapportent les considérations qui précèdent, n'est qu'un cas particulier dans la théorie générale des systèmes d'équations renfermant plusieurs inconnues. Or c'est dans cette théorie générale que la conception géométrique déploie encore davantage ses effets, tant au point de vue de la position des problèmes qu'au point de vue de leur résolution.

A un système d'équations quelconque correspond une variété algébrique, qui en général sera composée de plusieurs parties irréductibles. Chacune de celles-ci pourra être ramenée par une transformation, qui équivaut à une projection, à une variété d'un certain nombre n de dimensions appartenant à un espace de $n+1$ dimensions, et qui sera représentée par une équation unique entre $n+1$ variables.

Les systèmes d'équations ou les équations entre plusieurs variables, amènent à des problèmes généraux de deux ordres:

1° les problèmes qui touchent à la résolution d'une équation donnée, où il s'agit d'exprimer une partie des inconnues au moyen des autres ou même toutes les inconnues au moyen de paramètres arbitraires;

2° les questions d'existence où il s'agit de discuter, de différentes façons, les conditions d'existence de fonctions algé-

[1] Comparez par ex.: Enriques-Chisini: « Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e della funzioni algebriche », l° 3 Cap. 4. Vol. II. Bologna. Zanichelli, 1918.

briques que l'on assujettit à des conditions particulières, par exemple, à avoir des singularités données, etc.

Je parlerai d'abord de quelques problèmes de résolution, en commençant par le cas le plus simple où il y a une seule variable indépendante. C'est le cas d'une courbe, qu'il est indifférent de supposer plane ou gauche et appartenant à un espace d'un nombre quelconque n de dimensions. L'équation ou le système d'équations correspondant seront résolus de la façon la plus simple, si l'on réussit à exprimer les n inconnues (liées par $n - 1$ équations indépendantes) par des fonctions rationnelles d'une variable indépendante. La question de résolution rationnelle qui se pose ainsi, trouve une réponse dans le théorème de Clebsch d'après lequel *les courbes unicursales sont caractérisées par le fait que leur genre* p *est égal à* 0. Le genre d'une courbe est défini, comme on le sait, par de simples caractères algébriques.

De même les conditions pour qu'une équation $f(x, y) = 0$ puisse être résolue par des fonctions elliptiques d'un paramètre, s'expriment en posant le genre $p = 1$; cette condition répond aussi à la transformabilité de $f(x, y) = 0$ en une équation du troisième ordre ou à sa résolubilité par des fonctions rationnelles d'un paramètre et d'une racine carrée, portant sur un polynôme du quatrième degré de ce paramètre.

D'une manière générale les problèmes de résolution des équations algébriques $f(x, y) = 0$, conduisent à la classification des courbes par rapport aux transformations birationnelles et aux types normaux de Riemann ou de Brill et Nöther. On trouve que chaque classe est déterminée par la valeur du genre et par certaines constantes caractéristiques qu'on appelle les *modules* de la classe; pour $p > 1$, leur nombre est $3p - 3$.

4. — Passons du cas des courbes à celui des surfaces, et rappelons d'abord, très sommairement, comment la notion du genre s'étend à ce cas d'après Nöther et Zeuthen, sans nous arrêter d'ailleurs sur les développements que la théorie des invariants a reçu grâce à l'école italienne [1]. En désignant par f une

[1] Cf. Castelnuovo et Enriques: « Die algebraischen Flächen vom Gesichtspunkte der birationalen Transformationen aus ». Encyklöpädie der Math. Wissenschaften, III, C. 6 *b*.

surface d'un certain ordre n, on forme des *polynômes adjoints* d'ordre $n - 4$, φ_{n-4}, qui s'annulent sur la courbe double de f. Le nombre de ces polynômes adjoints linéairement indépendants, nombre qui a une signification invariante par rapport aux transformations bi-rationnelles, est ce que l'on appelle le *genre géométrique* de f. On le désigne ordinairement par p_g. D'autre part, sous certaines hypothèses, on obtient une expression virtuelle de ce même nombre, formée au moyen des caractères de la courbe double de f, et qui fournit dans tous les cas un invariant de f. On a ainsi le *genre numérique* p_a. Enfin à côté de p_g et de p_a, on considère encore le genre linéaire $p^{(1)}$, qui est donné par le genre des courbes découpées sur f par les φ_{n-4}.

Pour une surface rationnelle on a: $p_g = p_a = 0$. Mais ces conditions nécessaires ne suffisent pas à déterminer la classe des surfaces rationnelles. En effet, une circonstance est à remarquer, qui a son analogie dans la théorie des nombres idéaux. Il peut arriver que pour une surface f, d'ordre n, les surfaces adjointes φ_{n-4} manquent, tandis qu'il existe des surfaces *biadjointes* d'ordre $2n - 8$, passant doublement par la courbe double de f. Le système découpé sur f par ces Φ_{2n-8} se présente alors comme le double d'un système canonique qui n'existe pas, et il conduit également à des invariants de f. Le nombre des Φ_{2n-8} linéairement indépendantes est un caractère de f que j'ai appelé le *bigenre* ou genre d'ordre 2, P_2 ou P, et on a

$$P \geqq p_g .$$

Pour une surface rationnelle on a toujours

$$P = 0 ,$$

mais réciproquement le bigenre ne s'annule pas nécessairement avec le genre p_g ou p_a. C'est ainsi, par exemple, que pour la surface du sixième ordre passant doublement par les arêtes d'un tétraèdre on a $p_a = p_g = 0$, tandis que le bigenre $P = 1$. Par contre M. Castelnuovo a démontré que les conditions de rationnalité d'une surface se ramènent à annuler en même temps le genre, géométrique et numérique, et le bigenre; elles se réduisent d'ailleurs à $p_a = P = 0$.

Un problème plus général, qui renferme celui des surfaces

rationnelles, est celui de la détermination des surfaces $f(xyz) = 0$, représentables paramétriquement par des fonctions rationnelles d'un paramètre et algébriques d'un autre, c'est-à-dire des surfaces que l'on ramène par une transformation birationnelle au type du cylindre $\varphi(uv) = 0$. Pour résoudre ce problème, la considération du bigenre ne suffit plus; il est nécessaire d'introduire encore des genres d'ordre supérieur ou plurigenres P_3, P_4, ... Et alors, résultat remarquablement simple, les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une surface puisse être ramenée au type du cylindre sont simplement $P_4 = P_6 = 0$.

Les genres d'ordre supérieur ou plurigenres jouent aussi un rôle dans le problème général de la classification des surfaces, à côté des genres p_a et p_g, et du genre linéaire $p^{(1)}$. Mais il s'en faut de beaucoup qu'on parvienne à définir ainsi toutes les familles de surfaces, ou de classes de surfaces, dépendant de paramètres ou modules arbitraires. A ce sujet il faut s'attendre à des complications qui n'ont pas leur analogue dans la théorie des courbes. Je me bornerai à vous en donner un exemple. Tandis que les surfaces pour lesquelles $p_a = P_3 = P_5 = ... = 0$, $P_2 = P_4 = ... = 1$, se ramènent à la famille des surfaces du sixième ordre passant doublement par les arêtes d'un tétraèdre, au contraire les surfaces dont tous les genres sont égaux à 1, $p_a = P_i = 1$, donnent lieu à une infinité de familles distinctes, renfermant chacune 19 modules. La première de ces familles est constituée par les surfaces du quatrième ordre, la seconde par les surfaces du sixième ordre passant doublement par une courbe du même ordre qui appartient à une quadrique, etc.

5. — Les quelques exemples que je viens de citer, et d'autres analogues sur lesquels je ne m'arrêterai pas, montrent que les questions algébriques se rattachent étroitement aux questions de nombres; dans un sens élargi, elles constituent le même domaine du discret, où il semble difficile d'apercevoir *a priori* l'unité d'une loi. Et pourtant, dans un autre sens très fécond, c'est bien la loi de continuité qui règne dans ce domaine; cette même loi que nous avons reconnue sous une forme particulière dans le principe d'*invariance du nombre*, et qu'il faut découvrir partout sous des apparences contradictoires. En effet, si les

problèmes de classification amènent à différentier des familles de courbes ou de surfaces qui répondent à des caractères entiers et renferment chacune une infinité continue de classes, le passage d'une famille à d'autres est toujours possible d'une façon continue, bien qu'il soit nécessaire de passer par des cas de dégénérescence, qui n'offrent au premier abord que l'aspect de la discontinuité.

Il y a d'ailleurs plusieurs manières d'envisager la continuité du monde algébrique. Celle qui est immédiatement suggérée par ce qui précède, est la *continuité fonctionnelle.* En cet ordre d'idées, après avoir établi que la famille des courbes de genre $p (= 1, 2, 3 \ldots)$ renferme une infinité continue de classes qui, pour des valeurs singulières des modules, comprend les courbes de genre $p - 1$, on tâche de ramener l'étude des fonctions de genre p au cas plus simple de $p = 0$. On arrive alors à reconnaître qu'en effet les propositions fondamentales pour p quelconque se réfléchissent dans ce cas particulier, où il s'agit de considérer tout simplement les fonctions rationnelles d'une variable, par rapport à p couples de points de niveau que l'on doit supposer donnés d'avance [1].

6. — Si l'état actuel de la théorie ne nous permet pas encore d'atteindre à une vue analogue concernant les surfaces, l'exemple des courbes montre néanmoins que l'intuition géométrique, par ce qu'elle a de dynamique, nous aide à percevoir la persistance de propriétés qui semblent s'évanouir aux yeux de l'analyste.

C'est ainsi que la continuité se laisse découvrir directement dans la genèse des singularités. Tandis que l'enseignement ordinaire de l'analyse insiste sur les exceptions que présentent pour une fonction algébrique $y = f(x)$ ses points singuliers, c'est-à-dire les pôles et les points de ramification, où la fonction elle-même ou sa dérivée deviennent infinies, la géométrie nous apprend au contraire à relier ces exceptions aux points où la fonction est régulière. D'abord le pôle n'est qu'un point de la droite (x) auquel correspond le point à l'infini de la droite y, qui, pour la géométrie projective ne se distingue en rien des

[1] Cf. Enriques, *Math. Annalen*, t. 85.

autres points de la droite. Pour ce qui est d'un point de ramification, dans le cas le plus simple, ce n'est qu'un point de la courbe où la tangente devient parallèle à l'axe des y.

D'autre part on obtient des points singuliers plus élevés par la superposition de plusieurs points de ramification simples: deux points de ramification qui viennent se superposer, engendrent un point de ramification d'ordre supérieur (correspondant à un cycle de troisième ordre) ou bien un point double de la courbe algébrique, qui est un point critique apparent pour deux branches de la fonction algébrique. Mais en ce dernier cas encore, si un nouveau point de ramification s'approche du point double, les deux branches se fondent en une seule de second ordre, ayant un point de ramification.

L'étude des points singuliers des courbes ou des fonctions algébriques, étendue aux cas les plus élevés, constitue une théorie à laquelle ont travaillé, après Puiseux, Halphen et Nöther, et qui a progressé ces derniers temps grâce à l'école géométrique italienne. Cette étude a conduit à développer d'une manière systématique un chapitre du calcul différentiel, se rattachant à l'école de Newton, qui est généralement un peu négligé. On est arrivé à se familiariser avec des passages à la limite qu'on réussit à exprimer par un schéma graphique, de sorte que l'on a l'impression de toucher du doigt à des points infiniment voisins et à des dérivées infinies d'ordres différents.

En réalité le schéma graphique ne fait qu'exprimer la génération de la singularité, d'après une loi de continuité, qui se traduit par des conditions différentielles tout à fait précises. Aussi, obtient-on, à plusieurs points de vue, un véritable complément de la théorie des cycles de Puiseux. Tandis que les substitutions considérées par Puiseux ne suffisent pas à déterminer la nature du point singulier, on réussit cette détermination en donnant à chaque cycle d'ordre n un exposant, qui peut dépasser n, et qui résulte, entièrement défini, de la loi de continuité. Ce dernier résultat a été établi tout récemment par M. Chisini.

7. — Cette vue féconde qui consiste à chercher le continu dans le discontinu, porte aussi des contributions importantes

à des questions d'algèbre qui touchent de plus près à l'arithmétique. C'est ainsi que M. B. Levi, après Poincaré, a éclairé par des méthodes géométriques le problème des solutions rationnelles d'une équation cubique renfermant deux inconnues.

A cet ordre d'idées se rattache aussi le problème de la détermination de l'équation ou la courbe d'ordre minimum à laquelle on peut ramener une courbe f de genre p donné, par une transformation birationnelle à coefficients rationnels dans le domaine des coefficients de f. Pour $p = 0$, Nöther a montré que f peut toujours être réduite par une telle transformation à une équation de second ordre (représentant une conique) et d'après des théorèmes arithmétiques connus, de Lagrange et Legendre, on est assuré qu'il est en général impossible de pousser la réduction jusqu'à une équation du premier ordre. Autrement dit, la résolution paramétrique rationnelle de f exige l'introduction d'une irrationnalité quadratique. Il suffit d'ailleurs de remarquer qu'il est impossible de résoudre en nombres entiers non nuls l'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0 .$$

Qu'en est-il maintenant pour $p = 1$? Si on opère avec des transformations rationnelles, en laissant tomber la condition que les coefficients de la transformation soient aussi rationnels, on sait que f peut être ramenée à une cubique. On est d'autant plus étonné de trouver que, si l'on s'astreint à employer des transformations à coefficients rationnels, *il est en général impossible d'abaisser l'ordre d'une équation* f *de genre* p = 1.

On parvient à ce résultat inattendu en transportant la question du domaine arithmétique à celui des fonctions algébriques. Par une variation des paramètres, les f produisent un système de courbes analogues du même genre 1, et il s'agit de trouver les lignes qui les rencontrent en un nombre de points minimum. Le théorème énoncé revient d'ailleurs à dire que « la résolution paramétrique d'une équation de genre 1, $f(xy) = 0$, par des fonctions elliptiques, introduit une irrationnalité à laquelle s'ajoute encore une irrationnalité quadratique par rapport aux coefficients, dont le degré est en général celui de f. »

En passant au cas de $p > 1$, et en employant toujours des

transformations à coefficients rationnels, on réussit au contraire à réduire toute courbe de genre p à un type d'ordre donné.

Cet ordre est en général $2p - 2$ pour $p > 2$, e $p + 2$ pour $p = 2$ pour le cas hyperelliptique. Ainsi par exemple, *par une transformation rationnelle à coefficients rationnels toute courbe de genre 2 peut être changée en une courbe d'ordre 6, tandis qu'il faut ajouter aux coefficients une irrationnalité quadratique pour l'abaisser au* 4me *ordre*, etc.

Dans tous ces cas, l'impossibilité d'une réduction ultérieure, affirmée par les propositions que nous venons d'énoncer, se réduit toujours à la non-existence de courbes algébriques découpant en un certain nombre de points les courbes de genre p qui constituent un système construit de façon convenable. C'est ainsi que l'introduction du continu vient éclairer des questions d'irrationnalité, qui se posent d'abord sur le terrain de l'arithmétique.

8. — Au commencement de cette conférence, je vous disais que les équations et les fonctions algébriques nous amènent d'une part à des questions de résolution et d'autre part à des questions d'existence. A cet égard la géométrie apporte à l'analyse une contribution des plus précieuses. Car on ne saurait exagérer la valeur des exemples qui éclairent les questions de classification des surfaces, et que je vous rappelais tout à l'heure. Si la conception du bigenre a pu être développée d'une manière fructueuse, c'est que la surface du sixième ordre passant doublement par les arêtes d'un tétraèdre, nous fournissait à cet égard un exemple simple et instructif. De même, si on a pu supposer l'existence des familles infinies de surfaces de genres 1, que l'on est parvenu à établir ensuite au moyen des fonctions hyperelliptiques, c'est que l'intersection de deux variétés d'ordre respectif 2 et 3 dans l'espace à quatre dimensions, nous a amené d'abord à considérer une famille de surfaces de genre 1 distincte de celle des surfaces du quatrième ordre.

Ces considérations sont évidentes. Il est nécessaire de les compléter en montrant que *par la construction d'exemples particuliers on réussit souvent à résoudre des questions d'existence dans un sens tout à fait général.*

Je m'efforcerai d'expliquer ce point essentiel en me rapportant au théorème classique de Riemann, qui concerne l'existence des fonctions algébriques dont on se donne de façon arbitraire les points de ramification. On sait quelles difficultés se rattachent à la démonstration de ce théorème, en s'appuyant sur le principe de Dirichlet.

Or on peut établir le théorème de Riemann par une voie algébrico-géométrique, qui est extrêmement simple et suggestive [1].

Il faut d'abord se rapporter à la proposition élémentaire — que j'ai établie d'une autre façon en 1912 — d'après laquelle, en supposant $n > 2p - 2$, il existe au moins une fonction algébrique irréductible de degré n, qui possède m points de ramification arbitraires. On passera aux moindres valeurs de n, et également au cas de points de ramification multiples, par le rapprochement indéfini de couples de points de ramification. Il est aisé ensuite de compléter le théorème de Riemann, pour ce qui se rapporte au choix des substitutions sur les branches en correspondance avec les points singuliers (d'après une simple remarque de M. Severi, moyennant la réduction bien connue des surfaces de Riemann au type de Lüroth-Clebsch).

Le problème élémentaire que nous venons de poser se ramène à la construction d'une courbe d'un certain ordre $n + h$, ayant un point multiple d'ordre h, tangente à m droites issues de ce point, et ayant ailleurs un certain nombre de points doubles. Il est aisé de prouver qu'il y a autant de paramètres qu'il en faut pour qu'on puisse satisfaire aux conditions demandées; il faut par contre établir que parmi les courbes qu'on construit ainsi, il y en a qui sont irréductibles. Or cela est évident *a priori* dans les cas où le problème d'existence se trouve résolu, par exemple, dans le cas hyperelliptique, qui correspond à un choix particulier du groupe G des m points de ramification. Mais si la courbe hyperelliptique, que l'on obtient par les conditions posées peut être considérée comme limite d'une courbe C correspondant à un choix tout à fait général du groupe G, le prin-

---

[1] J'ai indiqué cette démonstration dans une note de l'Académie de Bologne (17 avril 1921) et elle se trouve développée à la p. 361 du Vol. III de mes Leçons citées au n° 2.

cipe de continuité nous assure que cette même courbe C sera irréductible. En tenant compte en plus de quelques détails, cette considération suffit à établir notre théorème.

9. — Je terminerai mon exposé en disant quelques mots de l'extension du théorème d'existence aux fonctions algébriques de deux variables indépendantes. La question se pose ici d'une manière nouvelle. Une fonction $z = f(x, y)$ d'un certain degré n, possède une courbe de ramification $F(x, y) = 0$, d'un certain ordre m, qui aura en général un certain nombre de nœuds et de points de rebroussement, dépendant des caractères p_a et $p^{(1)}$ de la surface (xyz). Mais cette courbe F ne saurait être donnée de façon arbitrire. Il s'agit donc de déterminer les conditions auxquelles doit satisfaire une courbe $F(x, y) = 0$ pour qu'elle soit la courbe de ramification d'une fonction algébrique de degré n, $z = f(x, y)$. Ces conditions se traduisent en des conditions élémentaires imposées aux tangentes menées d'un point (xy) à la courbe F et également aux nœuds et aux points de rebroussement de la courbe F. Ainsi la question posée reçoit une réponse, qui toutefois ne laisse pas de donner lieu à des difficultés dans les applications. Il en résulte par contre au moins une conséquence importante; c'est que, si une courbe F, ayant un certain nombre de nœuds et de points de rebroussement, satisfait aux conditions d'existence de la fonction f, ces conditions sont aussi satisfaites pour toutes les courbes du même ordre que F, qui possèdent le même nombre de nœuds et de points de rebroussement qu'elle, et qui appartiennent à une même suite continue renfermant F. Dans ce domaine, comme dans celui des courbes, on parvient ainsi à une vision de continuité qui promet d'être féconde pour le problème de la classification des surfaces.

10. — Messieurs, j'ai déjà parlé un peu longuement, et abusé peut-être de votre indulgence. Et cependant je suis loin de vous avoir donné un compte rendu, même sommaire, des recherches que l'école italienne a entreprises dans le domaine des équations et des fonctions algébriques, et qui relient en un lien intime et fécond le côté algébrique et le côté transcendant que présentent ces questions. Je me suis borné à vous expliquer par quelques

exemples quel est l'esprit qui domine ces recherches. Ainsi que je vous le disais en commençant, la géométrie s'est vidée pour nous de toute préoccupation de purisme, et même si vous le voulez, elle a disparu, comme discipline autonome, pour se fondre dans l'analyse. Mais par là-même, des intuitions et des méthodes que l'on avait cultivées avec soin en vue de buts particuliers, se sont rattachées au courant traditionnel de problèmes que le développement des mathématiques pose nécessairement à notre esprit. Si quelqu'un nous reproche de nous occuper de fonctions tout à fait particulières, en comparaison de celles qui surgissent des problèmes de la nature, je répondrai que le progrès de l'analyse paraît toujours résulter d'un contraste entre deux tendances de l'esprit mathématique, que l'on pourrait rattacher aisément au réalisme et au nominalisme du Moyen-Age. Nous nous efforçons d'une part de saisir une réalité extérieure qui s'impose à notre esprit et dépasse les cadres de nos constructions conceptuelles; d'autre part nous tâchons aussi de poursuivre le développement de ces constructions d'après les lois de notre propre esprit, qui pose d'abord le concept du nombre rationnel et des fonctions élémentaires. C'est par là que l'on est conduit aux fonctions algébriques et à celles qui en dérivent par des procédés bien définis, fonctions qui sont à peu près toutes celles que l'on peut regarder comme connues, et au sujet desquelles on peut poser des questions qualitatives. Je sais qu'entre les deux conceptions il y a un abîme, que le progrès a creusé de plus en plus; la réalité, en effet, que l'on s'était cru en état de ramener à la simplicité, qui est la loi de notre pensée, déborde des exigences de notre entendement.

Devons-nous en conclure qu'en excluant toute question qualitative, il faudra se confiner à une mathématique purement quantitative qui, pour atteindre au général, se réduira probablement à un calcul d'approximations ?

Je pose la question sans avoir la prétention de la résoudre. Je suis convaincu d'ailleurs que l'histoire de la science est plus libérale que n'importe quelle doctrine philosophique particulière, et que, si elle ouvre souvent des voies nouvelles, il est moins concevable qu'elle ferme celles que la pensée a parcouru pendant des siècles.

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE SUISSE

Conférences et communications

Réunion de Lugano, avril 1924.

Les mathématiciens suisses ont tenu leur réunion de printemps 1924 à Lugano, le mardi de Pâques, 22 avril 1924, sous la présidence de M. le prof. Speiser, de l'Université de Zurich. Ils ont choisi cette occasion pour établir des rapports plus étroits avec leurs éminents collègues mathématiciens italiens, et principalement avec l'Union mathématique italienne, représentée officiellement à la réunion par son secrétaire, M. Bortolotti, professeur à l'Université de Bologne.

L'ordre du jour comprenait deux conférences: une première conférence de M. le prof. F. Enriques, de l'Université de Rome, *Sur la théorie des équations et des fonctions algébriques, d'après l'école géométrique italienne*[1], une seconde de M. Michel Plancherel, professeur à l'Ecole polytechnique fédérale, intitulée: *Le développement de la théorie des séries trigonométriques dans les vingt dernières années*[2]. Suivaient quatre communications plus courtes de MM. L. Kollros, R. Fueter, L.-G. Du Pasquier, A. Speiser, dont voici les résumés:

1. — Prof. L. Kollros (Zurich). — *Sur une configuration de dix droites.* — Morley a démontré le théorème suivant: *Soient* α, β, γ *trois droites quelconques dans l'espace*; a, b, c, *les perpendiculaires communes à ces droites prises deux à deux*; α' *la perpendiculaire commune à* α *et* a; β' *et* γ' *les droites analogues. Les trois droites* α', β', γ' *rencontrent à angle droit une même droite* δ.

M. Bricard en a donné une démonstration basée sur des propriétés du déplacement fini d'un solide (*Nouv. Ann. de Math.*, nov. 1923); en voici une autre, directe et très simple:

Désignons les points à l'infini des droites par les mêmes lettres suivies d'un point. Les deux triangles $\alpha.\beta.\gamma.$ et $a.\ b.\ c.$ sont homologiques, puisque les côtés de l'un sont les polaires des sommets de l'autre par rapport à l'ombilicale. Les points α', β', γ' sont sur l'axe

---

[1] On trouvrea cette conférence dans le présent fascicule, p. 309.
[2] Elle sera publié dans un prochain numéro.

d'homologie; les trois droites α'. β'. γ'. sont donc parallèles à un même plan, perpendiculaire à la direction du centre d'homologie δ.

Il reste à prouver que les trois plans $\delta . \alpha'$, $\delta . \beta'$ et $\delta . \gamma'$ passent par une même droite. Prenons dans le plan à l'infini $(x_4 = 0)$ $\alpha . (1000)$, $\beta . (0100)$, $\gamma . (0010)$ pour triangle de référence et $\delta . (1110)$ comme point-unité d'un système de coordonnées projectives; les six autres points à l'infini auront alors les coordonnées: $a . (k 110)$, $b . (1 l 10)$, $c . (11 m 0)$ et $\alpha' . (0, 1\text{-}l, m\text{-}1, 0)$, $\beta' . (k\text{-}1, 0, 1\text{-}m, 0)$, $\gamma' . (1\text{-}k, l\text{-}1, 0, 0)$.

Si les plans $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ et $x_3 = 0$ sont respectivement $\beta . \gamma$, $\gamma . \alpha$ et $\alpha . \beta$, on pourra désigner les coordonnées du point (βc) par a_1 a_2 0 1); celles de (γa) par $(0\ b_2\ b_3\ 1)$ et celles de (αb) par $(c_1\ 0\ c_3\ 1)$.

α' est alors l'intersection des deux plans:

$$\alpha \alpha' . \equiv \alpha . (\alpha b) \alpha' . \equiv \quad (m - 1) x_2 + (l - 1) x_3 + c_3 (1 - l) x_4 = 0 \, .$$

et

$$a \alpha' . \equiv a . (\gamma a) \alpha' . \equiv (2 - l - m) x_1 + k (m - 1) x_2 + k (l - 1) x_3$$
$$+ k [b_3 (1 - l) + b_2 (1 - m)] x_4 = 0 \, .$$

En ajoutant la seconde équation à la première multipliée par $(1 - k)$, on a l'équation du plan $\delta . \alpha'$:

$$(2 - l - m) x_1 + (m - 1) x_2 + (l - 1) x_3 +$$
$$[c_3 (1 - l)(1 - k) + k b_3 (1 - l) + k b_2 (1 - m)] x_4 = 0 \, .$$

Par permutations cycliques, on trouve les équations de $\delta . \beta'$ et $\delta . \gamma'$ et l'on voit immédiatement que $\delta . \alpha' + \delta . \beta' + \delta . \gamma' \equiv 0$, si l'on tient compte, dans le coefficient de x_4, de la relation $c_3 = - a_2 m$, indiquant que les trois points (αc), (βc) et c. sont alignés, et des deux analogues: $a_1 = - b_3 k$ et $b_2 = - c_1 l$. Les trois plans $\delta . \alpha'$, $\delta . \beta'$ et $\delta . \gamma'$ passent donc par une droite δ.

2. — Prof. Rud. Fueter (Zurich). — *Sur les sous-groupes du groupe modulaire.* — Soient $S^{(n)}$ une substitution du groupe congruent d'ordre n, et

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} , \quad \text{où} \quad ad - bc = n \, ,$$

une substitution d'ordre n, les nombres a, b, c, d n'ayant pas de facteur commun. Lorsque $S^{(n)}$ passe par toutes les substitutions du groupe congruent d'ordre n, T restant fixe, toutes les substitutions $T^{-1} S^{(n)} T$ forment un sous-groupe du groupe modulaire et que l'on appelle groupe de transformation. Elles sont en nombre fini, à savoir:

$$\Psi(n) = n \Pi \left(1 + \frac{1}{p} \right) .$$

Elles sont conjuguées entre elles par rapport au groupe modulaire et possèdent en outre l'index fini

$$\mu(n) = \frac{n^3}{2}\Pi\left(1 - \frac{1}{p^2}\right), \quad (n > 2) .$$

Pour plus de développement, consulter mon récent ouvrage: *Vorlesungen über die singulären Moduln und die komplexe Multiplikation der elliptischen Funktionen* (Teubner. 1924), p. 33 et suiv.

3. — Prof. L.-G. Du Pasquier (Neuchâtel). — *Sur l'évolution du concept de nombre complexe entier.* — Pour construire une arithnomie, le premier pas, indispensable, consiste à définir le complexe « entier », car l'objet essentiel de toute théorie des nombres est l'étude des relations entre « nombres entiers ». Le point de départ des généralisations du concept de nombre entier ordinaire se trouve dans les *Recherches arithmétiques* de Gauss, où un nombre complexe ordinaire $a + bi$ est dit « entier » si ses deux coordonnées, a et b, sont toutes deux des nombres entiers ordinaires. — Dans le deuxième stade, on étendit ces raisonnements aux nombres hypercomplexes

$$x \equiv x_0 e_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots\ldots + x_n e_n \qquad (1)$$

sur lesquels on supposait définies l'égalité et quatre opérations rationnelles. Les x_λ, nombres réels quelconques, sont les *coordonnées* du complexe x et les e_λ des symboles dits *unités relatives* du système. Un tel nombre hypercomplexe est dit « entier », si ses n coordonnées x_λ sont toutes des nombres entiers ordinaires. Cette définition lipschitzienne, qui a l'avantage d'être univoque et toujours applicable, a servi de base aux premières arithnomies généralisées.

Troisième stade. R. Lipschitz découvre que l'on arrive parfois à des arithnomies irrégulières, si l'on prend comme base la définition ci-dessus. Exemple des quaternions. A. Hurwitz découvre que l'on peut faire disparaître les anomalies, si l'on pose une nouvelle définition du nombre hypercomplexe entier, basée sur les propriétés B, C, M et U définies comme suit.

1) *La propriété* **C** (clos): Les complexes entiers doivent former un domaine d'intégrité [J], c'est-à-dire qu'ils doivent se reproduire par addition, soustraction et multiplication.

2) *La propriété* **B** (base): Ce domaine [J] doit avoir une base finie, c'est-à-dire doit contenir des éléments t_λ en nombre fini tels que l'expression

$$m_1 t_1 + m_2 t_2 + \ldots\ldots + m_r t_r \qquad (2)$$

reproduise chaque élément du domaine [J], et seulement ceux-là, quand les m_λ parcourent, indépendamment les uns des autres, la suite des nombres entiers de $-\infty$ à $+\infty$.

3) *La propriété* **U** (unités): Ce domaine [J] doit contenir toutes les unités relatives e_0, e_1, e_2, ... , e_n. La propriété U, contrairement aux deux précédentes, n'est pas invariante en regard de toute transformation linéaire des unités relatives.

4) *La propriété* **M** (maximalité): Ce domaine [J] doit être « maximal » Désignons par [M] tout ensemble jouissant de ces quatre propriétés B, C, U et M.

La définition hurwitzienne, basée sur ces quatre propriétés, est alors la suivante: Sont dits « entiers » les nombres hypercomplexes contenus dans [M]; les autres sont réputés « non entiers ». Ce n'est donc plus, comme dans le deuxième stade, la nature des coordonnées qui décide si un complexe donné est « entier » ou non.

Quatrième stade. Je remplace la propriété U par

5) *La propriété* $\mathbf{U}_1$: Le domaine [J] doit contenir le nombre 1; il n'est pas nécessaire qu'il contienne toutes les unités relatives e_λ. Définition du domaine holoïde. Sur la propriété U, la propriété U_1 a le grand avantage d'être 1° beaucoup moins limitative; 2° invariante en regard de toute transformation linéaire opérée sur les unités relatives.

Ma première définition du nombre hypercomplexe entier, à l'aide des propriétés B, C, M, U_1, est basée sur des propriétés invariantes. Découverte que cette définition n'est pas toujours univoque. L'idée de relativité s'introduit dans l'arithnomie.

Cinquième stade. Je découvre que le plus souvent les propriétés B, C, U_1 ensemble excluent la propriété M. Les deux possibilités résultant de ce fait. Conséquences de l'abandon de la propriété C. Nouvelle définition de la propriété M. Définition subsidiaire du nombre hypercomplexe « entier » à l'aide des notions de « coordonnées-tête » et « coordonnées-terminaison ».

Sixième stade. Les propriétés C, M et U_1 ne suffisant pas pour caractériser les nombres « entiers » (comme le montre déjà l'ensemble des nombres rationnels ordinaires), on introduit:

6) *La propriété* **N** (norme) : Tous les nombres hypercomplexes du domaine envisagé ont une norme qui est un nombre entier ordinaire. C'est une propriété invariante. Ma seconde définition du nombre hypercomplexe « entier » est basée sur les propriétés C, U_1, M et N. Mr L.-E. Dickson introduit:

7) *La propriété* **R** (rang): Pour tout nombre hypercomplexe appartenant à l'ensemble considéré, les coefficients de son équation au rang sont tous des nombres entiers ordinaires. Cette propriété R, plus restrictive que la propriété N, qu'elle entraîne, est également invariante.

Définition du nombre hypercomplexe « entier » par Mr L.-E. Dickson; elle est basée sur les propriétés C, U_1, M et R. La notion des arithnomies associées. L'existence de deux catégories de systèmes de nombres hypercomplexes, 1° ceux où les sept propriétés ci-dessus définies sont compatibles; 2° ceux où elles ne le sont pas.

4. — Prof. A. Speiser (Zurich). — *Sur une transformation de contact concernant le problème restreint de la mécanique céleste.* — Un des problèmes les plus importants de cette partie de la mécanique est celui où il y a un centre de forces et où les trajectoires sont limitées à une région finie, la frontière comprenant les points où la vitesse est nulle. Il y a dans cette région deux sortes de points singuliers, dans lesquels les trajectoires présentent des points de rebroussement: 1° le centre de forces, par lequel il passe une infinité de trajectoires; 2° la frontière qui admet pour chaque point une seule trajectoire.

Il s'agit maintenant d'éloigner ces singularités. On démontre que le problème énoncé est parfaitement identique à un problème sur la sphère sans singularité quelconque et que le passage est fait par une transformation de contact, de sorte que réciproquement à chaque ensemble de courbes à deux paramètres sur la sphère et sans aucune singularité, correspond un ensemble dans la région du plan présentant les singularités indiquées. De cette manière, il est possible de transposer les théorèmes bien connus sur les courbes d'une sphère immédiatement à ce problème de mécanique.

D'autre part, il est impossible de relier les deux problèmes par une transformation de points en laissant intact le caractère d'Analysis situs de la question.

MELANGES ET CORRESPONDANCE

Sur les bitangentes d'une quartique.

Réponse à une question de M. Marcel Winants.

Dans son article *Fonctions elliptiques et quartiques binodales* de l'*Enseignement Mathématique* (tome XXIII, nos 3-4, p. 148-163), M. Winants a demandé l'explication du fait qu'une équation formée pour donner les bitangentes d'une quartique se trouvait être du 10e degré, alors que les formules de Plücker indiquent 8 bitangentes. Nous sommes heureux de lui fournir ici la solution de cette difficulté.

Il nous a en effet paru évident que l'équation (25), formée à partir de l'équation (24) avec une élévation au carré de $\wp' v$, devait admettre une racine double en $\wp v$, non seulement pour une racine double $v_1 = v_2$, mais aussi pour deux racines opposées $v_1 = -v_2$; la symétrie de la quartique étudiée montrait qu'alors $\wp' u = 0$, de sorte que $\wp u$ est

une des racines de $4\wp^3 u - g_2 . \wp u - g_3 = 0$. Ceci peut se vérifier dès l'équation (24), sinon il faut constater que le discriminant de l'équation (25) est divisible par $\wp'^2 u$, ce qui est plutôt fastidieux avec les coefficients développés de l'équation (25). Aussi il nous semble préférable de rétablir dans ce but cette équation sous la forme:

$$\wp''^2 u . \wp^2 v + 2\wp u (\wp''^2 u - 8\wp u . \wp'^2 u) \wp v + \wp''^2 u . \wp^2 u - 32 \wp'^2 . \wp^3 u + 4\wp'' u . \wp'^2 u . \wp u = 0 .$$

On reconnaît ainsi que le discriminant de cette équation a bien en facteur $\wp u . \wp'^2 u$; le polynôme restant après division par $\wp'^2 u$ n'est plus que du 7e degré en $\wp u$, mais ceci s'explique en remarquant qu'en dehors des solutions fournies par l'équation formée, la droite de l'infini est aussi une bitangente. L'accord avec les nombres de Plücker est donc bien rétabli.

31 mai 1924. P. C. DELENS (Le Hâvre).

A propos de l'interprétation géométrique du problème du scrutin.

La méthode proposée par M. AEBLY dans le dernier fascicule de l'*Enseignement mathématique* (p. 185) pour la résolution de ce problème classique se base d'une part sur une certaine considération de symétrie, d'autre part sur la représentation géométrique du jeu par des chemins tracés dans un réseau rectangulaire. Des considérations de symétrie presque identiques furent employées déjà par DE MOIVRÉ[1] pour la résolution des problèmes sur la durée du jeu qui, à proprement parler, comprennent celui du scrutin comme cas particulier. L'interprétation géométrique fut introduite par DELANNOY[2]. On trouve dans la *Théorie des nombres* de LUCAS[3] une démonstration à peu près identique à celle proposée par M. Aebly. Récemment, M. PÓLYA a fait usage systématique de la représentation géométrique en question dans plusieurs travaux[4] et, notamment, aussi dans ses cours sur le calcul des probabilités professés à l'Ecole polytechnique fédérale. Je me suis servi de la même méthode dans ma thèse[5] pour traiter

[1] The Doctrine of Chance, 2d ed., London, 1738.
[2] Emploi de l'échiquier pour la solution de problémes arithmétiques. Congrès de l'A. F. A. S., Nancy, Paris et Limoges.
[3] Théorie des nombres. Tome I, Paris, 1891.
[4] I. Anschauliche u. Elementare Darstellung der Lexisschen Dispersionstheorie. *Zeitschrift für schweiz. Statistik u. Volkswissenschaft*, 55. Jahrgang, 1919. — II. Anschaulich-experimentelle Herleitung der Gausschen Fehlerkurve. *Zeitschrift für math. u. nat. Unterricht*, Bd. LII. — III. Ueber eine Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung betreffend die Irrfahrt im Strassennetz. *Math. Annalen*, Bd 84, 1921.
[5] Zur Theorie verketteter Wahrscheinlichkeiten. Markoffsche Ketten höherer Ordnung. Diss. Eidg. Tech. Hochschule, Zürich, 1924.

certains cas d'épreuves interdépendantes, en poursuivant les travaux remarquables de A. Markoff.

Voici une généralisation du problème du scrutin : dans une urne se trouvent $x + y$ bulletins, dont x sont favorables à A et y à B. On sait d'avance que $x > my$, m étant un entier positif. Quelle est la probabilité qu'une pareille inégalité soit maintenue pendant tout le cours du dépouillement, c'est-à-dire qu'en tirant successivement les bulletin de l'urne, le nombre de ceux favorables à A dépasse toujours le nombre de ceux favorables à B multiplié par m? Pour $m = 1$, c'est le Problème d'André. Pour $m > 1$ le problème paraît nouveau. On en trouve la solution dans ma Thèse (voir § 4, p. 11-15). On pourrait proposer le même problème sous une forme différente, comme problème relatif à la durée du jeu.

18 juin 1924. A. Aeppli (Zurich).

CHRONIQUE

Congrès de Toronto, août 1924.

Nous avons déjà annoncé le Congrès international de mathématiques qui aura lieu à Toronto, du 11 au 16 août 1924, sous les auspices du Royal Canadian Institute et de l'Université de Toronto. C'est pour la première fois que les mathématiciens se réunissent en un congrès international sur le continent américain.

Grâce au généreux concours obtenu par le comité d'organisation présidé de M. le prof. J.-C. Fields, de nombreuses universités et la plupart des sociétés savantes pourront se faire représenter au Congrès.

L'*Union internationale mathématique*, fondée à Strasbourg le 20 septembre 1920, tiendra son assemblée générale le vendredi 15 août, sous la présidence de M. Ch. de la Vallée Poussin, assisté de M. G. Kœnigs, secrétaire général.

L'*Enseignement mathématique* publiera un compte rendu détailllé du Congrès.

Société mathématique de France.

A l'occasion du 50me anniversaire de sa fondation, la Société mathématique de France a organisé une série de conférences qui eurent lieu à la Sorbonne, les 22, 23 et 24 mai, sous la présidence de M. Emile

Picard, secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences. En voici le programme: *Jeudi 22 mai*, à 20 h. 45, *Le principe d'Huyghens*, par M. J. Hadamard, membre de l'Institut. *Vendredi 23 mai*, à 17 h., *Les séries d'interpolations*, par M. N.-E. Nörlund, doyen de la Faculté des Sciences de Copenhague. *Samedi 24 mai*, à 15 h. 30, *La classification des surfaces algébriques au point de vue des transformations birationnelles*, par M. F. Enriques, professeur à l'Université de Rome.

La *séance solennelle du cinquantenaire* eut lieu le samedi soir 24 mai, dans le grand amphithéâtre de la Sorbonne, sous la présidence de M. Raymond Poincaré, président du Conseil, ministre des affaires étrangères, assisté de M. Henri de Jouvenel, ministre de l'Instruction publique et des Beaux-Arts, et de M. Emile Picard, secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences. Des discours furent prononcés par M. Picard, sur *Le rôle des sciences mathématiques*; par M. de la Vallée Poussin, parlant au nom des mathématiciens étrangers, membres de la Société Mathématique, et par M. Raymond Poincaré, président du Conseil. Au programme figuraient en outre les conférences de M. Lecornu, membre de l'Institut, *Sur les applications diverses de la mécanique*, de M. M. D'Ocagne, membre de l'Institut, *Sur l'Histoire des machines à calculer*, de M. E. Borel, membre de l'Institut, sur *Henri Poincaré*, et de M. B. de de Fontviolant, *sur les mathématiques et l'art de l'ingénieur*. L'orchestre des élèves de l'Ecle polytechnique avait prêté son concours à cette belle cérémonie.

57e Congrès des Sociétés savantes.

La section des Sciences de ce Congrès a tenu séance à Dijon, le mardi 22 avril 1924, sous la présidence de M. le lieutenant-colonel Andrieu.

M. Perrenoud, au nom de MM. Fréchet, Perrenoud et Mahrer, lit une communication *Sur l'ajustement des tables de mortalité par la méthode de Tchébicheff*.

M. Sergesco, de Paris, présenta une communication *Sur le calcul de quelques intégrales de la forme*

$$\int \frac{\alpha(x)\,dx}{\varphi^m(x)\,\varphi'^n(x)},$$

qui conduit notamment à des intégrales de la forme.

$$\int \frac{\alpha(x)\,dx}{\cos x^m \sin nx}.$$

M. le lieutenant-colonel Andrieu expose ses idées sur la *nécessité de la vulgarisation d'une mesure d'angle rationnelle*.

La section a reçu, d'autre part, les communications suivantes: M. l'abbé Anthiaume, du Havre, *Comment la science grecque a-t-elle été transmise aux peuples latins ?*

M. Fréchet, *Sur la terminologie de la théorie des ensembles abstraits.*

M. Urysohn, de Moscou, *Sur un problème de M. Fréchet relatif aux classes des fonctions holomorphes.*

M. A. Gérardin, *Solution, en nombres entiers, de l'équation*

$$x^4 + y^4 = xy(x^2 + y^2) + ka^2x^2$$

problème qui avait été posé pour ka^2 égal à 2736, dans la *Revista de Matematicas y Fisicas elementales*, de Buenos-Aires, et que j'avais résolu (5me année, 1924-24, nº 110, p. 157). (Note de M. B. Ig. Baidaff).

André Gérardin (Nancy).

Nouvelles diverses. — Nominations.

MM. M. Amaldi, professeur à l'Université de Padoue, et L. Silla, professeur à l'Université de Gênes, ont accepté le passage à l'Ecole supérieure d'architecture, récemment ouverte à Rome.

M. D. Gigli a été admis à l'Université de Pavie en qualité de privat-docent pour l'analyse algébrique.

M. Rolin Wavre, professeur extraordinaire, a été nommé professeur ordinaire à l'Université de Genève.

Nécrologie.

Cl. Guichard. — Le 27 mai 1924 est décédé à Paris M. Claude Guichard, correspondant de l'Institut, professeur de géométrie supérieure à la Faculté des Sciences. On lui doit de nombreux travaux de géométrie infinitésimale, notamment une théorie générale des réseaux et des congruences dans un espace à un nombre quelconque de dimensions. M. Guichard avait publié un Traité de Géométrie fort répandu, ainsi qu'un ouvrage intitulé « Problème de mécanique et Cours de cinématique ».

A. Gutzmer. — Nous apprenons avec regret la mort de M. Auguste Gutzmer, professeur à l'Université de Halle, décédé le 10 mai 1924, à l'âge de 64 ans. Mathématicien de grand mérite et doué d'un véritable talent d'organisation, Gutzmer a pris une part très active au progrès de l'enseignement scientifique et au développement de la Société Mathématique allemande, dont il dirigea le *Jahresbericht* depuis 1894.

L. de la Rive. — La science suisse vient de perdre l'un de ses représentants les plus distingués, M. Lucien de la Rive, décédé à Genève le 4 mai 1924, à l'âge de 90 ans. Fils du grand physicien Auguste de la Rive, qui fut avant tout un expérimentateur, il se dirigea plus particulièrement vers la physique théorique et mathématique. On sait qu'il avait entrepris autrefois, avec le physicien genevois Edouard Sarasin, les recherches qui ont donné des résultats importants et qui avaient trait aux ondes hertziennes. Jusqu'à la veille de sa mort, il ne cessait de s'intéresser aux problèmes les plus nouveaux et les plus délicats de la physique moderne y compris la théorie de la relativité. Esprit très cultivé, Lucien de la Rive était aussi un peintre très apprécié et un écrivain de talent.

H. F.

Corrado Segre. — Nous avons le grand regret d'annoncer le décès de ce savant géomètre, survenu à Turin, le 18 mai 1924. Ayant été à ses débuts un promoteur génial de la géométrie des hyperespaces, il donna ensuite des contributions fondamentales à la géométrie algébrique et projective différentielle.

Par ses leçons, à larges horizons et en même temps minutieusement soignées, par l'intérêt paternel dont il suivait les recherches de ses élèves, il exerça une puissante, heureuse influence sur toute l'école géométrique italienne.

Né le 20 août 1863 à Salazzo (Turin), il fut nommé à 25 ans professeur de géométrie supérieure à l'Université de Turin et garda cette situation jusqu'à sa mort. Il était membre de toutes, peut-on dire, les Académies italiennes, membre d'honneur de plusieurs institutions étrangères.

Son esprit élevé d'homme, de chercheur, de maître et son œuvre bienfaisante étaient universellement entourés de la plus grande sympathie.

BIBLIOGRAPHIE

Georges Bouligand. — **Leçons de géométrie vectorielle préliminaires à l'étude de la Théorie d'Einstein.** — Préface de M. Edouard Goursat. — Un vol. de VIII-356 pages; 25 fr.; Vuibert, Paris, 1924.

L'ouvrage que voici est d'un caractère éminemment original et synthétique; on peut passer sur les généralités du calcul vectoriel et faire un tableau des plus intéressants rien qu'avec les points où l'auteur a marqué, et combien nettement, son esprit personnel. Ainsi, dans la première partie, relative aux opérations vectorielles en géométrie linéaire, il faut noter l'introduction et la définition des déterminants d'ordre n par les propriétés de l'étendue définissable à l'aide de n vecteurs. C'est absolument dans la nature des choses et explique déjà partiellement pourquoi les méthodes einsteiniennes sont en rapport si étroit avec les déterminants: ceux-ci sont adéquats à une géométrie linéaire générale.

La Deuxième partie du livre a trait aux opérations vectorielles métriques; celles-ci reconstruisent la trigonométrie plane et sphérique, introduisent les formes bilinéaires et quadratiques, opposent deux multiplications, l'une scalaire, l'autre vectorielle, conduisent enfin aux réductions canoniques de la théorie des vecteurs glissants.

Mais c'est surtout dans la Troisième partie, traitant des opérations vectorielles infinitésimales, que nous allons avoir à nous arrêter et à méditer. La notion générale de dérivation géométrique conduit à l'extension vectorielle de la formule de Taylor; le cas où le paramètre variable est un arc de courbe gauche mène à la théorie complète de ces courbes (courbure, torsion, formules de Frenet, représentations sphériques, développées et développantes). Puis voici, dans le même ordre d'idées, les propriétés métriques des surfaces. Après le ds^2, on peut aborder les surfaces à ds^2 donné, c'est-à-dire les surfaces applicables, mais ici il faut insister particulièrement. Avec le premier ds^2, une surface n'est pas complètement connue; des dérivées géométriques secondes restent indéterminées en un point quelconque de la surface et c'est avec celles-ci que M. Bouligand forme une seconde forme quadratique (forme métrique externe) qui, supposée donnée, achève la détermination intrinsèque, pourvu que soient remplies trois conditions d'intégrabilité. Ceci doit évidemment être équivalent à la théorie des formes quadratiques fondamentales auxquelles sont associées les conditions bien connues de Gauss, Codazzi, Weingarten... mais l'auteur du présent livre a trouvé le moyen, sur ces points, d'être d'une brièveté des plus remarquables, toujours avec des formules courtes et facilement maniables.

La recherche d'une formule vectorielle qui serait l'image fidèle de la formule de Taylor montre assez les difficultés qui naissent de l'abus de

symbolisme et qui limitent l'efficacité du Calcul vectoriel. On aperçoit ainsi la raison d'être du Calcul tensoriel. Enfin, les paramètres différentiels de la théorie des surfaces commencent à apparaître derrière des produits vectoriels d'une grande simplicité.

Voici maintenant les opérateurs à constitution différentielle qui — on sait que ce n'est pas un paradoxe — naissent volontiers sous des intégrales multiples: divergence, rotationnel, ∇ d'Hamilton et ∇^2 laplacien. Belle occasion de développer quelques généralités sur le potentiel newtonien.

Aux formules intégrales s'adjoint tout naturellement la notion de fonction de ligne, avoisinant celle de variation, développée, en particulier, par celle de géodésique. Ceci nous ramène à la courbure totale et à la courbure géodésique si esthétiquement liées en la formule d'Ossian Bonnet. Ce sont ces études de courbure qui nous conduisent jusqu'aux conceptions géométriques les plus récentes, celles relatives à l'étude d'une surface sur elle-même, sans considération de l'espace extérieur. Certes c'était le point de vue de Riemann avec le transport d'étalons flexibles, mais incontractiles et inextensibles; il est maintenant dépassé par l'étalonnage variable de H. Weyl. La partie principale du volume se termine alors par des comparaisons entre propriétés intrinsèques d'une surface et propriétés de l'espace ambiant mais c'est toujours la géométrie géodésique qui apparaît comme la plus naturelle et la plus féconde.

Trois Notes achèvent le volume. La première expose les principes du Calcul tensoriel avec un redressement des notations utilisées jusqu'ici; la contrevariance est indiquée par l'indice inférieur, comme dans x_i, et c'est alors la covariance qui s'accommode des indices supérieurs.

La seconde Note traite des multiplicités de Riemann à plus de deux dimensions; ici apparaît, dans toute la généralité, le déplacement parallèle de M. Levi-Civitá avec lequel on arrive facilement aux tenseurs de courbure.

Les Principes de la Géométrie forment l'objet de la troisième Note. On y voit, avec Cayley, Hilbert, Poincaré, le caractère arbitraire des postulats, sans préjudice de l'impeccable enchaînement logique de leurs conséquences.

Je n'ai point d'éloges à faire après ceux dont M. E. Goursat a émaillé une belle et substantielle préface; l'étude du livre fera d'ailleurs comprendre à quel point ces éloges sont mérités.

A. Buhl (Toulouse).

N. B. — M. G. Bouligand prie *L'Enseignement mathématique* de signaler une erreur dont la rectification n'a pu être faite dans les premiers exemplaires mis en circulation.

Il s'agit des ombilics, n° 138, p. 147. Par un ombilic, il passe une infinité de *directions principales* mais non forcément de lignes de courbure. C'est ce qu'on aperçoit immédiatement dans le cas des quadriques. Voir, sur ce point, le tome III du *Traité d'Analyse* de M. Emile Picard, p. 231 de la seconde édition.

C. Burali-Forti et T. Boggio. — **Espaces courbes. Critique de la Relativité.** — Un vol. gr. in-8° de xxiv-256 pages; 50 lires; sten, Editrice, (Società Tipografico-Editrice Nazionale). Turin, 1924.

Cet ouvrage émanant de deux savants bien connus est à coup sûr assez inattendu. Généralement les critiques contre les théories relativistes venaient de gens incapables de s'assimiler les mathématiques nécessaires à leur compréhension. Ici il semble que nous assistions à un fait contraire; le point de vue einsteinien est mathématiquement dépassé.

D'abord, je pense que les auteurs ne m'en voudront pas si je dis que l'étude de la partie mathématique de leur livre, si soigneusement et joliment présenté au point de vue matériel, m'a semblé fort difficile. J'ai le sentiment très net de n'y être parvenu que parce que je connaissais l'analyse einsteinienne; dès lors — première critique — quel gâchis cela ne va-t-il pas produire chez les pauvres d'esprit qui n'ont jamais rien compris à cette analyse, mais qui trouveront de bon goût de paraître emboîter le pas aux deux géomètres italiens ?

Mais quelle est l'idée scientifique fondamentale du volume ? Il m'a paru que, sous le nom d'homographie vectorielle, les auteurs construisaient une théorie linéaire, vectorielle et tensorielle, de prétentions extrêmement générales. Les invariances, covariances et contrevariances qui s'offrent naturellement, de la géométrie de Riemann aux théories d'Eisntein, s'en voient surajouter beaucoup d'autres et, une fois en présence de cet arsenal *logique*, dont toutes les parties ont, *logiquement*, un droit égal à la considération, les mêmes auteurs demandent de quel droit les einsteiniens croient voir quelque chose de définitivement acceptable dans leurs considérations, puisque celles-ci n'utilisent, *arbitrairement*, qu'une petite partie du matériel de l'arsenal.

Il me semble d'abord qu'on peut répondre — et ceci est un lieu commun — que l'Univers sensible n'aura jamais qu'un rôle minime — j'allais dire infinitésimal — par rapport à l'ensemble des Univers logiques. Ensuite, c'est bien la première fois que je vois prétendre que les généralisations d'une théorie détruisent celle-ci. En France, un géomètre de grand talent M. Elie Cartan, s'est avisé de déceler que, si les espaces einsteiniens sont diversement incurvés, ils sont, en revanche, toujours dépourvus de torsion et M. Cartan tente de généraliser la théorie dans l'espace tordu; toutefois, il n'en conclut pas au rejet du modèle simplement incurvé.

D'autre part, MM. Burali-Forti et Boggio n'aiment point l'espace-temps. Ma foi, on peut laisser de côté les discussions sur la réalité de cet espace et n'y voir qu'une image indéniablement commode. Un de nos plus savants relativistes de langue française, M. Th. De Donder, de Bruxelles, a déjà remarqué, voici plusieurs années, que les propriétés de l'espace-temps pouvaient se retrouver dans l'espace ordinaire pourvu d'ultra-électrons; la correspondance possible entre les deux choses ne lui a pas fait conclure que la première était sans valeur.

J'en ai dit assez, je crois, pour montrer que l'œuvre en litige pourra être incontestablement utile *auprès des savants*; ceux qui cherchent des généralisations de la gravifique einsteinienne y trouveront certainement des matériaux utiles, mais je doute fort qu'ils adoptent ensuite les vues purement négatives des logiciens de Turin.

Au point de vue historique, l'ouvrage est aussi fort digne d'estime, Il contient notamment un aperçu des recherches, de M. C. Somigliana. sur la transformation de Lorentz, laquelle remonterait à W. Voigt et à 1887. Une interprétation newtonienne en est possible et cela ne me gêne en rien. Mais pourquoi l'interprétation lorentzienne est-elle si gênante ? Partout, à moins de croire à l'absolu, il n'y a que formes et interprétations et quand Lorentz et Einstein nous montrent une méthode, *première en date*, qui unit l'électromagnétisme et les phénomènes gravitationnels, sans chercher à dissimuler ce qu'elle a d'arbitraire, ce ne sont pas d'autres correspondances, auxquelles on pense après coup, qui peuvent annihiler la valeur de l'algo-

rithme initial. Il reste seulement à ordonner l'ensemble; je prétends que MM. Burali-Forti et Boggio y contribueront, car un livre comme le leur ne passera pas sans faire réfléchir utilement. Un point sur lequel ils ont eu nettement tort, c'est d'avoir pris texte de toutes les rêveries romantiques de prétendus vulgarisateurs; ces derniers ne méritent pas qu'on les combatte, car s'ils cultivent le paradoxe, pour l'amusement des incompétents, sur des terrains qui ne sont point ceux de la science, les véritables savants n'ont pas à s'occuper d'eux.

A. Buhl (Toulouse).

Gaston Julia. — **Leçons sur les fonctions uniformes à point singulier essentiel isolé,** professées au Collège de France et rédigées par P. Flamant (Collection E. Borel). — 1 vol. gr. in-8° de VIII-152 p., 20 fr.; Gauthier-Villars et Cie, Paris, 1924.

Ces belles leçons se rapportent surtout à des théorèmes dont le prototype a été mis en lumière, en 1879, par M. Emile Picard. Il s'agit des équations analytiques, lesquelles possèdent *presque* fatalement des racines. Naturellement, il suffit qu'on soit amené à dire *presque* pour que le mathématicien étudie, avec acharnement, les cas où la prédiction générale ne se vérifie pas. Et, là comme ailleurs, ce sont surtout les cas singuliers, qui sont les plus dignes objets de science. M. E. Picard avait d'abord montré qu'à une fonction entière correspondait, au plus, une valeur finie que la fonction ne pouvait prendre; la démonstration s'appuyait sur la théorie de la fonction modulaire. M. E. Borel, tout en cherchant à généraliser l'assertion, avait voulu des démonstrations directes. MM. Landau, Carathéodory, Schottky ont pu passer de la fonction entière au cas plus général de la fonction simplement *uniforme* connue, au voisinage de l'origine, par un développement taylorien. Puis vient, dans l'ordre logique, le théorème général de M. Picard sur la fonction uniforme au voisinage d'un point essentiel et qui ne peut se refuser à prendre que deux valeurs au plus. C'est du côté des démonstrations que se manifeste peut-être le plus d'intérêt, à cause de la dualité indiquée. La théorie générale des fonctions doit certainement pouvoir se suffire à elle-même mais il est aussi bien intéressant de se demander si la fonction modulaire ne pourrait pas encore se prêter à des démonstrations généralisant celle donnée, en premier lieu, par M. Picard. Dans l'ouvrage de M. Gaston Julia, il semble que c'est surtout cette dernière méthode qui soit remise en honneur et le jeune et brillant auteur, après avoir rappelé brièvement les principes de la théorie des fonctions uniformes, a justement développé quelques généralités modulaires dont il se sert ensuite dans tout le cours de l'ouvrage, comme d'instruments d'une grande puissance.

Parmi les notions qui servent à approcher d'un point singulier, qu'on peut toujours prendre pour origine, signalons aussi celle de *famille normale* de fonctions, travaillée surtout par M. P. Montel. C'est l'étude de la suite dont le terme général est $f(\sigma^n z)$; cette suite, considérée dans une seule et même couronne, remplace l'étude de $f(z)$ dans des couronnes tendant à s'évanouir en O. Dans le cas des fonctions méromorphes, la méthode permet des dénombrements de pôles.

Les trois derniers chapitres de l'ouvrage seront peut-être les plus féconds comme laissant entrevoir un grand nombre d'applications, non toutes

énumérées d'ailleurs. Il ne s'agit pas tant, pour percer le mystère du point singulier, de l'entourer étroitement de toutes parts que d'aller vers lui, par des chemins exceptionnels et habilement choisis. Déjà, M. G. Mittag-Leffler, dans ses élégantes recherches sur la sommabilité, avait besoin de fonctions entières s'annulant à l'infini, sur tout rayon vecteur, sauf sur ceux contenus dans un angle qui pouvait se fermer et se réduire à une demi-droite unique. L'école scandinave a continué; le point à l'infini de la fonction entière est devenu le point essentiel quelconque de la fonction uniforme te, pour approcher du monstre, il n'y a point de labyrinthe à démolir nécessairement; il faut, de manière beaucoup plus délicate, rechercher quelque nouveau fil d'Ariane.

Qu'on excuse cette comparaison, peut-être un peu trop lyrique; elle m'est venue naturellement en suivant la pensée toujours si claire et si élégante de M. Gaston Julia.

A. Buhl (Toulouse).

S. Lefschetz. — **L'Analysis Situs et la Géométrie algébrique.** (Collection E. Borel). — 1 vol. gr. in-8° de VI-154 pages; 20 fr.; Gauthier-Villars et Cie, Paris, 1924.

Voici un ouvrage savant, très savant. continuant dignement les grands Mémoires dus à Henri Poincaré et le Traité des *Fonctions algébriques de deux variables* de MM. E. Picard et G. Simart. Les surfaces algébriques ont — comme les courbes algébriques d'ailleurs — une géométrie propre qu'on peut considérer au point de vue topologique pur. Mais, avec des variables complexes, on est si rapidement transporté dans des espaces où notre sentiment géométrique ordinaire est d'un secours à peu près nul qu'on se demande, tant qu'on n'est pas sorti de ces pures questions de topologie, ce qui sera finalement utilisé de cette redoutable géométrie. La réponse est du côté du calcul intégral.

C'est la théorie des intégrales, simples et doubles, de leurs périodes, de leurs types réduits qui ne va pas sans les préliminaires géométriques précédents, mais, tout de même, je conseillerai volontiers l'étude des intégrales bien avant que l'on ait débrouillé l'écheveau topologique. Certes, en procédant ainsi, on ne tardera pas à se heurter à des difficultés qu'on ne vaincra qu'en revenant à l'écheveau, mais on saura alors pourquoi l'on y revient et l'on verra que la complexité géométrique est conditionnée au fonds par des raisons analytiques relativement simples. C'est d'ailleurs l'ordre historique. Et ceci peut encore être vérifié par des résultats, dus à M. Lefschetz lui-même et relatifs aux courbes algébriques à considérer sur une surface; les résultats analytiques de Poincaré sur les intégrales doubles attachées à la surface, dans leurs relations avec les théorèmes abéliens relatifs aux courbes n'expriment précisément que des faits géométriques facilement saisissables.

Quand on en est là, on peut continuer sur les variétés algébriques à plus de deux dimensions et c'est l'occasion de reconnaître que la voie précédemment parcourue a bien acquis définitivement la forme la plus souhaitable au point de vue logique car, par exemple, sur les variétés les plus quelconques, on voit se dessiner la théorie des sous-variétés tout comme se dessinait d'abord celle des courbes sur les surfaces proprement dites. Plus on avance, plus on est payé de sa peine, car voici maintenant les fonctions abeliennes qui se construisent sans inversion en utilisant quelques théorèmes seulement

d'Analysis Situs. Et voici encore les fonctions à multiplicateurs, les fonctions Θ, bref, en quelques pages, tout l'appareil abélien qui paraît acquérir une curieuse simplicité dans un cadre géométrique qu'il fallait savoir choisir.

Des notes terminent l'ouvrage; j'y remarque surtout les intégrales doubles *impropres*, qui étendues à des domaines finis s'expriment par des intégrales simples relatives au contour du domaine. Ce ne sont pas, au fond, de véritables intégrales doubles et, dans les classifications, il importe de les démasquer, ce qui ne va pas sans difficultés redoutables étudiées d'abord par M. Picard et réétudiées, encore très élégamment, dans le présent volume.

Bel ouvrage, à début sévère, mais à développements sûrs, puissants et féconds.

A. Buhl (Toulouse).

Paul Montel. — **Statique et Résistance des matériaux.** — 1 vol. in-8° de vi-276 pages et 138 figures; 30 fr.; Gauthier-Villars et Cie, Paris, 1924.

Ceci est le cours professé par M. P. Montel à l'Ecole nationale supérieure des Beaux-Arts, pour les élèves architectes, et il est vraiment curieux de voir comment l'analyste, s'adaptant aux besoins et aux habitudes de son auditoire, est devenu plus particulièrement géomètre, pour ne point dire artiste. Il nous donne, en effet, un très esthétique ouvrage avec de nombreuses et élégantes figures, peu de calculs, beaucoup d'exercices intéressants, le tout dirigé par un sens très sûr du procédé graphique.

Sans doute il faut savoir respecter la psychologie d'élèves à qui l'on ne pourrait montrer une intégrale sans leur faire croire que ce symbole appartient à des mathématiques transcendantales; aussi l'auteur n'a fait de l'intégration que sous forme graphique, décomposant généralement les aires quelconques en éléments rectangulaires approchés et combinant projections et moments en de faciles dynamiques et funiculaires. Les opérations relevant d'une technique à étudier et celles qu'imagineraient le simple bon sens ou l'habitude courante sont aussi traitées de manière uniforme, les premières profitant de la lumière d'apparence évidente qui s'attache aux secondes.

Signalons, comme particulièrement suggestives, la théorie des moments d'inertie avec des aperçus complets sur les axes et l'ellipse d'inertie, puis celle des forces proportionnelles aux éléments d'aire auxquels elles sont appliquées. Les courbes funiculaires ont d'ailleurs illustré le calcul différentiel, permettant d'introduire les dérivées premières et secondes et la recherche réciproque de leurs fonctions primitives toutes choses dont on fera ensuite l'usage le plus naturel dans la théorie des forces intérieures et de la flexion.

Vraiment l'ouvrage est heureux; il faut bien se garder de dire qu'il sera bienvenu de ces praticiens — dont la race tend d'ailleurs à disparaître — qui veulent pratiquer sans mathématiques, mais qu'il donnera l'esprit mathématique à ceux qui pensent surtout de manière visuelle, en dessinant et en traçant.

A. Buhl (Toulouse).

Michel Petrovitch. — **Durées physiques indépendantes des dimensions spatiales.** — Une brochure in-8° de 32 pages, Imprimerie Jean Frey, Zurich; A. Blanchard, Paris, 1924.

Cet élégant opuscule revient sur une des questions les plus épineuses de la relativité restreinte. Les temps locaux particuliers à divers phénomènes sont-ils cependant compatibles avec l'existence d'un temps universel unique ? Il semble que l'on puisse répondre affirmativement pour plusieurs raisons. Ainsi, pour M. Bergson, les objets qui subissent la contraction de Lorentz ne sont pas modifiés intrinsèquement; il y a une perspective de la vitesse, de même qu'il y a une perspective de l'éloignement et, toujours de même, les temps locaux sont, en quelque sorte, des perspectives d'un temps unique et immuable. Quant à définir ce dernier, M. Petrovitch croit, avec Lipmann, qu'on pourrait s'adresser à des propriétés de la matière, absolument indépendantes de l'état de mouvement, telles la résistivité électrique. Il décrit, à cet égard, un dispositif expérimental qui présente d'intéressantes propriétés. Cette intervention de la matière, en relativité restreinte, n'est pas sans causer un certain malaise mais l'éminent professeur de l'Université de Belgrade voit certainement toutes les difficultés de la question et il a fait une tentative indéniablement intéressante en essayant d'accorder l'abstraction relativiste avec les idées d'un physicien tel que Lipmann.

A. Buhl (Toulouse).

Bertrand Russell. — **Principes de Reconstruction sociale.** Traduit de l'anglais par E. de Clermont-Tonnerre. — Un vol. in-8° de 184 pages, 10 fr.; Payot, Paris, 1924.

Voici un livre qui, par son titre, ne paraît pas concerner notre Revue. Il en est autrement si l'on considère le nom de l'auteur et il devient alors intéressant de voir quelles sont les opinions sociales d'un logicien des mathématiques. Hélas, cette curiosité m'a apporté une grosse déception. Je ne connaissais pas du tout la personnalité de M. Russell, pas plus que je ne connais suffisamment les partis anglais pour voir dans lequel on doit exactement ranger l'auteur; mais, en France, il faudrait le placer dans ceux où il semble qu'on veuille changer jusqu'à la nature humaine elle-même et où l'on ne semble pas s'apercevoir que pour étudier, de façon *valable*, la millième partie des choses que l'on se propose de transformer et des répercussions que les transformations pourraient avoir, l'existence entière d'un homme très intelligent serait encore insuffisante. L'auteur ne disserte pas mal des mobiles humains quand il y voit surtout « désir » et « impulsion », choses qu'il distingue soigneusement. Qu'un peuple en attaque un autre, il y a impulsion (mauvaise, en général), mais si le peuple attaqué ne songe, sans réfléchir, qu'à courir aux armes et à lutter, il subit aussi une impulsion qui ne serait pas de beaucoup supérieure à la première !

Les idées concernant la propriété ne sont pas celles d'un propriétaire, chose qui est l'une des plus faciles à accepter, mais les idées familiales ne sont peut-être pas celles d'un bon père; la possibilité d'une disparition de la famille est envisagée.

Et cependant tout cela est très bien écrit, d'une tenue logique qui pourra séduire bien des esprits. Mais est-ce de la vraie logique ou du sophisme, ou de cette manie raisonnante si connue, si abondante dans les partis qui se

déclarent « conscients » ? Je ne veux point conclure, préférant laisser ce soin à des lecteurs que je souhaite nombreux pour juger cette œuvre où le logicien paraît dominer trop exclusivement le philosophe.

A. Buhl (Toulouse).

Raoul Bricard. — **Petit traité de perspective.** — 1 vol. grand in-8° de 88 p. et 62 fig., 8 fr.; Vuibert. Paris, 1924.

Ceci est un ouvrage à la fois court et très bien présenté. Imprimé sur du beau papier glacé, avec de nombreuses figures très soignées, il ne plaira pas moins aux artistes qu'aux géomètres. Il s'agit surtout de méthodes injustement méconnues dont Cousinery a indiqué le principe en 1828.

Les considérations géométriques essentielles portent le cachet intuitif évident que Monge savait leur donner en employant sans hésitation les figures spatiales pour la démonstration de théorèmes plans; ici, d'ailleurs, la chose est toute indiquée, car ceux qui étudient la perspective, en vue de ses applications, admettraient difficilement une introduction à deux dimensions qui leur paraîtrait bien abstraite.

Signalons des choses curieuses quant aux complaisances de l'œil qui rendent la perspective possible; un quadrilatère avec ses deux diagonales peut être vu, de deux autres manières, comme tétraèdre. La représentation plane du cube est plus étrange encore.

Il est fort intéressant de suivre l'auteur en ses distinctions projectives et métriques; ces adjectifs éveillent aujourd'hui l'idée de discussions élevées et philosophiques sur la nature même de l'espace. Or, ici, la métrique n'est que l'art du dessin suffisamment correct pour qu'on puisse y retrouver des mesures, des partages de segments, etc., qu'un métreur ferait machinalement dans l'espace réel. Seulement, comme c'est un géomètre de talent qui s'est occupé du problème, les clercs voient toujours comment celui-ci peut être élevé au dessus des nécessités de la pratique.

Signalons encore un chapitre sur la perspective cavalière, des indications sur la métrophotographie et un examen des cas où il est permis et même indiqué à l'artiste de ne pas s'en référer à une perspective géométrique absolument stricte.

Il y a donc, dans ce livre, de la rigueur pour le géomètre et de cet esprit d'interprétation qu'on ne saurait se proposer de bannir de l'art.

A. Buhl (Toulouse).

M. Kraitchik. — **Recherches sur la théorie des nombres.** Avec une préface de M. Ch.-J. de la Vallée Poussin. — 1 vol. in-8° (25 × 16) de XVI + 272 p., avec 4 grandes tables; Gauthier-Villars et Cie. Paris, 1924.

Ce volume fait suite à l'ouvrage intitulé *Théorie des nombres*, que M. Kraitchik a publié il y a deux ans.

L'arithnomie occupe une place à part. Bien qu'Hermite ait conçu l'idée géniale d'y introduire des variables continues et que cette idée se soit révélée d'une très grande fécondité, liant d'une manière insoupçonnée la théorie des nombres à la théorie des fonctions, le domaine propre de l'arithmétique supérieur reste celui du nombre entier ; il est dès lors essentiellement discontinu. M. Kraïtchik en tout cas s'est placé franchement sur

ce terrain et aborde directement les difficultés des problèmes arithnomiques Elles sont de nature particulière, à cause du caractère individuel de chaque nombre et de l'isolement, du moins apparent, des diverses questions. En effet, dans d'autres disciplines mathématiques, notamment en géométrie et en « fonctiologie », on a l'avantage de posséder deux puissants principes d'investigation : ce sont la généralisation et l'analogie. Or, ils n'ont que peu de prise en arithnomie, où chaque question exige des moyens particuliers et semble même former un tout à elle seule ; d'où la nécessité de créer des modes d'investigation spéciaux. Ils consistent en une série d'essais numériques propres à réaliser un véritable criblage ; c'est donc un recours à la méthode expérimentale, comme Hermite aimait à souligner. Le grand Euler en a donné l'exemple. M. Kraïtchik, fervent adepte de la nomographie, était bien placé, en sa qualité d'ingénieur à la Société financière des transports et d'entreprises industrielles, pour imaginer des procédés opératoires sûrs, faciles et rapides.

Prenons comme exemple le problème de la factorisation que M. Kraïtchik traite au chapitre VI de son ouvrage. Le tâtonnement étant inévitable dans ce genre de recherches, il s'agissait de le perfectionner. Euler, en introduisant les diviseurs linéaires de formes quadratiques, a réalisé à cet égard un sensible progrès, car on trouve en général assez facilement un certain nombre de décompositions quadratiques d'un nombre donné n, et comme les diviseurs de n doivent aussi diviser ces formes quadratiques, on ne devra les chercher que parmi les diviseurs linéaires de ces formes. Il en résulte un procédé de criblage qui n'est limité que par l'étendue de la table dont on dispose. Cette table, commencée par Euler, continuée par Legendre, étendue par Tchebycheff jusqu'au déterminant $D = 101$, M. Kaïtchik l'a poussée dans sa *Théorie des nombres* jusqu'au déterminant $D = 200$, en corrigeant, fait méritoire, nombre d'erreurs de ses devanciers. Dans ce nouveau volume des *Recherches*, il poursuit la table jusqu'au déterminant $D = 250$ (table III), en modifiant et simplifiant la disposition adoptée avant lui, ce qui lui permet de réduire très notablement la place occupée par ladite table III. On doit encore à la sagacité de M. Kraïtchik et à son travail persévérant un grand nombre de décompositions de nombres de Mersenne $2^n - 1$, de nombres de Fermat $2^n + 1$, et d'autres nombres de forme particulière, ainsi que d'ingénieux procédés de factorisation.

Je ne saurais passer sous silence la table IV de son ouvrage. Elle occupe plus de 50 pages et contient les indices de tous les nombres premiers < 100 pour tous les modules $< 10\,000$. Elle est « le fruit d'un labeur dont l'étendue donne le vertige «, dit M. de la Vallée Poussin. On sait qu'une table d'indices peut rendre en arithnomie les services qu'on demande à une table de logarithmes pour les calculs numériques. La table I (p. 131-191) contient : 1° les nombres premiers $P < 300\,000$; 2° et 3° la plus petite solution des congruences $2^x \equiv 1$ (*mod* P) et $10^y \equiv 1$ (*mod* P) pour tous ces nombres premiers $P < 300\,000$; 4° et 5° les nombres $\gamma = (P-1) : x$ et $\gamma' = (P-1) : y$; enfin 6° une racine primitive ϱ de P pour toutes les valeurs de $P < 27\,457$. La table II (13 pages) donne tous les nombres premiers de la forme $512\,k + 1$ inférieurs à dix millions, leur décomposition en $P = x^2 + y^2$ ou en $P = z^2 + 2t^2$ ou en $P = u^2 + 3v^2$, lorsque ces décompositions additives sont possibles ; enfin la plus petite solution de la congruence $2^x \equiv 1$ (*mod* P) et la valeur de $\gamma = \dfrac{P - 1}{x}$ pour les mêmes nombres premiers

$P < 10^7$. Ces quatre grandes tables constituent la deuxième partie des *Recherches.*

La première partie présente un caractère fragmentaire et contient principalement des compléments à la *Théorie des nombres* du même auteur. Ce sont en effet les mêmes questions qui sont traitées : Identités et généralités (chapitres I et II), Congruences du premier et du second degré (chapitres III et IV), congruences binômes (ch. V) ; factorisation (ch. VI); dans le chapitre VII, où les équations binômes sont traitées d'une manière originale, l'exposition revêt un caractère plus systématique. Cette première partie fourmille de tables dont quelques-unes s'étendent sur plusieurs pages. Si l'on ajoute à la seconde partie, qui contient en réalité 11 tables sous forme condensée, les 21 tables éparses dans le texte de la première partie, on arrive au total de 32 tables dressées par M. Kraïtchik lui-même. Il faut y ajouter une foule de renseignements très curieux sur la partition des nombres et une quantité de détails, trop nombreux et trop complexes pour pouvoir être résumés en une courte analyse. On le voit, l'abondance des documents réunis par l'auteur est vraiment imposante, et ces deux livres, qui rendront des services signalés aux arithméticiens, ne devraient manquer dans aucune bibliothèque mathématique.

L.-Gustave Du Pasquier (Neuchâtel).

Niels Nielsen. — **Traité élémentaire des nombres de Bernoulli.** — 1 vol. grand in-8° de X+399 p.; 50 fr.; Gauthier-Villars et Cie. Paris, 1923.

On sait que Jacques Bernoulli, dont le nom est indissolublement lié au Calcul des probabilités par la loi des grands nombres, a introduit dans son fameux ouvrage posthume sur L'Art de conjecturer, *Ars coniectandi*, publié en 1713, une suite infinie de nombres rationnels particuliers devenus célèbres en analyse mathématique. Le grand Euler les a retrouvés à son tour et popularisés sous le nom de nombres de Bernoulli, se servant de l'initiale de ce nom pour les désigner, et sa notation

$$B_1 = \frac{1}{6}, \quad B_2 = \frac{1}{30}, \quad B_3 = \frac{1}{42}, \quad B_4 = \frac{1}{30}, \quad B_5 = \frac{5}{66}, \ldots$$

a acquis droit de cité en mathématiques. Une pléiade de mathématiciens, parmi lesquels les plus grands géomètres et calculateurs, les Cauchy, Gauss, Hermite et Kronecker, les Jacobi, Lipschitz, Lucas, de Moivre, les Raabe, Saalschütz, von Staudt, Stern, Sylvester, etc., se sont occupés de ces curieux nombres, de sorte qu'il y a une littérature assez étendue sur ce sujet spécial M. Niels Nielsen de l'Université de Copenhague, à qui l'on doit plusieurs ouvrages importants et de nombreuses monographies sur la Théorie des fonctions, était bien placé pour coordonner ce que l'on sait des nombres de Bernoulli, puisqu'il a mis depuis quelques années sa vaste érudition mathématique plus spécialement au service de la Théorie des nombres. Les 400 pages de son « Traité élémentaire des nombres de Bernoulli » comprennent vingt chapitres, dont les deux premiers sont consacrés à des formules et théorèmes auxiliaires relatifs aux propriétés des fonctions rationnelles entières, à l'indicateur d'Euler $\varphi(n)$ et au calcul des différences finies, notamment aux propriétés des opérations Δ, δ, D, où

$$\Delta f(x) = f(x) - f(x-1), \quad \delta f(x) = f(x) + f(x-1) \quad \text{et} \quad Df(x) = \frac{df(x)}{dx}$$

dont M. Nielsen définit et étudie les puissances positives et négatives. Puis il étudie ce qu'il appelle les polynomes « harmoniques »

$$f_n(x) \equiv \frac{a_0 x^n}{n!} + \frac{a_1 x^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + \frac{a_{n-1} x}{1!} + \frac{a_n}{0!}$$

et les « suites harmoniques » (envisagées pour la première fois, avec une légère modification, par M. P. Appell, en 1880):

$$f_0(x), \quad f_1(x), \quad f_2(x), \dots, \quad f_n(x), \dots \tag{1}$$

Les *fonctions de Bernoulli* $B_0(x)$, $B_1(x)$, ..., $B_\lambda(x)$, ... s'introduisent alors comme éléments d'une suite harmonique particulière satisfaisant à l'équation aux différences finies

$$\Delta B_n(x) \equiv B_n(x) - B_n(x-1) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \qquad (n \geqq 1) \tag{2}$$

M. Nielsen en déduit sans difficultés, par voie élémentaire, l'expression générale de $B_n(x)$, et pour les nombres de Bernoulli B_λ la formule de récurrence donnée déjà par Jacques Bernoulli lui-même

$$\frac{p-1}{2} = \sum_{s=1}^{\leqq \frac{1}{2}(p-1)} (-1)^{s-1} \cdot \binom{p+1}{2s} \cdot B_s. \tag{3}$$

ainsi que cette autre formule récursive trouvée par Euler:

$$(2p+1) \cdot B_p = \sum_{s=1}^{p-1} \binom{2p}{2s} \cdot B_s \cdot B_{p-s} \tag{4}$$

Au lieu du symbole Δ qui indique formation d'une différence, M. Nielsen prend ensuite le symbole δ qui indique formation d'une somme. Ce sont alors les *fonctions d'Euler*

$$E_0(x), \quad E_1(x), \quad E_2(x), \quad \dots, \quad E_n(x), \quad \dots$$

qui s'introduisent comme éléments d'une suite harmonique particulière (1), satisfaisant à l'équation aux différences finies analogue à (2)

$$\delta E_n(x) \equiv E_n(x) + E_n(x-1) = \frac{x^n}{n!} \quad (n \geqq 0) \tag{5}$$

M. Nielsen en déduit sans difficultés, par voie élémentaire, l'expression générale de $E_n(x)$ et pour les nombres E_λ, appelés *nombres d'Euler*, la formule de récurrence analogue à (3)

$$\sum_{s=0}^{\lambda-1} (-1)^s \cdot \binom{2\lambda}{2s} \cdot E_{\lambda-s} = (-1)^{\lambda-1} \tag{6}$$

due à Euler. Celui-ci a déjà calculé $E_1 = 1$, $E_2 = 5$, $E_3 = 61$, $E_4 = 1385$, etc. jusqu'à E_9, qui est un nombre de 9 chiffres. A cette occasion s'introduisent les nombres T_n, généralement appelés « coefficients des tangentes », pour lesquels

$$T_{p+1} = \sum_{s=0}^{p-1} \binom{2p}{2s+1} \cdot T_{s+1} \cdot T_{p-s} \quad (p \geqq 1) \tag{7}$$

analogue à la formule de récurrence (4). Ces nombres $T_1 = 1$, $T_2 = 2$, $T_3 = 16$, $T_4 = 272$, etc., croissent aussi rapidement que les nombres d'Euler.

Qu'on veuille bien remarquer le caractère élémentaire de ces déductions. J'ai donné quelques développements pour faire ressortir la symétrie qu'on peut introduire dans cet exposé, puis aussi pour faire comprendre l'originalité du livre de M. Nielsen. Voici en effet ce qui s'est passé historiquement.

C'est en étudiant le développement des fonctions trigonométriques $\operatorname{ctg} x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cosec} x$ en séries de puissances qu'Euler retrouva les nombres de Bernoulli. C'est donc par des considérations transcendantes qu'il démontra plusieurs belles propriétés de ces nombres. Les géomètres, s'inspirant de l'exemple d'Euler, appliquèrent presque exclusivement des méthodes transcendantes dans leurs recherches sur ces nombres rationnels, exceptés von Staudt et von Ettingshausen. De nos jours encore, on a l'habitude de rattacher les nombres de Bernoulli aux fonctions exponentielles ou trigonométriques et de démontrer leurs propriétés par des identités où figurent ces fonctions transcendantes. La formule récursive de Jacques Bernoulli, formule (3) ci-dessus, tomba entièrement dans l'oubli, si bien qu'on attribue à de Moivre et à Jacobi les premières formules récursives pour ces nombres, et pourtant elles ne sont que des cas particuliers de celle de Bernoulli. Frappé de ce fait, M. Nielsen a voulu écrire un traité « élémentaire » où il se passe des fonctions transcendantes, c'est ce qui fait son originalité. A l'aide des notions ci-dessus rappelées et de quelques autres tout aussi élémentaires, M. Nielsen étudie la différence $B_m(x+p) - B_m(x)$ et déduit d'un seul coup 32 formules de récurrence comme cas spéciaux de la formule de Bernoulli. La plupart d'entre elles étaient déjà connues, mais démontrées par des méthodes transcendantes très différentes et compliquées.

M. Nielsen base sa théorie élémentaire sur l'équation fondamentale

$$f(-x-1) = \pm f(x) \,. \tag{8}$$

Il démontre que les fonctions de Bernoulli et d'Euler satisfont à cette équation. Il appelle polynome « symétrique », toute fonction rationnelle entière satisfaisant à (8) La notion de suite « régulière », celle de « fonction partielle » et l'ingénieuse notion de « rang d'un nombre premier » permettent à M. Nielsen d'établir une très grande quantité de relations, dont beaucoup sont nouvelles, entre les B_n, les E_n et les T_n, ou les fonctions correspondantes. Il relève en cours de route plusieurs erreurs de ses prédécesseurs. De nombreuses applications sont faites aux nombres B_n, E_n et T_n eux-mêmes, puis aux sommes S_n des puissances semblables des nombres naturels, ou des racines d'une équation algébrique, puis aux sommes correspondantes σ_n où lesdites puissances semblables sont prises avec des signes alternati-

vement + et —, puis à des équations algébriques de forme particulière, enfin à la Théorie des nombres.

Je regrette de ne pas trouver, dans un livre de cette envergure, des résultats numériques aussi complets que possible. Ainsi, les S_n ont été calculés jusqu'à S_{16} et les nombres de Bernoulli jusqu'à B_{92}, mais M. Nielsen ne donne la liste que jusqu'à S_{10} et B_{16}. Bien que « élémentaire », le Traité de M. Nielsen sur les nombres de Bernoulli conduit le lecteur assez avant dans certaines branches de l'arithnomie, comme l'indique déjà le titre des derniers chapitres.

Le chapitre 13 : « De la nature des nombres de Bernoulli », contient, entre autres, les célèbres théorèmes de von Staudt et de Clausen ; chapitre 14 : « Les congruences de Kummer »; chapitre 17 : « Les coefficients de factorielles » ; chapitre 19 : « Des quotients de Fermat »; chapitre 20 : « Des résidus quadratiques ».

Les indications bibliographiques sont très nombreuses et exactes. Je n'ai relevé que très peu de fautes d'impression, aucune dans les formules. Le lecteur trouve dans le traité lui-même toutes les définitions et tous les théorèmes nécessaires à la compréhension entière du texte. C'est le Traité le plus complet et le meilleur que je connaisse sur les nombres de Bernoulli et les domaines connexes, et il convient d'en féliciter M. Niels Nielsen.

L.-Gustave Du Pasquier (Neuchâtel).

R. Marcolongo. — **Relativita**, seconda edizione riveduta ed ampliata. — 1 vol. in-8° de XII+235 p , 30 l.; Casa Editrice Giuseppe Principato, Messina, 1923.

Nous avons déjà dit l'intérêt que présente la première édition de ce livre. Il comprend l'exposé indispensable du calcul différentiel absolu, puis les théories restreinte et générale de la relativité, développées surtout au point de vue de la mécanique ; enfin un appendice consacré à une étude de la géométrie des espaces de Riemann.

Dans la seconde édition, le calcul différentiel absolu est plus développé, une brève allusion à la théorie du déplacement parallèle de M. Levi-Civita a été placée dans l'étude géométrique des variétés de Riemann et le livre se termine par un résumé de la théorie sans développements mathématiques.

Dans la seconde préface, M. Marcolongo nous laisse espérer, malgré un deuil qui l'a vivement affecté, qu'un exposé du problème cosmologique, une étude du champ électro-magnétique et de son interprétation dans les géométries de MM. Weyl et Eddington sortira de sa plume ; souhaitons vivement qu'il en soit ainsi.

Rolin Wavre (Genève).

R. Marcolongo. — **Meccanica Razionale** Vol. I : cinematica-statica, XV+325 p.; vol. II : dinamica-meccanica dei sistemi deformabili, XII+414 p. Terza edizione; lire 12,50 et 16,50. — Ulrico Hœpli. Milano, 1923

Ce traité de mécanique rationnelle fait partie de la collection des « Manuels Hœpli », qui comprend, comme on sait, déjà d'excellents traités de mathématiques supérieures, de physique, etc. Le savant professeur de mécanique de l'Université de Naples y donne un exposé très complet, en même temps que très concis, des principaux sujets de la mécanique. Je ne le

recommanderais pas à l'étudiant qui, pendant un examen, souffre de quelque amnésie, mais bien à ceux qui voudraient avoir de la mécanique un aperçu synthétique. Rolin Wavre (Genève).

T. Levi-Civita e V. Amaldi. — **Lezione di meccanica razionale.** *Volume primo. Cinematica, principi e statica.* — 1 vol. in-8° de XIII+741 p. 65 lire ; Nicola Zanichelli. Bologna, 1923.

Les deux auteurs de ces leçons se sont fait , en analyse et en mécanique, une réputation sur laquelle il est inutile d'insister ; rappelons simplement que M. Levi-Civita s'est illustré par ses recherches sur le problème restreint des trois corps en mécanique classique et en relativité par ses travaux d'ordre géométrique et par son calcul tensoriel.

Il est curieux de constater que c'est au moment où la mécanique classique est théoriquement abandonnée que paraissent le plus grand nombre de traités où il n'est question que d'elle ! Faut-il s'en étonner ? Nullement, l'étude de la mécanique classique constitue la meilleure initiation aux conceptions d'Einstein et de plus elle est pratiquement indispensable. On sait en effet à quelles difficultés conduit la résolution dans la mécanique relativiste de problèmes dont la solution était élémentaire dans l'ancienne mécanique. Mais l'exposé de la théorie classique doit s'inspirer des idées nouvelles dans ce sens que certains chapitres qui forment le seuil de la nouvelle mécanique doivent être spécialement développés; l'article que M. Levi-Civita a publié il y a quelques années dans ce périodique le prouve suffisamment.

Les leçons que publient aujourd'hui MM. Levi-Civita et Amaldi sont tout entières conçues dans le cadre de l'ancienne mécanique; elles présentent un très grand intérêt par leur caractère élémentaire tout d'abord, puis par le soin apporté à l'exposé des principes ainsi qu'aux multiples applications à l'astronomie, à la physique et à la technique, c'est-à-dire à l'art de l'ingénieur. A la fois intuitives et rigoureuses, ces leçons ont une très grande valeur didactique, à laquelle on ne parvient que par une grande pratique de l'enseignement. Il faut remettre cent fois son ouvrage sur le métier avant d'arriver à l'exposé qui ne laisse rien à désirer; ce livre fait foi de la grande expérience acquise par ses auteurs, dont le premier enseigna la mécanique durant vingt ans à Padoue, puis à Rome, le second à Modène, puis à Padoue.

Un second volume sera consacré à la dynamique du point, des systèmes et à la mécanique des systèmes continus. Rolin Wavre (Genève).

C.-H. Müller u. G. Prange. — **Allgemeine Mechanik** (Grundlegende Ansätze und elementare Methoden der Mechanik des Punktes und der Punktsysteme. Eine Einführung für Studierende der Natur-und Ingenieur-Wissenschaften. — 1 vol. in-8° de 561 p.; Helwingsche Verlagsbuchhandlung, Hanover.

Nous ne saurions dire assez de bien de ce livre. Les auteurs s'y sont efforcés de ne pas faire appel à des connaissances mathématiques dépassant celles que possèdent un étudiant sortant d'une école technique; sur certains points cependant, ils nous paraissent avoir dépassé ce niveau de connaissance, en particulier dans les paragraphes en petit caractère. Par mécanique générale, il faut entendre en somme ce noyau de théories mécaniques qui

ont, d'une part, des extensions théoriques, et d'autre part des applications pratiques, à l'astronomie, à la physique et à l'art de l'ingénieur.

Nos auteurs exposent la théorie élémentaire et les principes fondamentaux du mouvement du point et des systèmes de points, ainsi que la mécanique différentielle, c'est-à-dire la mécanique analytique. Entre ces chapitres fondamentaux se trouvent, en petits caractères, de fort intéressantes applications des théories générales à plusieurs questions concernant la géométrie, l'astronomie et la physique. Pour en donner une idée, qu'il me suffise d'indiquer qu'à propos de la théorie du mouvement d'un point sur une surface, une ample allusion est faite à la théorie des surfaces jusqu'à obtenir les symboles de Christoffel, les équations des géodésiques mises sous forme tensorielle et jusqu'à la théorie du déplacement parallèle selon Levi-Cività ; à propos de la dynamique des systèmes de points, le problème des trois corps est traité dans la mesure où il peut l'être sans avoir recours à un instrument mathématique trop complexe.

MM. Müller et Prange ont évité de traiter dans le présent livre les questions où intervient le calcul des variations (on sait que M. Prange a fait d'intéressantes recherches dans ce domaine). Nous pensons, néanmoins, que si ce livre est à la portée de ceux qui ne sont pas spécialisés en mathématiques, c'est à cause de la peine que se sont données ses auteurs pour exposer les questions sous le jour le plus intuitif, plutôt que par la simplicité de l'appareil mathématique.

Signalons, pour terminer, que la mécanique newtonienne est présentée de la même manière qu'elle a été développée dans l'histoire. Il y a certainement avantage quand cela est possible à rapprocher l'ordre didactique de l'ordre historique. Rolin Wavre (Genève).

M. Lecat. — **Bibliographie de la relativité,** suivie d'un appendice sur les déterminants à plus de deux dimensions, le calcul des variations, les séries trigonométriques et l'azéotropisme. — 1 vol. in-8° de 290 et 47 p.; 90 fr.. — M. Lamertin, Ed., Bruxelles.

La littérature de la relativité compte déjà de nombreux traités dans toutes les langues et un nombre considérable de mémoires et d'articles de revues. Il faut savoir gré à M. Lecat d'avoir entrepris, en collaboration avec Mme Lecat-Pierlot, la publication d'un catalogue méthodique.

Ce recueil comprend trois listes principales. La première, procédant par *ordre alphabétique d'auteurs*, donne les titres des ouvrages et mémoires, avec l'indication des périodiques. La seconde contient la *table alphabétique des recueils* cités avec la mention, par leur numéro, des articles cités dans la première liste. Dans la troisième, où tout est abrégé, le classement, autant que possible, est *chronologique* et l'on y renvoie également à la table I.

Un *Appendice* est consacré aux matières de quelques-uns des travaux antérieurs de M. Lecat : Bibliographie des déterminants à plus de deux dimensions et compléments de bibliographie du calcul des variations, des séries trigonométriques et de l'azéotropisme.

L. Picart. — **Astronomie générale** (Collection Armand Colin). — 1 vol. in-16, 188 p. 42 fig., broché, 6 fr. ; Librairie Armand Colin, Paris.

Du jour où s'est éveillée sa conscience, l'Homme a été captivé par le grandiose spectacle de la voûte céleste, et il a cherché à pénétrer le secret

de ses mouvements et des forces mystérieuses qui entraînent les astres. De là est née l'Astronomie, cette mère antique de toutes les sciences.

Depuis, beaucoup de mystères se sont éclaircis : mais nous n'en avons pas moins tous conservé une curiosité très vive pour les choses du ciel. C'est pour satisfaire cette curiosité que M. Luc Picart a écrit son livre. Laissant à d'autres le soin de disserter sur la question de savoir s'il y a des hommes dans la Lune ou des terrassiers sur la planète Mars, il s'est borné à faire vraiment de l'Astronomie à l'usage de ceux qui désirent connaître d'une façon précise les lois de l'évolution des mondes.

Qu'on se rassure, cependant ! Si M. Luc Picart fait souvent appel aux données mathématiques, il n'en abuse pas et sa mathématique est accessible à tous ceux qui ont reçu une bonne instruction élémentaire.

Voilà, enfin, un livre d'Astronomie qui est de bonne, de saine vulgarisation, et ce n'est pas là un mince éloge.

C. Runge et H. König. — **Vorlesungen über numerisches Rechnen** (Die Grundlehren der math. Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Band XI). — 1 vol. in-8° de 371 p., avec 13 fig. ; 3 dollars 95 ; Julius Springer, Berlin.

Cet ouvrage constitue un excellent guide pour tous ceux qui désirent s'initier aux calculs numériques que le mathématicien, le physicien ou l'astronome peuvent avoir à effectuer dans la pratique. Il correspond aux leçons faites à l'Université de Gœttingue, depuis 1904, d'abord par M. Runge, puis aussi par M. König. A cet enseignement théorique se rattachent des travaux pratiques permettant de familiariser les étudiants avec les instruments à calculer.

Voici les principaux objets exposés par les auteurs :

Le calcul numérique et ses moyens auxiliaires. — Equations linéaires. — Méthode des moindres carrés. Théorie des erreurs. — Fonctions rationnelles entières. Interpolation. — Emploi des séries. — Equations à une inconnue. Méthodes d'approximation. — Equations à plusieurs inconnues. — Valeur approchée d'une fonction arbitraire dans un intervalle donné. Série de Fourier. Analyse harmonique. — Intégration et différentiation numérique. — Intégration numérique d'équations différentielles. — Résolution des exercices proposés dans les divers chapitres.

L.-P. Siceloff et D.-E. Smith. — **College Algebra** (Wentworth-Smith Mathematical Series). — 1 vol. in-8° de 258 p. ; 1 dollar 80 ; Ginn and Co., Boston.

La Collection Wentworth-Smith vient de s'enrichir d'un nouveau manuel d'algèbre destiné plus particulièrement à ceux qui ont besoin des mathématiques en vue des applications. Après une revue rapide des premiers éléments (opérations algébriques, équations du premier et du deuxième degré, progressions, binomes, logarithmes), les auteurs présentent, accompagnées de nombreux exercices, les notions essentielles relatives à l'analyse combinatoire, au calcul des probabilités, aux nombres complexes, à la théorie des équations et aux déterminants.

Dans une dernière partie, ils exposent la décomposition des fractions rationnelles, les intérêts composés et les annuités, les inégalités et les premières notions sur les séries. H. F.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

1. Livres nouveaux :

Tous les ouvrages adressés à la Rédaction sont signalés ici avec une brève indication de leur contenu, sans préjudice de l'analyse dont ils peuvent être ultérieurement l'objet sous la rubrique « Bibliographie ».

W. Blaschke. — **Vorlesungen über Differential-Geometrie** und geometrische Grundlagen von Einsteins Relativitätstheorie. I. Elementare Differentialgeometrie, zweite verbesserte Auflage mit einem Anhang von K. Reidemeister (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Band I). — 1 vol. in-8° de 242 p., 2 dollars 65 ; Julius Springer, Berlin.

Nouvelle édition, entièrement revue et complétée, du Tome I des Leçons de géométrie infinitésimale de M. W. Blaschke. L'ensemble de l'ouvrage fournira une étude bien approfondie des fondements géométriques de la Théorie de la relativité.

F. Bützberger. — **Lehrbuch der Stereometrie für höhere Lehranstalten**, umgearbeitet von V. Benz. Mit einer Aufgabensammlung und 76 Figuren im Text. Vierte Auflage. — 1 vol in-8° de 154 p., 4 fr. 80; Orell Füssli, Zurich.

Manuel de géométrie dans l'espace destiné à l'enseignement secondaire supérieur. A la suite de la mort du professeur Bützberger, cette nouvelle édition, la quatrième, a été publiée par M. le professeur N.-W. Benz. Les auteurs se sont efforcés à fournir un exposé permettant de développer le plus possible chez l'élève la conception de l'espace. A ce point de vue leur ouvrage sera examiné avec intérêt par tous ceux qui sont chargés de l'enseignement de la géométrie élémentaire.

N.-R. Campbell. — **Théorie quantique des spectres. La relativité.** Supplément de la Théorie électrique moderne. Théorie électrique. Traduit de l'anglais par A. Cervisy. — 1 vol. in-8° de 237 p., 18 fr. ; Librairie Scientifique J. Hermann, Paris.

Cet ouvrage est le premier d'une série de monographies ayant pour but de compléter la « Théorie électrique moderne » du même auteur. Il s'adresse aux étudiants qui désirent s'initier à la recherche scientifique.

R. Courant et D. Hilbert. — **Methoden der mathematischen Physik.** Erster Band (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Band XII). — 1 vol. in-8° de 450 p., avec 29 fig. ; 5 dollars 40 ; Julius Springer, Berlin.

Premier volume d'un ouvrage qui sera consacré à une étude approfondie

des méthodes de la physique mathématique. Rédigée par M. Courant, cette première partie comprend l'algèbre des transformations linéaires et des formes quadratiques, le problème des développements en série, des équations intégrales linéaires, les principes fondamentaux du calcul des variations.

R. Fueter. — **Vorlesungen über die singulären Moduln und die komplexe Multiplikation der elliptischen Funktionen.** Erster Teil (B.-G. Teubner's Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen, Band XLI, 1). — 1 vol. in-8° de 142 p., avec 16 fig. ; 5 m. 60 ; cartonné, 7 m. ; B.-G. Teubner, Leipzig.

On sait le rôle inportant que joue la multiplication complexe dans la théorie des fonctions, dans la théorie des nombres et en algèbre. L'auteur s'attache à le mettre en lumière dans cet ouvrage. Dans ce premier volume, il se place plus particulièrement au point de vue de la théorie des fonctions et de l'algèbre.

M. Geiger. — **Systematische Axiomatik** der euklidischen Geometrie. — 1 vol. in-8° de 271 p. ; 11 mk. ; Verlag Dr. Filser, Augsburg.

Cet ouvrage contient une étude très approfondie de l'axiomatique systématique de la géométrie euclidienne.

K. Herold. — **Finanz-Mathematik.** Zinseszinsen-, Anleihe- und Kursrechung (Mathematisch-Physikalische Bibliothek. Band 56). — 1 vol. in-16 de 50 p., broché ; 0 mk. 80 ; B.-G. Teubner, Leipzig.

Ce petit volume est consacré aux premières notions de mathématiques financières comprenant le calcul d'intérêts, d'escompte, d'annuités, avec application aux problèmes relatifs aux rentes et aux emprunts d'Etat.

J.-E. Heyde. — **Grundwissenschaftliche Philosophie** (Aus Natur und Geisteswelt, Band 548). — 1 vol. in-16, de 98 p., relié ; 1 G.Mk. 80 ; B. G. Teubner, Leipzig.

Cet ouvrage peut être considéré comme une introduction à la Philosophie de Johannes Rehmke, et tout particulièrement aux théories qu'il a développées dans sa « Philosophie, science fondamentale ».

O. Hölder. — **Die mathematische Methode.** Logisch Erkenntnistheoretische Untersuchungen im Gebiete der Mathematik, Mechanik und Physik. — 1 vol. in-8° de 563 p., avec 235 fig., 6 dollars 30 ; J. Springer, Berlin.

Cette importante contribution à la philosophie des sciences comprend une étude très complète, accompagnée d'exemples de démonstration, de la méthode en mathématiques, en mécanique et en physique.

E. Jouguet. — **Lectures de Mécanique.** La mécanique enseignée par les auteurs originaux. Deux volumes in-8° (25-16), avec 14 notes et additions. Première partie : *La naissance de la mécanique*, 1 vol. de VIII-206 p., avec 85 fig. Nouveau tirage avec notes et additions ; 15 fr.. Deuxième partie : *L'organisation de la mécanique*. 1 vol. de VIII-284 p., avec 31 fig. Nouveau tirage avec notes et additions ; 20 fr. 1924 ; Gauthier-Villars et Cie, Paris.

Dans cet ouvrage, dont la première édition remonte à une quinzaine

d'années, l'auteur montre quel a été le développement de la mécanique en reproduisant et commentant les articles originaux. Cette nouvelle édition comprend de nombreuses additions et des notes nouvelles.

K. Knopp. — **Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen** (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band II). — 1 vol. in-8° de 520 p. avec 12 fig., 2me édition revue et augmentée ; 6 dollars 45; Julius Springer, Berlin.

En deux ans, le traité sur la théorie des séries et ses applications, de M. Knopp a été épuisé. Dans cette nouvelle édition, revue et augmentée, le chapitre consacré aux séries divergentes a été entièrement remanié.

K. Lasswitz. — **Die Welt und der Mathematikus.** Ausgewählte Dichtungen, herausgegeben von Dr. W. Lietzmann. — 1 vol. in-16 de 91 p. ; 1 mk. 80 ; Verlag B. Elischer, Nachf. Leipzig.

Dans cet élégant petit volume, M. Lietzmann a groupé un choix de nouvelles et de poésies de Kurd Lasswitz, qui fut non seulement physicien et philosophe, mais qui est aussi connu du grand public comme poète et comme écrivain.

M. v. Laue. — **La théorie de la relativité.** Traduction faite d'après la 4me édition allemande revue et augmentée par l'auteur, par G. Letang. Tome I : Le principe de relativité de la tranformation de Lorentz. — 1 vol. in-8° de XVI-332 p. et fig. ; 40 fr. ; Gauthier-Villars et Cie, Paris.

Cette traduction de l'ouvrage classique du professeur v. Laue sera bien accueillie dans les milieux de langue française. Elle s'adresse à ceux qui, en dehors du bagage mathématique ordinaire du théoricien de la physique, du calcul infinitésimal et de l'analyse vectorielle, possèdent une certaine connaissance de la théorie de Maxwell dont les lois les plus importantes sont, du reste, brièvement déduites au paragraphe 4. Les méthodes particulières, créées par Minkowski pour la théorie de la relativité, sont développées dans les paragraphes 9 à 13.

E. Leutenegger. — **Ueber Kegelschnitte in der hyperbolischen Geometrie.** Beilage zum Programm der Thurgauischen Kantonalsschule für das Schuljahr 1922-23. — 1 fasc. in-4° de 75 p., avec 31 fig. ; Huber et Co, Frauenfeld.

Ce fascicule est consacré à l'étude des propriétés des sections coniques dans la géométrie hyperbolique et aux constructions qui s'y rattachent.

W. Lietzmann. — **Aufgabensammlung und Leitfaden für Arithmetik, Algebra und Analysis.** — 1 vol. in-8° de 254 p., 75 fig. et 2 tables ; 3 mk. — **Aufgabensammlung und Leitfaden für Geometrie.** — 1 vol. in-8° de 188 p. et 237 fig. ; 3 mk. ; Ausgabe für Lyzeen (Mathematisches Unterrichtswerk für das höhere Mädchenschulwesen). ; B. G. Teubner, Leipzig.

Ces deux volumes constituent un excellent recueil d'exercices d'arithmétique, d'algèbre et de géométrie à l'usage de lycées de jeunes filles. Nous le signalons à l'attention du corps enseignant.

L. Schlesinger. — **Automorphe Funktionen** (Göschens Lehrbücherei. I. Gruppe, Reine Mathematik. Band V.) — 1 vol. in-8° de 205 p. ; 8 mk. ; Walter de Gruyter et Co, Leipzig.

Dans cet ouvrage, destiné aux étudiants, l'auteur expose les éléments de la théorie des fonctions automorphes en tenant compte des progrès les plus récents de la théorie des fonctions.

I. Introduction. Exemples. Fonctions elliptiques. — II. Les fondements géométriques de la théorie des fonctions automorphes. — III. Théorie analytique des fonctions automorphes. — IV. Le problème fondamental. Uniformisation.

J.-A. Schouten. — **Der Ricci-Kalkul** Eine Einführung in die neueren Methoden und Probleme der mehrdimensionalen Differentialgeometrie (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Band X). — 1 vol. in-8° de 311 p., avec 7 fig. ; 3 dollars 60; Julius Springer, Berlin.

Les monographies sur le calcul différentiel absolu que l'on possédait jusqu'à ce jour se bornaient à fournir une première initiation à la théorie créée par M. Ricci en 1887. Dans le présent traité, M. Schouten donne pour la première fois un exposé d'ensemble très complet du calcul de Ricci et de ses applications.

2. Publications périodiques :

Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität, Band II.

Académie royale de Belgique, Bulletin de la Classe des Sciences, 1923. — Hayez, Bruxelles.

American Mathematical Monthly, Official Journal of the Mathematical Association of America. Vol. XXX, 1923. — Lancaster, Pa.

Annales de la Société scientifique de Bruxelles, 42me année.

Bollettino della Unione matematica italiana, anno II. — Zanichelli, Bologne.

Bollettino di Matematica, Giornale scientifico-didattico per l'incremento degli Studi Matematici nelle scuole medie. Diretto dal Dott. Alb. Conti, con una Sezione storico-bibliografica publicata per Gino Loria. Nuova serie. Anno II. — Cuppini, Bologna.

Bulletin of the American Mathematical Society, tome XXIX, 1923. — New-York.

Bulletin of the Calcutta Mathematical Society, vol. XIV, 1922-23. — Calcutta, University Press.

Contribucion al Estudio de las Ciencias fisicas y matematicas. — Nos 53bis à 55. — La Plata.

Fundamenta Mathematicae, publié par St. Mazurkiewicz et W. Sierpinski. Tome V. Varsovie. — Gauthier-Villars & Cie. Paris.

Giornale di Matematiche di Battaglini, tome LX. — Pellerano, Naples.

Intermédiaire des Mathématiciens, dirigé par Ed. Maillet, J. Lemaire, A. Vaulot. — 2me série, tome II, 1923. — Gauthier-Villars et Cie, Paris.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, Band 46, Jahrgang 1916-18 (in 4 Heften). — Verein. wiss. Verleger, Berlin.

Journal de Mathématiques élémentaires, publié par H. Vuibert, 47me année, 1921-23. — Librairie Vuibert, Paris.

Journal of Mathematics and Physics, Massachusets Institute of Technologie. Vol. I, 1922.

Journal of the mathematical Association of Japan for secondary Education. Vol. IV, 1922. — Tokyo.

Mathematisk Tidsskrift. Revue dirigée par H. Bohr et T. Bonnesen, séries A et B ; 1923. — Copenhague.

Mathematical Gazette (The), publié par G. Greenstreet. Vol. XI, Nos 162 à 167. — G. Bell and Sons, Londres.

Mathesis. Recueil mathématique à l'usage des écoles spéciales, publié par J. Neuberg et Ad. Mineur, tome XXXVII, année 1923. — Bruxelles et Paris.

Mémoires de la Société royale des Sciences de Liége, 3me série, tome XI.

Nieuw Archief voor Wiskunde, publié sous les auspices de la Société des Sciences d'Amsterdam, par D.-J. Korteweg, F. Schuh et W. Van der Woude, 2me série, tome XIV. — Noordhoff, Groningue.

Periodico di matematiche, série IV, Vol. III, 1923. — Nicola Zanichelli, Bologne.

Publications of the Massachusetts Institute of Technology, Bulletins of the Department of Mathematics. Nos 62-72.

Revista de Matematicas y Fisicas elementales, año IV, 1923. — Buenos-Aires.

Revista Matematica Hispano-Americana, dirigée par J. Rey-Pastor. Tome IV. — Madrid, 1922-1923.

Revue de mathématiques spéciales, 33me année, 1922-1923. — Librairie Vuibert, Paris.

Revue semestrielle des Publications mathématiques. Tome XXX, avril 1921-octobre 1922. — Noordhoff, Groningue.

Revue scientifique, année 1923. — Paris.

The Tôhoku mathematical Journal, publié par T. Hayashi, M. Fujiwara, T. Kubota. Vol. XXI, 1922. — Tôhoku Imperial University, Sendai. Japon.

Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften, herausgegeben von G. Wolff. Jahrgang 1923. — Otto Salle, Berlin.

Mathematische Zeitschrift. 14. Band. — H. W. E. Jung: Ueber die Rückkehr-, Wende- und Flachkurve einer algebraischen Fläche. — G. Hoheisel: Lineare funktionale Differentialgleichungen, I. — E. Kogbetliantz: Ueber die ($C\delta$)-Summierbarkeit der Laplaceschen Reihe für $\frac{1}{2} < \delta < 1$. — A. Cohn: Ueber die Anzahl der Wurzeln einer algebraischen Gleichung in einem Kreise. — L. Neder: Zum Konvergenzproblem der Dirichletschen Reihen beschränkter Funktionen. — H. Liebmann: Eine charakteristische Eigenschaft der H-Netze. — W. Sternberg: Ueber die lineare Abhängigkeit von Funktionen mehreren Variablen. — S. Bochner: Ueber orthogonale Systeme analytischer Funktionen .— D. König: Ueber konvexe Körper. — E. Hilb: Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen. — E. Salkowski: Ueber den gemischten Flächeninhalt zweier ebenen Figuren. — L. Chwistek: Ueber die Antinomien der Prinzipien der Mathematik. — M. Bauer: Die Theorie der p-adischen bzw. P-adischen Zahlen und die gewöhnlichen algebraischen Zahlkörper. — F. Lukacs: Ueber die Laplacessche Reihe. — Mittelsten-Scheid: Die Zerlegung irreduzibler integrabler Gruppen hyperkomplexer Grössen in unzerlegbare Faktoren.

15. Band. — H. Stenzel: Ueber die Darstellbarkeit einer Matrix als Produkt von zwei symmetrischen Matrizen, als Produkt von zwei alternierenden Matrizen und als Produkt von einer symmetrischen und einer alternierenden Matrix. — R. König: Die Elementartheoreme bei den Riemannschen Transzendenten. — A. Tauber: Ueber die Umwandlung von Potenzreihen in Kettenbrüche. — A. Ostrowski und I. Schur: Ueber eine fundamentale Eigenschaft der Invarianten einer allgemeinen binären Form. — K. Zindler: Ueber einen Hauptsatz in der Theorie der konvexen Polyeder. — T. Carlemann: Ueber die Abelsche Integralgleichung mit konstanten Integrationsgrenzen. — O. Perron: Ueber die Gestalt der Integralkurven einer Differentialgleichung erster Ordnung in der Umgebung eines singulären Punkts. — R. Baldus: Ueber die Flächen welche ein Strahlenbündel isogonal schneiden. — H. Beck: Der Fundamentalsatz der Lieschen Kugelgeometrie im Euklidischen Raum. — J. A. Schouten: Nachtrag zur Arbeit über die verschiedenen Arten der Uebertragung. — Ch. H. Müntz: Die Aehnlichkeitsbewegungen beim allgemeinen n-Körperproblem. — E. Kamke: Bemerkung zum allgemeinen Waringschen Problem. — R. Courant: Ueber die Schwingungen eingespannter Platten. — H. Cramer: Ueber zwei Sätze des Herrn G. H. Hardy. — J. W. Lindeberg: Eine neue Herleitung des Exponentialgesetzes in der Wahrscheinlichkeitsrechnung. — K. Knopp: Ueber das Eulersche Summierungsverfahren. — A. Loewy: Ueber die Reduktion algebraischer Gleichungen durch Adjunktion insbesondere reeller Radikale. — R. L. Moore: Concerning Continuous Curves in the Plane. — E. Hilb: Die komplexen Nullstellen der Besselschen Funktionen. — Id.: Zur Theorie der linearen Differenzengleichungen. — L. Neder: Ueber Gebiete gleichmässiger Konvergenz

Dirichletscher Reihen. — M. Lecat: Sur les déterminants cayléens et bicayléens anormaux. — W. Blaschke: Differentialgeometrie der geradlinigen Flächen im elliptischen Raum.

16. Band. — M. Bauer: Verschiedene Bemerkungen über die Differente und die Diskriminante eines algebraischen Zahlkörpers. — St. Jolles: Die Bestimmung der Inzidenzen in korrelativen Räumen vermöge der windschief involutorischen linearen Strahlenkongruenz. — G. Scheffers: Flächen mit geradlinig projizierbaren konjugierten Kurvennetzen. — A. Weinstein: Fundamentalsatz der Tensorrechnung. — B. P. Haalmeijer: Ueber lineare homogene Punktmengen. — M. Mathias: Ueber positive Fourier-Integrale. — W. Fr. Meyer: Ueber die Darstellung und Zusammensetzung nichteuklidischer Raumbewegungen. — Fr. Levi: Streckenkomplexe auf Flächen. — P. Funk: Ueber Flächen mit einem festen Abstand der konjugierten Punkte. — F. Hausdorff: Eine Ausdehnung des Parsevalschen Satzes über Fourierreihen. — Van der Woude: Ueber die Staudeschen Kreiselbewegungen. — E. Schlechter: Untersuchungen über die Konvergenz der limitär-periodischen Jacobi-Ketten beliebiger Ordnung. — J. Tamarkine: Sur le théorème d'unicité des solutions des équations différentielles ordinaires. — Id.: Sur la méthode de C. Störmer pour l'intégration approchée des équations différentielles ordinaires. — F. Hausdorff: Momentprobleme für ein endliches Intervall. — R. Weydich: Beiträge zur Theorie der Kurven konstanter geodätischer Krümmung auf krummen Flächen. — O. Perron: Ueber die Gestalt der Integralkurven einer Differentialgleichung erster Ordnung in der Umgebung eines singulären Punktes. — J. Lense: Ueber eine Integralgleichung in der Theorie der heterogenen Gleichgewichtsfiguren. — E. Hecke: Ueber die Lösungen der Riemannschen Funktionalgleichung. — H. Tietze: Ueber die Parallelverschiebung in Riemannschen Räumen. — M. Bauer: Ganzzahlige Gleichungen ohne Affekt.

17. Band. — R. Remak: Verallgemeinerung eines Minkowskischen Satzes, I. — H. Prüfer: Untersuchungen über die Zerlegbarkeit der Abzählbaren primären Abelschen Gruppen. — L. Lichtenstein: Untersuchungen über die Figur der Himmelskörper. Vierte Abhandlung. Zur Maxwellschen Theorie der Saturnringe. — H. A. Schouten: Ueber die Bianchische Identität für symmetrische Uebertragungen. — E. Steinitz: Ueber die Maximalzahl der Doppelpunkte bei ebenen Polygonen von gerader Seitenzahl. — L. Neder: Ueber das Wachstum analytischer Funktionen in Halbstreifen und ähnlichen Gebieten. — E. Salkowski: Ueber affine Geometrie: Zur Theorie der Affingesimsflächen. — O. Perron: Ueber einen Grenzwertsatz. — H. Brandt: Bilineare Transformation quadratischer Formen. — J. A. Schouten: Ueber die Einordnung der Affingeometrie in die Theorie der höheren Uebertragungen, I und II. — A. Timpe: Die Airysche Funktion für den Ellipsenring. — W. Saxer: Ueber die Picardschen Ausnahmewerte sukzessiver Derivierten. — M. Fekete: Ueber die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten. — J. G. van der Corput: Zahlentheoretische Abschätzungen mit Anwendung auf Gitterpunktprobleme. — W. Rogosinski: Ueber Bildschranken bei Potenzreihen und ihren Abschnitten. — W. Janichen: Ueber einen zahlentheoretischen Satz von Hurwitz. — H. Weyl: Zur Charakterisierung der Drehungsgruppe.

Rendiconti del Circolo Matematico. Tomo XLVI. Anno 1922. — A. Comessatti: Intorno alle superficie algebriche irregolari con $p_g \geqq 2$ ($p_a + 2$) e ad un problema analitico ad esse collegato. — P. Nalli: Sulle operazioni funzionali lineari. — E. Bompiani: Sistemi coniugati sulle superficie degli iperspazi. — F. Severi: Sul teorema di esistenza di Riemann. — T. Hayashi: The Cauchy problem on the equation of telegraphy. — P. Tortorici: Le trasformazioni delle superficie per configurazioni invariabili. — E. Kogbetliantz: Sur la sommation des séries ultrasphériques par la méthode Σ_0 de M. de la Vallée Poussin. — J. A. de Schouten et D. J. Struik: Ueber Krümmungseigenschaften einer m-dimensionalen Mannigfaltigkeit, die in einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit mit beliebiger quadratischer Massbestimmung eingebettet ist. — J. Chuard: Questions d'analyse situs. — A. Ajello: Sul luogo dei piedi delle normali condotte da uno stesso punto alle curve d'un fascio. — G. Vivanti: Sull' indipendenza di un integrale di parametro. — J. L. Walsh: A theorem on loci connected with cross-ratios. — E. Allara: Sull' ubicazione dei punti di massima sollecitazione elastica tangenziale in un prisma retto, sollecitato a torsione. — E. Picard: A propos de l'équation des télégraphistes (Extrait d'une lettre au Directeur des Rendiconti). — P. Nalli: Sopra un' equazione integrale. — M. Verz: Sulla costruzione delle superficie iperellitiche cicliche. Nota Ia. — G. Rados: Sur une identité remarquable de la théorie des congruences binomes. — P. Tortorici: Il Problema di Bianchi. — J. A. Schouten et D. J. Struik: Berichtigung zur Mitteilung über das Theorem von Malus-Dupin. — E. Landau: Zum Koebeschen Verzerrungssatz. — E. Landau: Zur additiven Primzahltheorie. — E. Tricomi: Su di un' equazione integrale di prima specie. — G. Vitali: Analisi delle funzioni a variazione limitata. — G. Sansone: Sulle superficie con due famiglie di curve orthogonali deformabili in linee di livello e sopra una proprieta caratteristica delle superficie ad area minima. — M. Picone: Sul calcolo delle variazioni (Estratto da una lettera al Professore G. Bagnera). — E. Landau: Ueber einen Bieberbachschen Satz. — G. Balarbinelli: L'equazione differenziale risolvente dell' equazione trinomia.

Tome XLVII. — P. Nalli : Sopra un' equazione funzionale e sopra alcuni sviluppi in serie. — P. Appell : Sur un système de trois équations linéaires et homogènes aux dérivées partielles. — E. Laura : Sulle superficie contenenti una famiglia prefissata di linee geodetiche od asintotiche. — J. Chokhatte : Sur le développement de l'intégrale $\int_a^p p(y)dx/(x-y)$ en fraction continue et sur les polynomes de Tchebycheff. — N. Abramesco: Sur les courbes associées de convergence des séries de polynomes à deux variables complexes. — C.-R. Adams : On the value of the remainder in the Euler summation formula when that formula is expressed in terms of finite differences. — C. Rados : Sur une propriété remarquable des polynomes trigonométriques à coefficients entiers. — P. Mazzoni : Contributo alla teoria delle equazioni algebriche. — C. Mammana : Lemma fondamentale per il calcolo approssimato delle radici di una equazione. — J. Mollerup : Beitrag zur Schmidt'schen Theorie des symmetrischen Kerns. — P. Dienes : Sur l'intégration des équations du déplacement parallèle de M. Levi-Civita. — H. Mohrmann : Ueber die algebraischen W-Curven im r-dimensionalen Raum. — M. Piazzolla-Beloch : Sulle

superficie iperellittiche del 4. ordine con 15 punti doppi. — G. Belardinelli: Su alcune serie di funzioni razionali. — F. Cecioni : Sopra un tipo di algebre prive di divisori dello zero. — M. Lecat : Extension d'un théorème de Bœhm généralisant la loi de multiplication de deux déterminants ordinaires. — C. Mineo : Paragone d'un intorno superficiale con un intorno sferico o pseudosferico. — A. Lanza Russitano : Sulle superficie sviluppabili con geodetiche algebriche. — G. Sansone : I sottogruppi del gruppo di Picard e due teoremi sui gruppi finiti analoghi al teorema del Dyck. — G. Vitali : Sulle funzioni a variazione limitata. — E.-W. Crittenden : Acknowledgement. — P. Nalli : Sopra un procedimento di calcolo analogo alla integrazione. — J. Mollerup : Sur l'itération d'une fonction par un noyau donné. — Ch. Jordan : Sur la théorie des erreurs d'observation. — J.-A. Schouten : Ueber die Anwendung der allgemeinen Reihenentwicklung auf eine bestimmte quaternäre Form sechsten Hauptgrades.

Revue de métaphysique et de morale. 31me année, N° 1, janvier-mars 1924. — M. Winter : Les axiomes de la physique différentielle. —

Revue générale des sciences pures et appliquées. 35me année, N° 1. — P. Dupont : Sur la théorie physique du mouvement. — N° 5. H. Malet : L'inutilité de l'espace-temps. — N° 3. G. Juvet : Henri Poincaré et la théorie de la relativité.

Scientia. Année XVIII, vol. XXXV, N. CXLIV-4, série II. — F.-G. Teixeira : Sur l'histoire de la fondation de l'astronomie nautique.

Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht aller Schulgattungen. 54. Jahrgang 1923. — K. Bochow : Experimentelle Geometrie der Richtung ausgeführt für die Ebene. — E. Dintzl : Graphische Darstellung von Sätzen der elementaren Algebra. — H. Dorrie : Elementares Verfahren zur Bestimmung der Elektrizitätsverteilung auf dem Ellipsoïd und zur Ermittlung der Kapazität einer Scheibe und eines States.— K. Fladt : Ueber die Behandlung der Parallelenlehre in Unterricht — R. Fuchs: Ueber die Sichtung des mathematischen Unterrichtesstoffes in den höheren Lehranstalten. — N. Gennimatas : Zu den arithmetischen Operationen. — W. Grebe : Mathematischer und philosophischer Unterricht in ihrer gegenseitigen Befruchtung. — K. Hahn : Physik und Mathematik auf der Oberstufe von Vollanstalten. — Harms : Ueber die Anzahl der Bilder in Winkelspiegeln. — A. Harnack : Die Zahle im Unterricht. F. Hund : Die Behandl. einiger Grundbegrifnisse d. Mechanik im Schulunterricht. — K. Kommerell : Zur Bestimmung der Asymptoten einer ebenen Kurve. — W. König : Beiträge zur Behandlung der Kombinatorik. — W. Lietzmann u. R. Lübeck : Vom Ptolemäischen zum Kopernikanischen System. — A. Lindemann : Die Verwendung der Glimmlampe im Unterricht. — H. Meurer : Ein elementares Verfahren, die relativistischen Aberrationsgesetze unmittelbar aus dem Diagramm der Aberration abzulesen. — W. Fr. Meyer : Ergänzungen zur Elementar-mathematik. — F. Requard : Der mathematische Unterricht und der Bergbau. — Ruoss : Beiträge zur Berechnung des Kugeldreiecks im Falle des casus ambiguus. — A. Schülke : Nichteuklidische Geometrie im Unter-

richt. — H. Teege : Ueber den Zusammenhang der Keplerschen Gesetze untereinander. — P. Thalmann : Geometrische Deutung der imaginären Schnittpunkte einer Geraden mit einem Kreise. — A. Witting : Die Schnittpunkte zweier Kreise. — (Id.) : Die Schnittpunkte eines Kreises mit einer Parabel.

Annals of Mathematics. 2me séries Vol 24. — E.-T. Bell : Periodicities in the theory of partitions. — W. L. Hart : Functionals of summable functions. — A. Arwin : Periodically closed chains of reduced fractions. — F.-H. Murray : On certain linear differential equations of the second order. — W. C. Graustein : Spherical representation of conjugate system and asymptotic Lines. — B. H. Camp : On a short method of least squares. — J. L. Walsh : On the Convergence of the Sturm-Liouville series. — J.H.M. Wedderburn : The functional equation $g(x^2) = 2ax + [g()x]^2$. — B. M. Eversull : On convergence factors in triple series and the triple Fourier's series. — P. R. Rider : On the minimizing of a class of definite integrals. — E. Hille : A pythagorean functional equation — C. de Jans: On the potential of a homogeneous spherical cap, of a magnetic shell, and of a steady circular current. — H. Hilton : On cyclic-harmonic curves. — Ph. Franklin : Multiple Integrals in n-space. — A. Dresden : On symetric forms in N-variables. — J. H. M. Wedderburn : Algebric fieles. — H. R. Brahana : A Theorem concerning certain unit matrices with integer elements. — Gösta Mittag-Leffler : An introduction to the theory of elliptic functions. — P. Oudh Upadhyahya : Cyclotomic quinquisection for all primes of the form $10n+1$ between 1900 and 2100. — R. Henderson: Geodesic lines in Riemann Space. — A. Arwin : A functional equation from the theory of the Riemann $\zeta(s)$-function. — L. P. Eisenhart : The geometry of paths and general relativity.

Bulletin de la Société mathématique de France. Tome LI, fasc. I et II. — H. Vogt : Sur les systèmes d'équations différentielles simultanées à coefficients constants. — P. Fatou : Sur les frontières de certains domaines. — Et. Delassus : Sur les lois de frottement de glissement. — G. Valiron : Sur les fonctions entières vérifiant une classe d'équations différentielles. — H. Dulac : Sur les cycles limites.

Comptes rendus de l'Académie des Sciences. 1er semestre 1923. — 8 *janvier.* Th. Ahchetutza : Sur la représentation d'une variable réelle. — G. Julia : Sur les substitutions rationnelles à deux variables. — J.-F. Ritt : Sur les fonctions rationnelles permutables. — G.-V. Pfeifer : Une méthode spéciale d'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre. — F. Appell : Remarques sur la note précédente. — T. Carleman : Sur le calcul effectif d'une fonction quasi-analytique dont on donne les dérivées en un point. — E. Borel : Remarques sur la Note précédente de M. T. Carleman. — P. Dienes : Sur les suites transfinies de nombres réels. — T. Wazewski : Sur les ensembles mesurables. — G. Bratu: Sur les courbes définies par des suites récurrentes. — J. Chuard : Quelques propriétés des réseaux cubiques tracés sur une sphère. — D. Wolkowitrch: Sur des mouvements infiniment petits en un point d'un corps élastique admettant un plan de symétrie. — 15 *janvier.* M. Alander : Sur les fonctions entières qui ont tous leurs zéros sur une droite. — J. Haag : Le

problème des *n*-corps dans la théorie de la relativité. — G. Sagnac : Sur le spectre variable périodique des étoiles doubles : incompatibilité des phénomènes observés avec la théorie de la relativité générale. — 22 *janvier*. E. Kogbelliantz : Sur les moyennes doubles de Cesaro. — S. Stoïlow: Sur les fonctions continues et leurs dérivées. — C. Kuratowski : Sur l'existence effective des fonctions représentables analytiquement de toute classe de Baire. — C. Guichard : Sur les figures polaires réciproques par rapport à une sphère. — Alliaume : Sur la résolution nomographique des systèmes d'équation. — L. Lecornu : Sur l'orbite de Mercure. — H.-C. Levinson : Sur la gravitation einsteinienne des systèmes. — E. Picard : Observation à l'occasion de la communication de M. H.-C. Levinson. — P. Dienes : Sur la théorie électromagnétique relativiste. — G. Poivillers: Sur un procédé de représentation stéréoscopique des surfaces topographiques. — 29 *janvier*. George-J. Remoundos : Sur l'itération des fonctions multiformes. — A. Angelesco : Sur une classe de polynomes et une extension des séries de Taylor et de Laurent. — L. Gau : Sur l'étude des invariants relatifs aux caractéristiques des équations aux dérivées partielles du second ordre, à deux variables indépendantes. — B. Meidell : Sur la probabilité des erreurs. — J. Chazy : Sur l'expression de la loi d'Einstein en coordonnées cartésiennes. — 5 *février*. J. Roudaire-Miegeville : Sur la détermination graphomécanique des systèmes de solutions réelles ou imaginaires des équations algébriques. — A. Buhl : Sur les champs massique et électromagnétique de M. Th. de Donder. — P. Dienes : Sur la géométrie tensorielle. — J. Haag : Sur la répartition des molécules d'une masse gazeuse ; application à la formule de Van der Waals. — 12 *février*. C. Guichard : Sur deux systèmes triples orthogonaux qui se correspondent de telle sorte que la seconde tangente de l'un soit polaire réciproque de la troisième tangente de l'autre par rapport à un complexe linéaire. — 19 *février*. A. Myller : Les systèmes de courbe sur une surface et le parallélisme de M. Levi-Civita. — Juvet : Sur une généralisation du théorème de Jacobi. — A. Weinstein : Sur l'unicité des mouvements glissants. — Ch. Bohlin : Sur les séries autologues appartenant aux problèmes de deux et trois corps. — Ern. Pasquier : Sur une expression simple de l'accélération de Mercure dans le cas du problème de deux corps, avec prise en considération du mouvement de périhélie de la planète. — 26 *février*. R. Lagrange : Sur les variétés à torsion totale nulle de l'espace euclidien. — S. Millot : Sur un critérium de la valeur probante de certaines expériences. — B. Delaunay : Interprétation géométrique de la généralisation de l'algorithum des fractions continues données par Voronoï. — M. Lecat : Expression des déterminants les plus généraux d'une matrice en fonctions des sections. — C.-E. Traymard : Sur les surfaces du quatrième degré à quinze points doubles et les fonctions abéliennes singulières. — 5 *mars*. G. Darmois : Sur l'intégration locale des équations d'Einstein. — F. Defourneaux : Sur une catégorie de polynomes analogues aux polygones électrosphériques. — H. Milloux : Sur la croissance des fonctions entières finies, et leurs valeurs exceptionnelles dans des angles. — C. de la Vallée Poussin : Sur les fonctions quasi-analytiques de variables réelles. — N. Abramesco : Sur l'autogénération des courbes. — J. Chazy : Sur la correction apportée par la théorie de la relativité à la durée de révolution newtonienne des planètes. — K. Popoff : Sur le pendule de longueur variable. — J. Haag : Sur le problème intérieur de Schwarzschild, dans

le cas d'une sphère hétérogène. — 12 *mars*. L. Bianchi : Sur une propriété cinématique des surfaces W. — Mordoukhay-Boltovskoy : Sur le logarithme d'un nombre algébrique. — Hadamard : Observations à propos de la communication précédente. — Mandelbroft : Sur les séries de Taylor qui ont des lacunes. — G. Darmois : Intégration locale des équations d'Einstein. — U. Cisotti : Sur les mouvements plans des liquides doués de viscosité. — 19 *mars*. — C. Bouligand : Sur quelques points d'analyse fonctionnelle. — C. Guichard : Sur les systèmes triplement indéterminés de sphères, de cercles et de deux points. — E. Borel : Sur l'approximation les uns par les autres de nombres rationnels ou incommensurables appartenant à des ensembles énumérables donnés. — W. Margoulis : Sur la théorie générale de la représentation des équations au moyen d'éléments mobiles. — J. Haag : Sur le problème des n-corps en relativité. — L. Lecornu : Sur la durée de révolution des planètes. — 26 *mars*. Soula : Sur les séries de Taylor qui ont une infinité de coefficients nuls. — P. Noaillon : Fonctions harmoniques dont le gradient s'annule à l'infini. — 3 *avril*. E. Picard : Deux théorèmes élémentaires sur les singularités des fonctions harmoniques. — S. Lefschetz : Sur les intégrales de seconde espèce des variétés algébriques. — G. Valiron : Remarque sur un théorème de M. Carleman. — 9 *avril*. M. Lecat : Généralisation et modifications d'un théorème de Frœbenius sur un déterminant tracé. — E.-O. Lowett : Sur certaines propriétés fonctionnelles des coniques et leurs généralisations. — M. Frechet : Sur l'existence des classes (D) non complètes. — Mandelbroft : Sur les séries de Taylor qui ont des lacunes. — H.-C. Levinson : Sur le champ gravitationnel de n corps dans la théorie de la relativité. — E. Csilser : Quelques propriétés dynamiques et géométriques du mouvement résultant des conditions de M. Angeleses. — 16 *avril*. D'Ocagne : Remarques sur les normalies des quadriques à centre le long de leurs lignes de courbure. — E. Picard : Sur les singularités des fonctions harmoniques. — G. Bouligand : Sur les singularités des fonctions harmoniques. — G. Bertrand : Le problème de Dirichlet et le potentiel de simple couche. — G.-C. Evans et H.-E. Bray : Sur l'intégrale de Poisson généralisée. — W. de Belaewsky : Sur un problème d'élasticité à deux dimensions. — Mesnager : Observations sur la communication précédente de M. Wladimir de Belaevsky. — P. Noaillon : Circulation superficielle. — Hadamard : Remarque sur la communication précédente. — 23 *avril*. C. Guichard : Sur les systèmes triplement indéterminés de cercles. — H. Lebesgue : Sur les singularités des fonctions harmoniques. — N. Gunther : Sur un théorème auxiliaire. — P. Levy : Sur une application de la dérivée d'ordre non entier au calcul des probabilités. — R. Lagrange : Sur les variétés sans torsion. — M. Frechet : Sur la distance de deux ensembles. — A. Guldberg : Sur le problème du schéma des urnes. — St. Millot : Sur la probabilité d'existence des lois biologiques. — B. Riabouchinski : Sur le paradoxe de d'Alembert. — 30 *avril*. G. Bouligand : Sur les singularités des fonctions harmoniques. — A. Sainte-Laguë : Les réseaux. — J. Haag : Sur le champ gravitationnel de n-corps. — L. Roy : Sur le théorème de la moindre contrainte de Gauss. — U. Cisotti : Remarque sur la note « Circulation superficielle « de M. P. Noaillon. — M. Morand : Sur certaines conséquences électromagnétiques du principe de relativité. — 7 *mai*. H. Lebesgue : Sur les singularités des fonctions harmoniques. — P. Humbert : Sur certains polynomes orthogonaux. —

P. Levy : Sur les lois stables en calcul des probabilités. — B. Gambier : Systèmes de points surabondants dans le plan ; application à l'étude de certaines surfaces. — M. D'Ocagne : Sur les opérations à quatre variables représentables à la fois par simple et par double alignement. — S. Rabinovitch - Sur la géométrisation des forces électromagnétiques. — 14 *mai*. C. Guichard : Sur les systèmes triples orthogonaux de M. Bianchi. Application à un problème sur les polaires réciproques par rapport à une sphère. — J.-J. Walsh : Sur un théorème d'algèbre. — R. Garnier : Sur les fonctions uniformes de deux variables indépendantes définies par l'inversion d'un système algébrique aux différentielles totales du quatrième ordre. — C. Bouligand : Sur les singularités des fonctions harmoniques. — H.-C. Evans et H.-E. Bray : La formule de Poisson et le problème de Dirichlet. — J. Haag : Sur la résolution de certaines équations de Fredholm au moyen d'une série entière. — M. Morand : Origine électromagnétique de la masse inerte et de la masse pesante. — M. Nuyens : Champ gravitique dû à une sphère massique en tenant compte de la constante cosmique. — 23 *mai*. P. Levy : Sur une opération fonctionnelle généralisant la dérivation d'ordre non entier. — P. Zervos : Sur quelques transformations d'équations aux dérivées partielles. — A. Guillet : Mesure rapide et précise de la fréquence de l'arbre d'un moteur par la méthode stroboscopique. — 28 *mai*. — R. Garnier : Sur les fonctions uniformes de deux variables indépendantes définies par l'inversion d'un système algébrique aux différentielles totales du quatrième ordre. — N. Saltykow : Sur les méthodes d'intégration des équations partielles. — Angelesco : Sur certains polynomes biorthogonaux. — H. Milloux : Sur les suites infinies de fonctions et les fonctions néromorphes à valeur asymptotique. — Charles-N. Moore : Sur les séries de Fourier généralisées des fonctions non intégrables. — J. Haag : Sur le problème de Schwarzschild dans le cas d'un univers courbe. — J. Chazy : Sur les effets séculaires de la théorie de la relativité dans les mouvements planétaires. — J. Le Roux : Sur le champ de gravitation. — 4 *juin*. M. Guichard : Sur deux systèmes triples orthogonaux qui se correspondent de telle sorte que les premières tangentes aux deux systèmes soient polaires réciproques par rapport à un complexe linéaire. — J. Drach : Sur des classes remarquables de congruences W. — B. Gambier: Sur les courbes de Bertrand et en particulier sur celles qui sont algébriques.— Schouten et Struik : Un théorème sur la transformation conforme dans la géométrie différentielle à n dimensions. — Laine : Sur l'intégration des équations différentielles. — S. Bernstein : Sur une propriété des fonctions entières. — H. Eyraud : Sur les espaces multiples et les tenseurs. — 11 *juin* .— P. Montel : Sur les relations algébriques de genre un ou zéro. — R. Garnier : Sur les fonctions uniformes de deux variables indépendantes définies par l'inversion d'un système algébrique aux différentielles totales du quatrième ordre. — Ch.-N. Moore : Sur la sommabilité de Césaro pour la série double de Fourier. — L. Bachelier : Le problème général de la statistique discontinue. — S. Millot : Solutions simplifiées de problèmes de Laplace sur la probabilité des causes. — B. Hostinsky : Equilibre de l'électricité sur une surface cylindrique. — Th. de Donder : Synthèse de la gravifique. — 18 *juin*. P. Sergesco : :Sur les noyaux symétrisables. — S. Bernstein : Sur les propriétés extrémales des polynomes et des fonctions entières sur l'axe réel. — B. Gambier : Courbes minima ; courbes à torsion constante ; courbes de Bertrand. Déformation du para-

boloïde et de l'hyperboloïde de révolution. — MESNAGER : Plaque mince indéfinie uniformément chargée, portée par des points régulièrement espacés. — M. MORAND : Sur le rayonnement électromagnétique de particules électrisées. — 25 *juin.* F.-H. VAN DEN DUNGEN : Calcul des pôles simples d'une fonction méromorphe. — G. FANO : Sur la congruence des normales à une quadrique.

2me sem. 1923. — 2 *juillet.* B. GAMBIER: Courbes de Bertrand et déformation des quadriques. — H. VILLAT : Sur une équation intégrale singulière et un théorème sur la théorie des tourbillons. — R. BIRKELAND : Sur la résolution des équations algébriques par une somme de fonctions hypergéométriques. — J. HAAG : Sur certains états particuliers d'une masse gazeuse, conformes à la loi de Maxwell. — 9 *juillet.* S. BERNSTEIN : Sur la meilleure approximation des fonctions possédant un point singulier essentiel. — N. OBRECHKOFF : Sur un problème de Laguerre. — Th. DE DONDER : Synthèse de la gravifique. — 23 *juillet.* M. SEGUIER : Sur les groupes linéaires à invariant bilinéaire ou quadratique dans le champ réel et complexe. — S. SANIE-LEVICI : Sur une application du calcul tensoriel. — EVANS : Sur l'intégrale de Poisson. — F.-H. VAN DEN DUNGEN : Quelques applications techniques des équations intégrales. — Th. DE DONDER : Synthèse de la gravifique. — 30 *juillet.* J. CHAZY : Sur le champ de gravitation de deux masses fixes dans la théorie de la relativité. — Th. VAROPOULOS : Sur le nombre de valeurs exceptionnelles des fonctions multiformes. — 6 *août.* N. SAKELLARIOU : La courbure linéaire oblique et la courbure géodésique totale. — F.-H. VAN DEN DUNGEN : Quelques applications techniques des équations intégrales. — R. NEVANLINNA : Sur le théorème de M. Picard. — 13 *août.* T. CARLEMAN : Sur les fonctions indéfiniment dérivables. — 27 *aout.* D. MORDOUHAY-BOLTHOVSKOY : Sur certaines catégories de nombres transcendants. — 3 *septembre.* A. ERRERA: Un théorème sur les liaisons. — A. RAJCHMAN : Sur la théorie riemanienne des séries trigonométriques. — 10 *septembre.* HADAMARD : Sur les tourbillons et les surfaces de glissement dans les fluides. — 17 *septembre.* P. SERGESCO : Sur la distribution des valeurs caractéristiques des noyaux de Marty $N(x, y)=A(x) K(x, y)$. — A. ZYCHMUND : Sur la théorie riemanienne des séries trigonométriques. — C.-J. REMOUNDOS : Sur une propriété d'élimination et les fonctions algébroïdes. — O.-N. TINO : Sur le passage de la théorie des fonctions fondamentales Fredholm à celle des fonctions fondamentales Schmidt. — S. BERNSTEIN : Démonstration mathématique de la loi d'hérédité de Mendel. — 24 *septembre.* J. KAMPE-DE FERIET : Sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles des fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur. — 1er *octobre.* M. GEVRAY: Formation et emploi des fonctions de Green dans l'intégration des équations linéaires aux dérivées partielles d'ordre quelconque à caractéristique imaginaire. — F.-H. VAN DEN DUNGEN : Nouvelles applications techniques des équations intégrales. — A. ZYGMUND : Sur les séries trigonométriques. — R. JACQUES : Sur les deux réseaux dont les deux tangentes appartiennent à des complexes linéaires et les transformations de l'équation des surfaces à courbe totale constante. — S. BERNSTEIN : Principe de stationarité et généralisation de la loi de Mendel. — V. VOLTERRA : Mouvement d'un fluide en contact avec un autre et surfaces de discontinuité. — 8 *octobre.* A. VERONNET : Sur la formation des systèmes planétaires et des systèmes stellaires. — 15 *octobre.* E. KOGBETLIANTZ : Sur l' unicité des systèmes

trigonométriques. — F.-H. Van der Dungen : Sur les équations intégrales à plusieurs paramètres et leurs applications techniques. — 22 *octobre.* A. Chatelet : Propriétés des groupes abéliens finis. — A. Bloch : Sur les cercles paratactiques et la cyclide de Dupin. — Hadamard : Observations à propos de la note précédente. — M. Cevrey : Sur quelques propriétés des fonctions quasi-analytiques d'une ou plusieurs variables. — H. Bohr : Sur les fonctions presque périodiques. — G. Valiron : Sur le théorème de Picard-Borel. — Alex. Veronnet : Evolution de la trajectoire d'un astre dans un milieu résistant. — W.-W. Heinrich : Sur les prolongements analytiques du problème restreint. — A. Guillet : Synchronisation de mouvements circulaires. — 29 *octobre.* V. Brun : Etude directe de la fonction $f(x)$ de Riemann. — 5 *novembre.* A. Bloch : Sur les congruences paratactiques et la cyclide de Dupin. — Angelesco : Sur les fonctions génératrices des polynomes d'Hermite. — J. Wolff : Sur les ensembles non-mesurables. — N. Gunther : Sur un problème d'hydrodynamique. — 12 *novembre.* E.-O. Lovett : Sur une propriété fonctionnelle de certaines surfaces. — A. Cahen : Sur des fractions continues nouvelles attachées à certaines opérations à une unité près par excès. — S. Bernstein : Sur les fonctions quasi-analytiques. — J. Chazy : Sur le champ de gravitation de deux masses fixes dans la théorie de la relativité. — C.-A. Garabedian : Une méthode de séries. — H. Bohr : Sur l'approximation des fonctions périodiques par des sommes trigonométriques. — R. Humbert : Sur les confluences de la série de Clausen. — L. Pomey : Sur les équations intégro-différentielles linéaires à plusieurs variables. — R. Lagrange : Sur les systèmes adjoints d'équations différentielles linéaires. — 3 *décembre.* P. Appell : Intégrales définies se rattachant à la constante C d'Euler. — N. Obrechkoff : Sur le développement en série d'un système de fonctions analytiques. — C. Guichard : Sur quelques propriétés des traces des tangentes asymptotiques d'une surface ou un plan fixe. — L. Pomey : Sur le dernier théorème de Fermat. — M. Biernacki : Sur un nouveau théorème d'algèbre. — M. Bary : Sur l'unicité du développement trigonométrique. — D. Wolkowitsch : Sur les mouvements infiniment petits en un point d'un corps élastique de l'espace. — 10 *décembre.* B. Hostinsky : Le problème du minimum absolu qui se rattache à la réflexion de la lumière sur une surface du second degré. — Mandelbroft : Quelques théorèmes sur les séries entières. — P. Alexandroff et P. Urysohn : Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une classe (D) soit une classe (L). — L. Lecornu : Sur la torsion des arbres de transmission. — M. Brillouin : Tenseur d'agitation moyenne. Conductibilité et dissipation de l'énergie d'agi»ation. — D. Riabouchinski: Sur les cavitations et la résistance des fluides. — G. Darmois : Sur le problème intérieur dans le cas d'un espace-temps courbe à symétrie sphérique.

Giornale di Matematiche di Battaglini. Vol. LXI, 1923. — St. Giannina : Sulle trasformazioni di Ribaucour delle rati in uno spazio euclideo. — A. Enrico : Rappresentazione per coppie di prospettive orientate ed in particolare fotogrammetriche. — P. Mario : Piccole note bibliographiche. — N. Vittoria : Sui massimi e minimi delle funzioni razionali fratte di terzo grado di una variabile. — Ch. Salvatore : Sulle varieta abeliane reali e sulle matrici di Riemann reali. — N. Lavide : Una forma piu generale del teorema dei reidui. — U. Giuseppe : Sopra una determinazione di

funzioni di Sturm dovuta al Mollame. — P. Giulio : Nicola Trudi ed Achille Sannia. — B. Nicoletta : Le trasformazioni birazionali dello spazio determinate da sistemi omaloidici di quitiche dotate di una retta tripla e di due doppie. — F. Sibirani : Sopra la determinazione di un certo minimo. — V. Snyder : Una involuzione di ordine 2 dell'S_3 appartenente alla varieta cubica generale. — A. Rocco : Ricerche sulle forme binarie aventi zero le seste, le ottave, o le 2i-esime spinte su sé stesse. — G. Vetter : Le coniche e le quadriche immaginarie generali. — G. Vitali : I fondamenti del calcolo assoluto generalizzato. — M. Pascal : Corrente fluida bidimensionale intorno a due lamine consecutive.

Monatshefte für Mathematik und Physik. — XXXIII. Band. — A. Duschek : Ueber eine besondere Klasse algebraischer Mannigfaltigkeiten.— H. Hahn : Ueber Reihen mit monoton abnehmenden Gliedern. Die Aequivalenz der Cesaroschen und Hölderschen Mittel. — P. Hebroni : Ueber sogenannte zweigliedrige, kontinuisierte Matrizen und ihre Anwendung auf Integral- und Integrodifferentialgleichungen. — J. Lense : Ueber mehrdimensionale lineare Strahlen- und Ebenenkomplexe. — K. Mack : Zur sternographischen Protektion imaginärer Gebilde. — K. Menger : Ueber die Dimensionalität von Punktmengen. — E. Müller : Der Aufbau von Perioden arithmetischer Reihen als Grundlage topologischer Erfahrungssätze Simony's. — Th. Radakovie : Ueber die Kurven auf einer Fläche, die durch die Normalenflächen extremen Dralls ausgeschnitten werden. — H. Tietze : Ueber die Komponenten offener Mengen. — L. Vietoris : Kontinua zweiter Ordnung. — W. Wirtinger : Ueber allgemeine Massbestimmungen, in welchen die geodätischen Linien durch lineare Gleichungen dargestellt werden. — K. Zindler : Ueber die partiellen Differentialgleichungen der schwingenden Seiten und Membranen.

3. Thèse de doctorat:

Nous signalons sous cette rubrique les thèses de doctorat dont un exemplaire imprimé aura été adressé à la Rédaction, 110 Florissant, *Genève.*

Suisse. — *Université de Genève.* — Ch. Inglin. — *Extension au problème aux différences finies d'une solution de l'équation différentielle linéaire à coefficients constants.* — 1 fasc. in-8°, 66 p., avec 7 fig.

Université de Neuchâtel. — H. Ory. — *Sur les systèmes holoïdes de tritettarions.* — Imprimerie La Concorde, Lausanne. — 1 fasc. in-4° de 47 p.

Université de Zürich. — A. Aeppli. — *Zur Theorie verketteter Wahrscheinlichkeiten. Markoffsche Ketten höherer Ordnung.* — 1 fasc. in 8°, de 56 p. et 10 fig.

F.-X. Mayer, Pater Augustin Ordinis cisterciencis. — *E. Warings « Meditationes Algebraicae »*. — 1 fasc. in-8°, de 60 p.

TABLE DES MATIÈRES

ARTICLES GÉNÉRAUX

Méthodologie et Notes diverses.

Histoire et Philosophie.

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE SUISSE

MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

CHRONIQUE

Nécrologie

NOTES ET DOCUMENTS

BIBLIOGRAPHIE

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

1. *Livres nouveaux.*

2. *Publications périodiques.*

3. *Thèses de doctorat*

TABLE DES NOMS D'AUTEURS
